Lösung Globalübungsblatt 8

Aufgabe 1

Überprüfung der Gleichung $\frac{i}{2(z+i)} - \frac{i}{2(z-i)} = \frac{\frac{1}{2}i(z-i) - \frac{1}{2}i(z+i)}{(z+i)(z-i)} = \frac{\frac{1}{2}iz + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2}}{z^2+1} = \frac{1}{z^2+1}$

zu (a)

Prop. 2.8: $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, sternförmig bzgl. $a \in G$, $f: G \to \mathbb{C}$ stetig, holomorph auf $G \setminus \{a\}$

$\Rightarrow \exists$ komplexe Stammfkt. von f auf G (geg. durch $F(z) = \int_a^z f(w)\,dw$)

hier: $G = B_1(0)$ offene Kreisscheibe, ist konvex, somit insb. sternförmig

Wegen $|i| = |-i| = 1$ gilt $\pm i \notin B_1(0)$, somit ist f eine auf ganz G definierte holomorphe Fkt. $\Rightarrow$ Die Bed. von Prop. 2.8 sind erfüllt. $\Rightarrow$ f hat eine komplexe Stammfkt. auf $B_1(0)$

zu (b) Ang. f besitzt eine komplexe Stammfkt. auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.

Folgerung 2.10 $\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschl. Weg in $G = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.

Betrachte die geschlossene Kurve $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto i + \frac{1}{2}e^{it}$.

$\forall z \in G$: $f(z) = \frac{i}{2(z+i)} - \frac{i}{2(z-i)} \Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{i\,dz}{2(z+i)} - \int_\gamma \frac{i\,dz}{2(z-i)}$

Für alle $z \in \overline{B}_{\frac{1}{2}}(i)$ gilt $\operatorname{Im}(z) > 0$, denn $z \in \overline{B}_{\frac{1}{2}}(i) \Rightarrow \operatorname{Im}(z) \geq 1 - \frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow g(z) = \frac{i}{2(z+i)}$ ist holomorphe Fkt. auf $B_{\frac{1}{2}+\varepsilon}(i)$ für hinr. kleines ε

Cauchyscher Integralsatz, angew. auf das Gebiet $B_{\frac{1}{2}+\varepsilon}(i) \Rightarrow \int_\gamma \frac{i\,dz}{2(z+i)} = 0$

$$\int_\gamma \frac{i\,dz}{2(z-i)} = \int_0^{2\pi} \frac{i\,\gamma'(t)}{2(\gamma(t)-i)}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{i\,\frac{1}{2}\,i\,e^{it}}{2(i+\frac{1}{2}e^{it}-i)}\,dt = \int_0^{2\pi} \left(-\tfrac{1}{2}\right) dt = \left(-\tfrac{1}{2}\right) 2\pi = -\pi$$

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0 - (-\pi) = \pi \neq 0$ ↯ Also hat f keine komplexe Stammfkt. $\square$

<u>Aufgabe 2</u>

geom. Reihe: $\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{n=0}^\infty \alpha^n$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| < 1$

<u>zu (a)</u> $f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2} = \frac{(z-2)+3}{(z-2)^2} = \frac{1}{z-2} + \frac{3}{(z-2)^2}$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = \left(-\tfrac{1}{2}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{2}z} = \left(-\tfrac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^\infty \left(\tfrac{1}{2}z\right)^n = \sum_{n=0}^\infty (-1)\,2^{-(n+1)} z^n$$

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z-2}\right) = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^\infty 2^{-(n+1)} z^n\right) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-(n+1)}\, n\, z^{n-1} = \sum_{n=0}^\infty 2^{-(n+2)}(n+1) z^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^\infty 2^{-(n+2)}\big(3(n+1)-2\big) z^n = \sum_{n=0}^\infty 2^{-(n+2)}(3n+1) z^n$$

Sei $z \in \mathbb{C}^\times$ mit $|z| < 2$, setze $c_n := 2^{-(n+2)}(3n+1)z^n$. $\Rightarrow$

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 2^{-(n+3)}\cdot(3n+4)\,|z|^{n+1}\cdot 2^{n+2}\,\frac{1}{3n+1}\cdot|z|^{-n} = \frac{1}{2}\,\frac{3n+4}{3n+1}\cdot|z|$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{1}{2}|z| < 1$ Dieselbe Rechnung zeigt, dass $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ im Fall $|z| > 2$ größer als 1 ist. $\Rightarrow$ Reihe konvergiert für $|z| < 2$, divergiert für $|z| > 2$ $\Rightarrow$ Konvergenzradius ist 2

