Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Lösung Blatt 8 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Eine solche Reihe hat die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z+1)^n$, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ bezeichnet.

zu (b) Laut Vorlesung ist jede Funktion, die durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann, komplex differenzierbar. Die komplexe Konjugation ist laut Vorlesung zwar reell, aber nicht komplex differenzierbar. Denn die Zerlegung der komplexen Konjugation in Real- und Imaginärteil ist gegeben durch $\bar{z} = g(x+iy) + ih(x+iy)$ mit den Funktionen $g(x+iy) = x$ und $h(x+iy) = -y$. Damit gilt $\frac{\partial g}{\partial x}(x+iy) = 1 \neq -1 = \frac{\partial h}{\partial y}(x+iy)$, die Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen sind also nicht erfüllt. Also besitzt die komplexe Konjugation keine Darstellung als Potenzreihe.

Die Funktion $z \mapsto z^2$ kann als Potenzreihe dargestellt werden. Denn für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $(z-i)^2 = -1-2iz+z^2$, was zu $z^2 = (-1)+2i(z-i)+(z-i)^2$ umgestellt werden kann. Die Funktion besitzt also die Reihendarstellung $z^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$ mit $a_0 = -1$, $a_1 = 2i$, $a_2 = 1$ und $a_n = 0$ für alle $n \geq 3$.

zu (c) Aus der Bedingung $\lim_n a_n = i+1$ folgt $\lim_n |a_n| = \sqrt{2}$ und $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Dies zeigt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich 1 ist. Die Reihe ist also für $|z| < 1$ (sogar absolut) konvergent und für $|z| > 1$ divergent.

zu (d) Die Funktion unter dem Integralzeichen kommt durch Verknüpfung holomorpher Funktionen zu Stande, ist also selbst holomorph. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist das Kurvenintegral damit gleich null.

zu (e) Nein. Der Cauchysche Integralsatz gilt nur unter bestimmten Einschränkungen an den Definitionsbereich (konvex, sternförmig oder einfach zusammenhängend). Im vorliegenden Fall kann gezeigt werden, dass der Definitionsbereich nicht einfach zusammenhängend ist, deshalb steht das Ergebnis nicht im Widerspruch zum Cauchyschen Integralsatz.

Aufgabe 1

zu (a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass bei einer Funktion, die als Potenzreihe darstellbar ist, die komplexe Ableitung mit der formalen Ableitung der Potenzreihe berechnet werden kann. Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ die k-fache komplexe Ableitung existiert, und dass die k-te formale Ableitung der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-w)^n$ durch

$$f^{(k)}(z) \quad = \quad \sum_{n=k}^{\infty} \left(\prod_{\ell=n-k+1}^{n} \ell \right) a_n(z-w)^{n-k}$$

gegeben ist. Für $k = 0$ ist die Aussage wegen $\prod_{\ell=n+1}^{n} \ell = 1$ offensichtlich. Setzen wir die Aussage für k voraus. Da die Funktion $f^{(k)}$ durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann, ist sie komplex differenzierbar. Also existiert die $(k+1)$-fache komplexe Ableitung von f. Leiten wir die formel für die k-te formale Ableitung nochmals (formal) ab, so verschwindet der konstante Term $a_k(z-w)^{k-k}$, und wir erhalten

$$f^{(k+1)}(z) \quad = \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\prod_{\ell=n-k+1}^{n} \ell \right) a_n(n-k)(z-w)^{n-k-1} \quad = \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\prod_{\ell=n-k}^{n} \ell \right) a_n(n-k)(z-w)^{n-(k+1)}.$$

Setzen wir in die Formel für die k-te Ableitung den Entwicklungspunkt w ein, so verschwinden wegen $(z-w)^{n-k} = 0$ für alle $n > k$ alle Terme mit Ausnahme des konstanten, und es folgt $f^{(k)}(w) = \left(\prod_{\ell=k-k+1}^{k} \ell\right) a_k (z-w)^{k-k} = k! a_k$, was zu $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(w)$ umgeformt werden kann.

