

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Lösung Blatt 7 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Die Vorgabe $\arg(z) = \frac{1}{4}\pi$ zeigt an, dass z auf der Halbgeraden liegt, die zum positiven Teil der x -Achse einen Winkel von 45° an. Bei allen komplexen Zahlen auf dieser Halbgeraden stimmen Real- und Imaginärteil überein, d.h. es gilt $z = s(1+i)$ für ein $s \in \mathbb{R}^+$. Aus $1 = |z| = s|1+i| = \sqrt{2}s$ folgt $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Also ist $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ die gesuchte komplexe Zahl.

zu (b) Das Bild von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ unter der Bijektion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x+iy \mapsto (x,y)$ ist $\tilde{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Also ist dies der Definitionsbereich von $f_{\mathbb{R}}$. Für alle $z = x+iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{(-y)}{x^2+y^2}.$$

Somit ist $f_{\mathbb{R}} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f_{\mathbb{R}}(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$.

zu (c) Die Jacobi-Matrix erhält man durch Bildung der partiellen Ableitungen von $(f_{\mathbb{R}})_1$ und $(f_{\mathbb{R}})_2$. Sie ist in $(x,y) \in \tilde{U}$ gegeben durch

$$(f_{\mathbb{R}})'(z) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2-x^2 & 2xy \\ -2xy & y^2-x^2 \end{pmatrix}.$$

Dass f auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist, kann man daran erkennen, dass die beiden Diagonalterme übereinstimmen und die Terme abseits der Diagonalen entgegengesetztes Vorzeichen haben. (Mit anderen Worten, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind in jedem Punkt des Definitionsbereichs erfüllt.)

zu (d) Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ kann an der ersten Spalte der Jacobi-Matrix abgelesen werden: Der erste Eintrag der Spalte ist der Realteil, der zweite der Imaginärteil von f . Es gilt also

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+iy) = \frac{(y^2-x^2) + i \cdot 2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Aufgabe 1

zu (a) Nach Definition ist $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn die Nullfortsetzung $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ von f Lebesgue-integrierbar ist. Es gilt $(f_0)^+ = (f^+)_0$ und $(f_0)^- = (f^-)_0$, denn für $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ sind beide Seiten der Gleichung jeweils gleich null, und für $x \in A$ gilt jeweils $f_0(x) = f(x)$, also auch $(f_0)^+(x) = f^+(x) = (f^+)_0(x)$ und $(f_0)^-(x) = f^-(x) = (f^-)_0(x)$. Es genügt deshalb, die Aussage für $A = \mathbb{R}^n$ zu beweisen. Hier folgt die Aussage direkt aus Prop. 6.12 (ii). Denn auf Grund der Vektorraum-Eigenschaft von $\mathcal{L}_n$ sind mit f auch $-f$ und die Nullfunktion Lebesgue-integrierbar, und nach Prop. 6.12 (ii) somit auch $f^+ = f \vee 0$ und $f^- = (-f) \vee 0$. Sind umgekehrt f^+ und f^- Lebesgue-integrierbar, also in $\mathcal{L}_n$ enthalten, dann auf Grund der Vektorraum-Eigenschaft auch $f = f^+ - f^-$.

zu (b) Wäre $f \in \mathcal{L}_1$, dann nach Teil (a) auch die Funktion f^+ . Für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ gilt $f(x) = f^+(x)$, insbesondere stimmen f und f^+ für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf dem Intervall $[1, n]$ überein. Die charakteristische Funktion $\chi_{[1, n]}$ ist nach Satz 6.20 (i) auf $[1, n]$ Lebesgue-integrierbar, weil die konstante Funktion mit Wert 1 auf $[1, n]$ jeweils Riemann-integrierbar ist. Nach Prop. (6.12) (iv) ist $f\chi_{[1, n]}$ ebenfalls Lebesgue-integrierbar. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt die Äquivalenz

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2x^2 \geq \sqrt{1+x^4} \Leftrightarrow 4x^4 \geq 1+x^4 \Leftrightarrow 3x^4 \geq 1.$$

Die Rechnung zeigt, dass die erste Ungleichung für alle $x \geq 1$ erfüllt ist. Für das Lebesgue-Integral von f^+ erhalten wir nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}} f^+(x) dx \geq \int_{\mathbb{R}} (f\chi_{[1, n]})(x) dx = \int_1^n \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} \geq \frac{1}{2} \int_1^n \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} [\ln(x)]_1^n = \frac{1}{2} \ln(n).$$

Aber wegen $\lim_n \ln(n) = +\infty$ steht dies im Widerspruch zur Lebesgue-Integrierbarkeit der Funktion. Also ist auch f nicht Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 2

zu (a) Seien $z, w \in \mathbb{C}^\times$ und $\alpha = \arg(z)$, $\beta = \arg(w)$, $\gamma = \arg(zw)$. Dann gilt $z = |z|(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$, $w = |w|(\cos(\beta) + i \sin(\beta))$ und $zw = |zw|(\cos(\gamma) + i \sin(\gamma))$ nach Definition der Polarkoordinaten. Mit Hilfe der Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} |zw|(\cos(\gamma) + i \sin(\gamma)) &= zw = (|z|(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))) (|w|(\cos(\beta) + i \sin(\beta))) \\ &= |zw|(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))(\cos(\beta) + i \sin(\beta)) \\ &= |zw|(\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) + i \sin(\alpha) \cos(\beta) + i \cos(\beta) \sin(\alpha)) \\ &= |zw|(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

