Lösung Globalübungsblatt 10

Aufgabe 1

$G \subseteq \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet, $\bar{G} = G \cup \partial G$ topologischer
Abschluss von G, $f : \bar{G} \to \mathbb{C}$ stetig, auf G holomorph

ohne Beweis zu verwenden: $\bar{G}$ ist kompakt

[z.zg. $\bar{G}$ beschränkt und abgeschl., nach Heine-Borel

$\bar{G}$ ist die kleinste abg Teilmenge von $\mathbb{C}$, die G enthält,
also insb. abgeschlossen

G beschränkt $\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}^+$, so dass die abg
Kreisscheibe $\bar{B}_r(0)$ die Menge G enthält

$\bar{B}_r(0)$ abg., $\bar{B}_r(0) \supseteq G \Rightarrow \bar{B}_r(0) \supseteq \bar{G}$

stetig, auf G holomorph

ohne Beweis zu verwenden: $\overline{G}$ ist kompakt

[z.zg. $\overline{G}$ beschränkt und abgeschl. nach Heine-Borel

(da $\overline{G}$ kleinste abg. Teilm. $\supseteq G$) $\Rightarrow \overline{G}$ beschränkt]

zu (a) z.zg: $|f|$ nimmt ihr Maximum auf ∂G an

$\overline{G} \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, $|f|$ stetig (als Komposition der stetigen Abbildungen f und $z \mapsto |z|$). Maximumsprinzip für stetige Funktionen $\Rightarrow \exists\, a \in \overline{G}$, so dass $|f(a)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in \overline{G}$

Erinnerung Maximumsprinzip für holomorphe Fkt.

$G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph, $\exists$ lokales Maximum a von $z \mapsto |f(z)|$ auf G $\Rightarrow$ f ist konstant

1 Fall: f ist konstant. Dann gilt $|f(z)| = |f(a)|$ für alle $z \in \partial G$, d.h. das Maximum wird auch auf dem Rand angenommen

2. Fall: f ist nicht konstant

Ann: $a \notin \partial G$ (sonst fertig)

Dann liegt a in G. $f|G$ ist hol.,
Maximumsprinzip für hol. Fkt $\Rightarrow$
$f|G$ konstant

Sei $b \in \partial G \setminus G$. Nach Def. von ∂G
gibt es in jeder offenen Umg. von b
Punkte aus G, insb. in $B_{1/n}(b)$
für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\exists$ Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$
in G mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = b$.

Sei $c \in \mathbb{C}$ der konstante Wert von $f|_G$.

f stetig in $G \Rightarrow f(b) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) \underset{z_n \in G}{=} \lim_{n\to\infty} c = c$ also $\forall z \in \partial G: f(z) = c$

Also ist f auf ganz $\overline{G}$ konstant. ↯

$\Rightarrow$ Annahme war falsch, $a \in \partial G$

<u>zu (b)</u> z.zg: f hat eine Nullstelle in G, oder $|f|$ nimmt auf ∂G ihr Minimum an

<u>1. Fall</u>: f hat eine Nullstelle in $\overline{G}$

Liegt eine Nullstelle in G, dann ist nichts zu zeigen. Ansonsten gibt es eine Nullstelle auf ∂G. $\Rightarrow$ Betragsminimum wird auf dem Rand

Aufg

zu (a)

für

für

Lt.

läng

ist

an

=

angenommen (und ist gleich null)

2. Fall: f hat keine Nullstelle in $\overline{G}$

Dann ist $g : \overline{G} \to \mathbb{C}$ geg. durch $g(z) = f(z)^{-1}$
stetig auf $\overline{G}$, holomorph auf G. Teil (a) $\Rightarrow$
g nimmt Betragsmax. in einem Punkt $a \in \partial G$ an,
d.h. $|g(a)| \geq |g(z)| \ \forall z \in \overline{G} \Rightarrow |f(a)| \leq |f(z)|$
$\forall z \in \overline{G}$, d.h. a ist Betragsminimum von f. $\square$

$\Rightarrow$ stetig auf G, holomorph auf G. Teil (a) $\Rightarrow$

Aufgabe 2

zu (a) geg: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hol mit $f^{(n)}(0) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gesucht: $\int_{\partial B_r(1)} \frac{f(z)}{z-1}\,dz$ für jedes $r \in \mathbb{R}^+$

Lt. Vorlesung besitzt f eine Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ um 0 die auf ganz $\mathbb{C}$ gültig ist (insb. Konvergenzradius ∞) außerdem:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \; \forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a_0 = 0,\; a_n = \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} \; \forall n \geq 1 \Rightarrow$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$z_n \in G$ ... G. ... an ... nichts ... Nullstelle ... am Rand

$= z e^z$ Sei nun $r \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgeg.

Cauchysche Integralformel $\Rightarrow \int_{\partial B_r(1)} \frac{f(z)}{z-1}\,dz$

$= 2\pi i\, f(1) = 2\pi i\, e$

<u>zu (6)</u> Frage: Existiert eine hol. Fkt. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{2n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$?