zu (b) Aus der Analysis einer Variablen ist bekannt, dass der *reelle* natürliche Logarithmus $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ die Stammfunktion $f(x) = x(\ln(x) - 1)$ besitzt. Definieren wir f auf dem gesamten Bereich $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ durch $f(z) = z(\ln(z) - 1)$, erhalten wir eine komplexe Stammfunktion des natürlichen Logarithmus. Denn laut Vorlesung gilt $\ln'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, und die Produktregel liefert $f'(z) = 1 \cdot (\ln(z) - 1) + z \cdot \frac{1}{z} = \ln(z) - 1 + 1 = \ln(z)$.

zu (c) Nach Teil (a) sind die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklungen durch die höheren Ableitungen fest vorgegeben. Es gilt $\ln'(z) = z^{-1}$, $\ln''(z) = -z^{-2}$, $\ln'''(z) = 2z^{-3}$, und durch vollständige Induktion überprüft man leicht, dass $\ln^{(n)}(z) = (-1)^{(n-1)}(n-1)! z^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zusammen mit $\ln(1) = 0$ und der Formel aus Teil (a) erhalten wir die Reihenentwicklung $\ln(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (z-1)^n$. Der n-te Koeffizient $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ ist jeweils vom Absolutbetrag $\frac{1}{n}$, und wegen $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$ folgt $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich 1, die Potenzreihenentwicklung also auf der offenen Kreisscheibe $B_1(1)$ gültig.

Für die komplexe Stammfunktion erhalten wir die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}
f(z) \quad &= \quad z(\ln(z) - 1) \quad = \quad (z-1)\ln(z) + \ln(z) - z \quad = \quad (z-1)\ln(z) + \ln(z) + (-1)(z-1) - 1 \\
&= \quad (z-1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{1}{n} (z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{1}{n} (z-1)^n + (-1) + (-1)(z-1) \\
&= \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{1}{n} (z-1)^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{1}{n} (z-1)^n + (-1) + (-1)(z-1) \\
&= \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \tfrac{1}{n-1} (z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{1}{n} (z-1)^n + (-1) + (-1)(z-1) \\
&= \quad (-1) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n} \right) (z-1)^n \quad = \quad (-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} (z-1)^n.
\end{aligned}$$

Auch diese Reihe ist vom Konvergenzradius 1, denn es gilt $\lim_n \sqrt[n]{n(n-1)} = \lim_n (\sqrt[n]{n})^2 \cdot \sqrt[n]{\frac{n-1}{n}} = 1^2 \cdot 1 = 1$. Bezeichnet b_n den n-ten Koeffizienten der Potenzreihe, also $b_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$, dann erhalten wir also $\lim_n \sqrt[n]{|b_n|} = 1$. Die angegebene Reihenentwicklung ist also ebenfalls auf $B_1(1)$ konvergent.

Aufgabe 2

zu (a) Wir bestimmen die Entwicklung durch Verwendung der geometrischen Reihe. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 3$ gilt $\left|-\frac{1}{3} z\right| < 1$ und somit

$$f(z) \quad = \quad \frac{z+2}{z-3} \quad = \quad (-\tfrac{1}{3})(z+2) \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z} \quad = \quad (-\tfrac{1}{3})(z+2) \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{3} z)^n \quad =$$

$$\begin{aligned}
(-\tfrac{1}{3})(z+2) \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} z^n \quad &= \quad (z+2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1) 3^{-(n+1)} z^n \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1) 3^{-(n+1)} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-2) 3^{-(n+1)} z^n \\
&= \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1) 3^{-n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-2) 3^{-(n+1)} z^n \quad = \quad (-\tfrac{2}{3}) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)(1 + \tfrac{2}{3}) 3^{-n} z^n \\
&= \quad (-\tfrac{2}{3}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)}{3^{n+1}} z^n \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n
\end{aligned}$$

mit $a_0 = -\frac{2}{3}$ und $a_n = \frac{(-5)}{3^{n+1}}$ für alle $n \geq 1$. Es gilt $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \left(\sqrt[n]{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-n}\right) = \lim_n \left(\sqrt[n]{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-1}\right) = 1 \cdot 3^{-1} = \frac{1}{3}$. Dies zeigt, dass der Konvergenzradius der Reihe gleich 3 ist.