Es folgt $\cos(\gamma) = \cos(\alpha + \beta)$ und $\sin(\gamma) = \sin(\alpha + \beta)$. Allgemein stimmen Sinus und Kosinus von zwei Winkeln φ, φ' nur dann überein, wenn sie sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden. Damit erhalten wir $\gamma \equiv \alpha + \beta \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$.

zu (b) Es gilt $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ und

$$1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \right),$$

also $\arg(1+i) = \frac{1}{4}\pi$. Genauso erhalten wir durch

$$\begin{aligned} 1-i &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) - i \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(-\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) \right) \end{aligned}$$

den Wert $\arg(1-i) = \frac{7}{4}\pi$. Schließlich ist $|\frac{1+i}{1-i}| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$. Zur Berechnung des Arguments setzen wir $\alpha = \arg(\frac{1+i}{1-i})$. Aus $\alpha(1-i) = 1+i$ folgt nach Teil (a), dass

$$\arg(\alpha) + \arg(1-i) \equiv \arg(1+i) \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$$

gilt, also $\arg(\alpha) \equiv \arg(1+i) - \arg(1-i) = \frac{1}{4}\pi - \frac{7}{4}\pi = -\frac{3}{2}\pi$. Weil $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl im Intervall $[0, 2\pi[$ mit $\varphi \equiv \frac{1}{2}\pi \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$ ist, folgt $\arg(\alpha) = \frac{1}{2}\pi$.

zu (c) Sei $w_1 \in \mathbb{C}^\times$ eine komplexe Zahl mit $w_1^2 = 1+i$. Dann ist $w_2 = -w_1$ die zweite komplexe Zahl mit $w_2^2 = 1+i$. Setzen wir $\alpha_i = \arg(w_i)$ für $i = 1, 2$, dann gilt wegen $w_i \cdot w_i = 1+i$ nach Teil (a)

$$2\alpha_i = \alpha_i + \alpha_i \equiv \arg(1+i) = \frac{1}{4}\pi \pmod{2\pi\mathbb{Z}}.$$

Es gibt also $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $2\alpha_i - \frac{1}{4}\pi = 2k_i\pi$, also $\alpha_i - \frac{1}{8}\pi = k_i\pi$. Nun existieren genau zwei reelle Zahlen $\varphi \in [0, 2\pi[$ mit der Eigenschaft, dass $\varphi - \frac{1}{8}\pi$ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist, nämlich $\frac{1}{8}\pi$ und $\frac{9}{8}\pi$. Nach eventueller Vertauschung von w_1 und w_2 gilt also $\alpha_1 = \arg(w_1) = \frac{1}{8}\pi$ und $\alpha_2 = \arg(w_2) = \frac{9}{8}\pi$.

Aufgabe 3

zu (a) Die Wirtinger-Ableitungen von f sind gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(z) + \frac{\partial h}{\partial y}(z) \right) + \frac{1}{2}i \left(\frac{\partial h}{\partial x}(z) - \frac{\partial g}{\partial y}(z) \right)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(z) - \frac{\partial h}{\partial y}(z) \right) + \frac{1}{2}i \left(\frac{\partial h}{\partial x}(z) + \frac{\partial g}{\partial y}(z) \right)$$

Die Antiholomorphie von f im Punkt z ist also äquivalent zu

$$\frac{\partial g}{\partial x}(z) + \frac{\partial h}{\partial y}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial y}(z) = -\frac{\partial g}{\partial x}(z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial x}(z) - \frac{\partial g}{\partial y}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(z) = \frac{\partial g}{\partial y}(z)$$

und die Holomorphie im Punkt z zu

$$\frac{\partial g}{\partial x}(z) - \frac{\partial h}{\partial y}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial y}(z) = \frac{\partial g}{\partial x}(z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial x}(z) + \frac{\partial g}{\partial y}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(z) = -\frac{\partial g}{\partial y}(z).$$

Ist nun f auf ganz $\mathbb{C}$ sowohl antiholomorph als auch holomorph, dann gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(z) = \frac{\partial g}{\partial y}(z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial x}(z) = -\frac{\partial g}{\partial y}(z)$$

also $\frac{\partial h}{\partial x}(z) = 0$. Ebenso gilt

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

und somit $\frac{\partial h}{\partial y}(z) = 0$. Aus $\frac{\partial h}{\partial x}(z) = \frac{\partial h}{\partial y}(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt, dass h auf $\mathbb{C}$ konstant ist. Der Nachweis der Konstanz von g läuft vollkommen analog. Insgesamt ist also die Funktion f auf ganz $\mathbb{C}$ konstant.

zu (b) Seien $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ der Real- und Imaginärteil von $f \circ \iota$, also $(f \circ \iota)(z) = \tilde{g}(z) + i\tilde{h}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Auf Grund der mehrdimensionalen Kettenregel ist die Ableitung der Funktion $f \circ \iota$ in einem beliebigen Punkt $z \in \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(z) & \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}(z) & \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y}(z) \end{pmatrix} &= (f \circ \iota)'(z) = f'(\iota(z)) \circ \iota'(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{z}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{z}) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{z}) & \frac{\partial h}{\partial y}(\bar{z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{z}) & -\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{z}) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{z}) & -\frac{\partial h}{\partial y}(\bar{z}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Funktion f ist nun auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, wenn für alle $z \in \mathbb{C}$ jeweils

$$\frac{\partial h}{\partial y}(\bar{z}) = \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{z}) \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{z}) = -\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{z}).$$

gilt. Auf Grund der soeben bewiesenen Gleichung ist dies wiederum äquivalent zu

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial y}(z) = -\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(z) \quad , \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}(z) = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, also zur Holomorphie der Funktion $f \circ \iota$.