Potenzreihenentwicklung von $g(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$

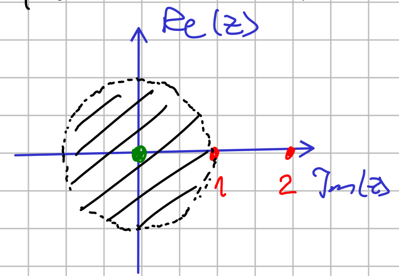
Ansatz: $\dfrac{a}{z-1} + \dfrac{b}{z-2} = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \quad a(z-2) + b(z-1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)z + (-2a-b) = 1$

Da dies für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}$ gelten soll, folgt $a+b=0$, $-2a-b=1$.

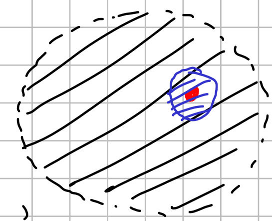
Einsetzen von $b=-a \Rightarrow -2a+a = 1 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a=-1$, $b=-a=1$

$\Rightarrow g(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$ s.o. $\dfrac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)\, 2^{-(n+1)} z^n$



$\dfrac{1}{z-1} = -\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) z^n \Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - 2^{-(n+1)}\right) z^n$

Sei $z \in \mathbb{C}^\times$, mit $|z|<1$, setze $c_n = \left(1-2^{-(n+1)}\right) z^n \quad \forall n$.



$\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \dfrac{1-2^{-(n+2)}}{1-2^{-(n+1)}} |z| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \dfrac{1-0}{1-0} |z| < 1$

Im Fall $|z|>1$ gilt $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1$. $\Rightarrow$ Reihe konvergiert für $|z|<1$, divergiert für $|z|>1$ $\Rightarrow$ Der Konvergenzradius ist gleich 1.

zu (b) Ansatz $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folge in $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(z+1)^3} = f(z+1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Es genügt somit, $\dfrac{1}{(z+1)^3}$ um den Nullpunkt zu entwickeln. Es gilt $\dfrac{d}{dz}\left(\left(-\tfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{(z+1)^2}\right) = \dfrac{1}{(z+1)^3}$

und $d\left(-\dfrac{1}{z+1}\right) = \dfrac{1}{(z+1)^2}$.

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z+1)^2} = d\left(-\frac{1}{z+1}\right) = d\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z+1)^3} = \frac{d}{dz}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(z+1)^2}\right) = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2}(n+1) z^n\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2} n (n+1) z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2}(n+1)(n+2) z^n$$

$\Rightarrow$ Ergebnis: $f(z) = \frac{1}{z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2}(n+1)(n+2)(z-1)^n$

Sei $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ mit $|z-1| < 1$ und $c_n = (-1)^n \frac{1}{2}(n+1)(n+2)(z-1)^n$. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)} |z-1| = \frac{n+\frac{3}{n}}{n+\frac{1}{n}} |z-1| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |z-1| < 1$$

Im Fall $|z-1| > 1$ gilt entsprechend $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1$.

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert für $|z-1| < 1$, divergiert für $|z-1| > 1$.

$\Rightarrow$ Konvergenzradius ist gleich 1

Aufgabe 3

zu (a) Erinnerung: Definition der n-ten Wurzelfunktion

$$\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_- \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{\frac{1}{n}\ln(z)}$$

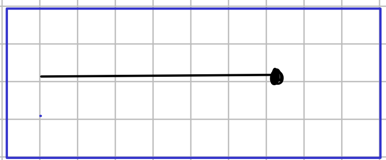
Sei $g: G \to \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus von f.

$\Rightarrow \quad e^{g(z)} = f(z) \quad \forall z \in G$

Definiere nun $h: G \to \mathbb{C}$ durch $h(z) = e^{\frac{1}{n} g(z)}$.

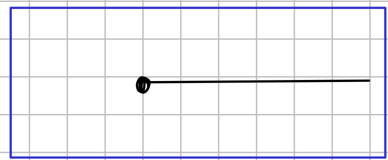
$\Rightarrow \quad h(z)^n = \left(e^{\frac{1}{n} g(z)}\right)^n = e^{g(z)} = f(z) \quad \forall z \in G$

zu (b)



$\ln(z)$

Beim Überqueren der negativen reellen Achse springt $\operatorname{Im} \ln(z)$ von π auf $-\pi$.



