Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— **Lösung Blatt 10** —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Die Sinusfunktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (sogar unendlich oft) differenzierbar, wegen $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ beschränkt, aber nicht konstant. Dies zeigt, dass der Satz von Liouville für reellwertige differenzierbare Funktionen nicht gilt. Die Teilmenge $]-1,1[\subseteq \mathbb{R}$ ist offen und zusammenhängend (also ein Gebiet in $\mathbb{R}$), und der Betrag der (wieder beliebig oft) differenzierbaren Funktion $f(x) = 1-x^2$ nimmt in $x = 0$ ein Maximum an. Die Funktion ist aber nicht konstant. Also ist auch das Maximumsprinzip für reellwertige differenzierbare Funktionen nicht gültig.

zu (b) Die Menge X nicht nicht diskret. Ist nämlich $V \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Umgebung von X, dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(0) \subseteq V$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ist dann $\frac{1}{n}$ in $X \cap V$ enthalten. Insbesondere ist $X \cap V = \{0\}$ für keine Umgebung V von 0 erfüllt, 0 also kein isolierter Punkt von X. Alternativ kann man laut Vorlesung auch damit argumentieren, dass $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X \setminus \{0\}$ ist, die gegen 0 konvergiert.

Die Menge $Y =]0,1[$ ist ebenfalls nicht diskret, denn es gilt $\frac{1}{2} \in Y$, und $(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})_{n\geq 3}$ ist eine Folge in $Y \setminus \{\frac{1}{2}\}$, die gegen Y konvergiert. Die Menge $Z = X \setminus \{0\}$ dagegen ist diskret. Ist nämlich $\frac{1}{n} \in Z$ ein beliebiger Punkt (mit $n \in \mathbb{N}$), dann ist $V = B_{\frac{1}{2n(n+1)}}(\frac{1}{n})$ eine Umgebung von $\frac{1}{n}$ mit $Z \cap V = \{\frac{1}{n}\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ (wegen $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)} > \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow 2(n+1)-1 > 2n \Leftrightarrow 2n+1 > 2n$) und für $n \geq 2$ auch $\frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{1}{n-1}$ (wegen $\frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{1}{n-1} \Leftrightarrow 2(n+1)(n-1) + (n-1) < 2n(n+1) \Leftrightarrow 2n^2 - 1 + n - 1 < 2n^2 + 2n \Leftrightarrow n - 2 < 2n \Leftrightarrow 0 < n+2$).

zu (c) Gegeben waren zwei holomorphe Funktionen f, g auf einem Gebiet G. Die Aussagen lauteten (i) $f = g$ (d.h. f und g stimmen auf ganz G überein), (ii) $f - g$ besitzt in einem Punkt $w \in G$ eine Nullstelle unendlicher Ordnung und (iii) Es gibt eine nicht-diskrete Teilmenge $N \subseteq G$ mit $f|_N = g|_N$. Bemerkenswert ist vor allem die Implikation „(iii) $\Rightarrow$ (i)“, da N eine sehr kleine Teilmenge von G sein kann. Stimmen beispielsweise zwei holomorphe Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf dem winzigen Intervall $]0, \frac{1}{1000}[\subseteq \mathbb{R}$ überein, dann müssen sie bereits auf ganz $\mathbb{C}$ übereinstimmen.

(d) Nein. Nehmen wir an, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wäre eine solche holomorphe Fortsetzung. Die Menge $X =]-\infty, 0[$ ist keine diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$ (zum Beispiel ist $(-\frac{1}{2} - \frac{1}{n})_{n\geq 3}$ eine Folge in $X \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, die gegen $-\frac{1}{2} \in X$ konvergiert). Außerdem stimmt g auf X mit der holomorphen Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $h(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ überein. Nach dem Identitätssatz müsste also $g(z) = h(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten. Aber für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt $g(x) \neq h(x)$. (Das Beispiel der Funktion g zeigt auch, dass der Identitätssatz für reell differenzierbare Funktionen ebenfalls nicht gilt, selbst dann nicht, wenn diese unendlich oft differenzierbar sind.)

zu (e) Nein, auch eine solche holomorphe Funktion gibt es nicht. Da $]-1,1[$ keine diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist (was man wie bei den vorherigen Beispielen zeigt), kann aus dem Identitätssatz geschlossen werden, dass f auf ganz $\mathbb{C}$ mit der Nullfunktion übereinstimmt. Aber dies steht im Widerspruch zur Annahme $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $2 < x < 4$.

Aufgabe 1

zu (a) Wegen $|f(z)| > a$ gilt insbesondere $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir können also $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $g(z) = f(z)^{-1}$ definieren, und auch g ist dann eine ganze Funktion. Aus $|f(z)| > a$ folgt auch $|g(z)| < a^{-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Funktion g ist also auf $\mathbb{C}$ beschränkt. Aus dem Satz von Liouville folgt nun, dass g konstant ist, und damit ist auch f konstant.

zu (b) Nach dem Maximumsprinzip für stetige Funktionen auf kompakten Mengen nimmt die Einschränkung der Funktion $z \mapsto |f(z)|$ auf $\bar{B}_1(0)$ in einem Punkt $z_0 \in \bar{B}_1(0)$ ihr Maximum an. Da einerseits $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \partial B_1(0)$ gilt, andererseits aber $|f(0)| = 2 > 1$ gilt, muss $f(z_0) \geq 2$ sein und der Punkt z_0 somit in $B_1(0)$ liegen. Aus dem Maximumsprinzip der Funktionentheorie, angewendet auf das Gebiet $G = B_1(0)$, folgt nun, dass f auf G konstant ist. Da es sich bei G um eine nicht-diskrete Menge handelt, zeigt der Identitätssatz, dass f auf ganz $\mathbb{C}$ konstant ist.