zu (b) Wir berechnen zunächst eine Reihenentwicklung der Funktion G. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 2$ gilt

$$G(z) \quad = \quad -\frac{1}{z-2} \quad = \quad \frac{1}{2-z} \quad = \quad \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} \quad = \quad \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n \quad = \quad \sum_{n=0}^{n} 2^{-(n+1)} z^n.$$

Setzen wir $a_n = 2^{-(n+1)}$, so erhalten wir $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-1}\right) = \frac{1}{2}$. Der Konvergenzradius der Reihe ist also gleich 2. Wegen $g(z) = G'(z)$ erhalten wir eine Potenzreihenentwicklung von g durch formale Ableitung, d.h. es gilt

$$g(z) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-(n+1)} z^{n-1} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) 2^{-(n+2)} z^n.$$

Der Konvergenzradius bleibt bei Übergang zur formalen Ableitung erhalten, er ist also für die Darstellung von g ebenfalls gleich 2.

Aufgabe 3

zu (a) Laut Vorlesung ist der komplexe Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ die Umkehrfunktion der komplexe Exponentialfunktion. Deshalb gilt $e^{g(z)} = e^{(\ln \circ f)(z)} = (\exp \circ \ln \circ f)(z) = f(z)$ für alle $z \in G$. (Dieser Aufgabenteil ist in erster Linie als Hinweis für Teil (b) gedacht.)

zu (b) Laut Vorlesung kann jeder holomorphen Funktion h auf G und jedem $z_0 \in G$ eine komplexe Stammfunktion $H : G \to \mathbb{C}$ mit $H(z_0) = 0$ zugeordnet werden, die mit Hilfe komplexer Kurvenintegrale definiert wird. Die komplexe Ableitung der Funktion $H = \ln \circ f$ aus Teil (a) ist auf Grund der komplexen Kettenregel durch $H'(z) = \ln'(f(z)) \cdot f'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ gegeben. Es ist deshalb naheliegend, den soeben genannten Satz für einen beliebig gewählten Punkt $z_0 \in G$ auf die Funktion $h : G \to \mathbb{C}$ gegeben durch $h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ anzuwenden. Sei H die entsprechende komplexe Stammfunktion, und sei $c_0 \in \mathbb{C}$ mit $e^{c_0} = f(z_0)$. Definieren wir $g : G \to \mathbb{C}$ durch $g(z) = c_0 + H(z)$, dann zeigt die Rechnung

$$(f \cdot (\exp \circ (-g)))'(z) \quad = \quad f'(z)e^{-g(z)} + f(z) \cdot (\exp \circ (-g))'(z) \quad =$$
$$f'(z)e^{-g(z)} + f(z) \exp'((-g)(z)) \cdot (-g'(z)) \quad = \quad f'(z)e^{-g(z)} - f(z)e^{-g(z)} \cdot H'(z) \quad =$$
$$f'(z)e^{-g(z)} - f(z)e^{-g(z)} \frac{f'(z)}{f(z)} \quad = \quad f'(z)e^{-g(z)} - f'(z)e^{-g(z)} \quad ,$$

dass die Funktion $f \cdot (\exp \circ (-g))$ auf G konstant ist. Wegen $(f \cdot (\exp \circ (-g)))(z_0) = f(z_0) \cdot e^{-g(z_0)} = f(z_0) \cdot e^{-c_0} = f(z_0) \cdot f(z_0)^{-1}$ ist der konstante Wert gleich 1. Es gilt also $f(z)e^{-g(z)} = 1$ für alle $z \in G$, was zu $e^{g(z)} = f(z)$ umgestellt werden kann.