$g(z)$

Hier ist ein Sprung des Funktionswertes beim Überqueren der positiven reellen Achse zu erwarten.

$G = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $\quad g: G \to \mathbb{C}$ Zweig des Logarithmus $\Rightarrow \quad e^{g(z)} = z$

$\Rightarrow$ für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ gilt $\quad e^{g(z)} = z = e^{\ln(z)}$

Sei $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, schreibe $g(z) = a + ib$, $\quad \ln(z) = c + id$

$\Rightarrow \quad e^{a+ib} = e^{c+id} \Rightarrow e^a \cdot e^{ib} = e^c \cdot e^{id} \overset{|\cdot|}{\Rightarrow} e^a = e^c$

$\overset{\ln}{\Rightarrow} \quad a = c$ einsetzen $\Rightarrow e^{ib} = e^{id} \Rightarrow \cos(b) + i\sin(b) = \cos(d) + i\sin(d)$

$\Rightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z} : d = 2\pi i k + b$

Ergebnis: Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ existiert ein $k(z) \in \mathbb{Z}$ mit

$$g(z) = \ln(z) + 2\pi i\, k(z) \qquad (*)$$

Betrachte die Teilmengen $G_+, G_- \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ geg. durch $G_+ = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \}$ und $G_- = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) < 0 \}$. Diese sind konvex und somit insb. zusammenhängend. Sind nämlich $z, w \in G_+$ vorgeg., dann gilt $\operatorname{Im}(z), \operatorname{Im}(w) > 0$, somit $\operatorname{Im}((1-t)z + tw) = (1-t)\operatorname{Im}(z) + t\operatorname{Im}(w) > 0 \;\; \forall t \in [0,1]$, also $[z,w] \subseteq G_+$.
Genauso beweist man auch die Konvexität von G_-.
Mit g und $\ln$ ist wegen $(*)$ auch $k: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ eine stetige Funktion.
Das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Menge ist zusammenhängend. $\Rightarrow$ $k(G_+), k(G_-)$ sind zusammenhängende Mengen von $\mathbb{Z}$.
Die einzigen nichtleeren zshgd. Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind die einelementigen Teilmengen. Denn für jedes $l \in \mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z} \cap B_{\frac{1}{2}}(l) = \{l\}$, die Menge $\{l\}$ also relativ offen in $\mathbb{Z}$. Daraus folgt, dass <u>jede</u> Teilmenge von $\mathbb{Z}$ relativ offen in $\mathbb{Z}$ ist. Ist nun $A \subseteq \mathbb{Z}$ eine Teilmenge mit mehr als einem Element und $l \in A$, dann ist $A = \{l\} \cup (A \setminus \{l\})$ eine Zerlegung in zwei nichtleere, relativ offene Teilmengen. $\Rightarrow$ A nicht zusammenhängend.
Es gibt also $k_+, k_- \in \mathbb{Z}$ mit $k(G_+) = \{k_+\}$, $k(G_-) = \{k_-\}$, gleichbedeutend:

$$g(z) = \ln(z) + 2\pi i\, k_+ \quad \forall z \in G_+$$

$$g(z) = \ln(z) + 2\pi i\, k_- \quad \forall z \in G_-$$

Um zu sehen, welche Beziehung zwischen k_+ und k_- besteht, betrachten wir den Weg $\gamma : [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$.
Die Funktion g ist in -1 stetig, außerdem gilt $\ln(e^{it}) = it$ für alle $t \in [\frac{1}{2}\pi, \pi]$, $\ln(e^{it}) = i(t-2\pi)$ für alle $t \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

$$\Rightarrow \quad \pi i + 2\pi i k_+ = \lim_{t \to \pi^-} \ln(e^{it}) + 2\pi i k_+ = \lim_{t \to \pi^-} g(e^{it}) =$$

$$g(-1) = \lim_{t \to \pi^+} g(e^{it}) = \lim_{t \to \pi^+} \ln(e^{it}) + 2\pi i k_- = -\pi i + 2\pi i k_-$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi i(k_- - k_+) = 2\pi i \quad \Rightarrow \quad k_- = k_+ + 1$$

Setzen wir also $k := k_+$, dann gilt

$$g(z) = \ln(z) + 2\pi i k \qquad \forall z \in G_+$$

$$g(z) = \ln(z) + 2\pi i (k+1) \qquad \forall z \in G_- .$$

$\square$