Aufgabe 2

zu (a) Angenommen, f ist eine Funktion mit den angegebenen Eigenschaften. Weil f als holomorphe Funktion auch stetig ist, gilt wegen $\lim_n n^{-2020} = 0$ auch

$$f(0) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} f(n^{-2020}) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} 0 \quad = \quad 0.$$

Es gilt also $f|_{N \cap G} = 0$ für die Menge $N = \{n^{-2020} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Die Menge $N \cap G$ ist nicht-diskret, da in jeder Umgebung U von 0 unendlich viele Elemente dieser Menge liegen. Ist nämlich $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(0) \subseteq U \cap G$, dann gilt $n^{-2020} \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n^{-2020} < \varepsilon \Leftrightarrow n^{2020} > \varepsilon^{-1} \Leftrightarrow n > \varepsilon^{-1/2020}$. Durch Anwendung des Identitätssatzes erhalten wir $f = 0$ auf ganz G, im Widerspruch zur Annahme. Also existiert keine Funktion mit den angegebenen Eigenschaften.

zu (b) Angenommen, f ist eine holomorphe Funktion wie angegeben. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $\bar{B}_\varepsilon(0) \subseteq G$ gilt. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Potenzreihenentwicklung von f in einer Umgebung des Nullpunkts. Auf Grund des Satzes über die Potenzreihenentwicklung ist die Reihe auf $\bar{B}_\varepsilon(0)$ konvergent, für den Konvergenzradius ρ gilt also $\rho \geq \varepsilon$. Laut Vorlesung gilt außerdem $a_n = f^{(n)}(0)/(n!) = \frac{(n!)^2}{n!} = n!$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Aber wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (n+1) \quad = \quad +\infty$$

ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe gleich Null, im Widerspruch zu $\rho \geq \varepsilon$. Also existiert eine holomorphe Funktion mit den angegebenen Eigenschaften nicht.

zu (c) Wieder nehmen wir an, dass eine Funktion f wie angegeben existiert. Sei $g : G \to \mathbb{C}$ definiert durch $g(z) = 2z$ für alle $z \in G$. Dann gilt $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{n} = 2 \cdot \frac{1}{2n} = g(\frac{1}{2n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil f und g als holomorphe Funktionen beide stetig sind, gilt außerdem

$$f(0) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} f(\tfrac{1}{2n}) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \quad = \quad 0 \quad = \quad g(0).$$

Setzen wir also $N = \{0\} \cup \{\frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann stimmen f und g auf $N \cap G$ überein. Wie in Teil (a) überprüft man, dass $\frac{1}{2n}$ für hinreichend großes n in $N \cap G$ liegt und $N \cap G$ somit eine nichtdiskrete Menge ist. Der Identitätssatz zeigt also, dass f und g auf ganz G übereinstimmen.

Weil G offen ist und 0 in G liegt, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n} \in G$. Wegen $f = g$ müsste insbesondere $f(\frac{1}{2n-1}) = g(\frac{1}{2n-1}) = 2 \cdot \frac{1}{2n-1} = \frac{2}{2n-1}$ gelten. Aber dies widerspricht der Bedingung $f(\frac{1}{2n-1}) = f(\frac{1}{n})$ aus der Angabe. Also existiert eine solche Funktion f nicht.

Aufgabe 3

„$\Rightarrow$" Ist U zusammenhängend, dann handelt es sich bei U insgesamt um ein Gebiet. Seien nun f, g zwei holomorphe Funktionen mit $fg = 0$, und sei $N \subseteq U$ die Nullstellenmenge von f. Ist N nichtdiskret, dann können wir den Identitätssatz anwenden und erhalten $f = 0$. Ist $N = \varnothing$, dann gilt $f(z) \neq 0$ und $f(z)g(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und daraus folgt $g(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, also $g = 0$.

Betrachten wir nun noch den Fall, dass N diskret, aber nichtleer ist. Sei $z_0 \in N$ ein beliebiger Punkt. Weil die Menge diskret ist, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(z_0) \cap N = \{z_0\}$. Es gilt also $f(z) \neq 0$ für alle $z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$, wegen $f(z)g(z) = 0$ also $g(z) = 0$ für alle diese Punkte z. Die Menge $M = B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ ist offenbar nichtdiskret, denn beispielsweise ist $]z_0, z_0 + \varepsilon[$ in M enthalten, und in der Umgebung des Punktes $z_0 + \frac{1}{2}\varepsilon$ liegen unendlich viele weitere Punkte aus M, zum Beispiel alle $z_0 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Wir können erneut den Identitätssatz anwenden und erhalten $g = 0$ auf ganz G.

„$\Leftarrow$" Ist U nicht zusammenhängend, dann gibt es eine Zerlegung $U = U_1 \cup U_2$ in nichtleere, disjunkte offene Teilmengen U_1 und U_2. Definieren wir nun f und g durch $f(z) = 1$, $g(z) = 0$ für alle $z \in U_1$ und $f(z) = 0$, $g(z) = 1$ für alle $z \in U_2$. Weil $f|_{U_1}$ konstant ist, ist die Funktion f auf U_1 holomorph. Genauso zeigt man, dass f auf U_2 holomorph ist, insgesamt also auf ganz U. Aus denselben Gründen ist auch g eine holomorphe Funktion auf U. Offenbar gilt $fg = 0$ auf ganz U, aber weder $f = 0$ auf ganz U noch $g = 0$ auf ganz U.