Erinnerung Identitätssatz:

$G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f, g: G \to \mathbb{C}$ hol., $N \subseteq G$ nicht-diskret mit $f|_N = g|_N \Rightarrow f = g$

Ang., eine solche Fkt. f existiert.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{n}}$

zu (6) Frage: Existiert eine hol. Fkt. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\Rightarrow f$ stimmt auf $N = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $g: \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C}$,
$z \mapsto \frac{1}{2-z}$ überein

Setze $\tilde{N} = N \cup \{0\}$. Diese Menge ist nicht-diskret, da jede Umg. $B_\varepsilon(0)$ unendlich viele Elemente aus $\tilde{N}$ enthält (alle $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$). Da f und g in 0 stetig sind, gilt $f(0) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} g(\frac{1}{n}) = g(0)$
$\llcorner f_{|N} = g_{|N}$

also: $f|_{\tilde{N}} = g|_{\tilde{N}}$ Identitätssatz, angewendet auf $G = \mathbb{C} \setminus \{2\}$ und die Fkt. $f|_{\mathbb{C}\setminus\{2\}}$ und g $\Rightarrow$
$f(z) = g(z)$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$

Als hol. Funktion ist f insb. stetig, damit auch stetig auf $\overline{B}_1(2)$. Da diese Menge kompakt ist, ist $f|_{\overline{B}_1(2)}$ nach dem Maximumsprinzip beschränkt. Andererseits: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $2+\frac{1}{n} \in \overline{B}_1(2)$ und $f(2+\frac{1}{n}) =$

$$g\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2-(2+\frac{1}{n})} = -n \Rightarrow f|_{\overline{B}_1(2)} \text{ nicht beschränkt } \lightning \qquad \square$$

Also existiert ein f wie angeg. nicht.

Aufgabe 3

$a \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt von $M \subseteq \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ Jede Umg U von a enthält mind einen Punkt aus $M \setminus \{a\}$

$M \subseteq \mathbb{C}$ dicht $\Longleftrightarrow$ Jedes $a \in \mathbb{C}$ ist Häufungspunkt von M

zu (a) geg $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f, g : G \to \mathbb{C}$ hol. Fkt.

z.zg: Äquivalenz der Aussagen

(i) $f = g$

(ii) $f|M = g|M$ für eine Teilmenge $M \subseteq G$ mit (mind.) einem Häufungspunkt in G

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" Zu zeigen ist nur, dass G eine Teilmenge mit einem Häufungspunkt besitzt. Sei $a \in G$ bel. G offen $\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$: mit $B_\varepsilon(a) \subseteq G$. Die Menge $B_\varepsilon(a)$ hat a als Häufungspunkt, denn ist $\delta \in \mathbb{R}^+$ bel. vorgeg., dann enthält die Menge $B_\delta(a)$ Punkte ungleich a aus $B_\varepsilon(a)$, z.B einen bel gewählten Punkt aus $B_{\min(\delta,\varepsilon)}(a) \setminus \{a\}$.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Vor.: $\exists\, M \subseteq G$ mit einem Häufungspunkt $a \in G$ und $f|M = g|M$.

z.zg: $f = g$ Beh.: $\tilde{M} = M \cup \{a\}$ ist nicht-diskrete Teilmenge von G

Da a Häufungspunkt von M ist, gibt es in jeder Umg von a Punkte aus $M \setminus \{a\}$ also Punkte der Menge $\tilde{M}$ ungleich a ($\Rightarrow$ Beh)

A
a
$\Rightarrow$
$f($
Ang
$\Rightarrow f$
$B_r(a)$
Also

Beh.: $f(a) = g(a)$

Da a Häufungspunkt von M ist, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $z_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap M$

$\Rightarrow |z_n - a| < \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$

Da f und g als hol. Fkt stetig in a sind, folgt $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) \overset{f|_M = g|_M}{=}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} g(z_n) = g(a)$ $(\to$ Beh$)$

Insgesamt stimmen f und g also auf der nicht-diskreten Teilmenge $\tilde{M} \subseteq G$ überein.

Identitätssatz $\Rightarrow$ $f = g$

<u>zu (b)</u> geg $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nicht-konstant, holomorph

z.zg.: $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$ ist dicht

Ang. $f(\mathbb{C})$ ist nicht dicht. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{C}$, das kein Häufungspunkt von $f(\mathbb{C})$ ist.

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}^+$ mit $f(\mathbb{C}) \cap B_r(a) = \{a\}$ oder $f(\mathbb{C}) \cap B_r(a) = \emptyset$

Ang. $f(\mathbb{C}) \cap B_r(a) = \{a\}$ Satz von der Gebietstreue

$\Rightarrow f(\mathbb{C})$ ist Gebiet, insb. nichtleer und offen

$B_r(a)$ ebenfalls offen $\Rightarrow \{a\} \subseteq \mathbb{C}$ offen $\lightning$

Also bleibt nur die Möglichkeit $f(\mathbb{C}) \cap B_r(a) = \emptyset$

Also bleibt nur die Möglichkeit $f(\mathbb{C}) \cap B_r(a) = \emptyset$

$\Rightarrow f(z) \notin B_r(a) \ \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow |f(z) - a| > r \ \forall z \in \mathbb{C}$

Dann gilt insb. $f(z) - a \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow g(z) = \dfrac{1}{f(z)-a}$ ist hol. Fkt. auf ganz $\mathbb{C}$, außerdem beschränkt wg $|g(z)| = |f(z)-a|^{-1} < r^{-1}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ Liouville $\Rightarrow g$ ist konstant $\Rightarrow f$ ist konstant ↯ zur Vor. $\square$