Lösung Globalübungsblatt 7

Aufgabe 1

Erinnerung: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Fkt.

Die Fkt. f ist in $p \in U$ komplex diff'bar, wenn die Richtungsabl. $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ in p existieren und stetig sind auf U und zusätzlich die Cauchy-Riemannschen DGL $\frac{\partial g}{\partial x}(p) = \frac{\partial h}{\partial y}(p)$ und und $\frac{\partial g}{\partial y}(p) = -\frac{\partial h}{\partial x}(p)$ erfüllt sein, wobei $f = g + ih$ die Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil ist.

zu (a) (i) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z\,\mathrm{Re}(z)$

$f(x+iy) = (x+iy)x = x^2 + i(xy) \Rightarrow f = g + ih$ mit

$g(x+iy) = x^2$, $h(x+iy) = xy$

Richtungsableitungen: $\frac{\partial g}{\partial x}(x+iy) = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x+iy) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x+iy) = y$

und $\frac{\partial h}{\partial y}(x+iy) = x$ alle Richtungsabl. stetig auf ganz $\mathbb{C}$ (als Polynomfkt.) $\Rightarrow$ f ist auf ganz $\mathbb{C}$ reell diff'bar

Für jedes $z = x+iy \in \mathbb{C}$ gilt die Äquivalenz

f komplex diff'bar in $z \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(z) = \frac{\partial h}{\partial y}(z)$ und $\frac{\partial g}{\partial y}(z) = -\frac{\partial h}{\partial x}(z)$

$\Leftrightarrow 2x = x$ und $0 = -y \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Also ist 0 der einzige Punkt, in dem f komplex diff'bar ist.

zu (a) (ii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto |z|^2$

$g(x+iy) = |x+iy|^2 = x^2+y^2 \Rightarrow f = g + ih$ mit $g(x+iy) = x^2+y^2$,
$h(x+iy) = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(x+iy) = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x+iy) = 2y$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x+iy) = \frac{\partial h}{\partial y}(x+iy) = 0$

Auch hier sind alle Richtungsableitungen Polynomfunktionen und somit stetig.

$\Rightarrow$ f ist auf ganz $\mathbb{C}$ reell differenzierbar

Für alle $z = x+iy \in \mathbb{C}$ gilt die Äquivalenz f ist in z komplex diff'bar

$\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(z) = \frac{\partial h}{\partial y}(z)$ und $\frac{\partial g}{\partial y}(z) = -\frac{\partial h}{\partial x}(z) \Leftrightarrow 2x = 0$ und $2y = 0 \Leftrightarrow$

$x = y = 0 \Leftrightarrow z = 0$. Also ist der einzige Punkt, in dem f komplex diff'bar ist, der Nullpunkt.

zu (a) (iii) $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$

$f(x+iy) = |z|^{-1}(x+iy) \Rightarrow f = g + ih$ mit $g(x+iy) = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$h(x+iy) = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(x+iy) := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$

$\frac{1 \cdot \sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, ebenso

$\frac{\partial g}{\partial y}(x+iy) = \frac{\partial h}{\partial x}(x+iy) = -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial h}{\partial y}(x+iy) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

Alle Richtungsableitungen sind auf $\mathbb{C}^*$ stetig, da sie durch Verknüpfung stetiger Fkt. (u.a. der Wurzelfunktion) zu Stande kommen. $\Rightarrow$ f ist auf $\mathbb{C}^*$ reell diff'bar

Für jeden Punkt $z = x+iy \in \mathbb{C}^*$ gilt die Äquivalenz

f ist in z komplex diff'bar $\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(z) = \frac{\partial h}{\partial y}(z)$ und $\frac{\partial g}{\partial y}(z) = -\frac{\partial h}{\partial x}(z)$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ und $-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \Leftrightarrow y^2 = x^2$ und $-xy = xy$

$\Leftrightarrow (y-x)(y+x) = 0$ und $xy = 0 \Leftrightarrow (y = x$ oder $y = -x)$ und $(x = 0$ oder $y = 0) \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Wegen $0 \notin \mathbb{C}^\times$ ist f nirgends komplex diff'bar

<u>zu (b)</u> zeige: Cauchy-Riemannsche DGL sind im Nullpunkt erfüllt.

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sqrt{|\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)|}$ $\quad f(x+iy) = \sqrt{|xy|} \Rightarrow f = g + ih$

mit $g(x+iy) = \sqrt{|xy|}$, $h(x+iy) = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0) = 0$

Für die Berechnung der Richtungsabl. von g verwenden wir die Hilfsfunktionen $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ geg. durch $\phi(t) = t$, $\psi(t) = it$.

$(g \circ \phi)(t) = g(t) = g(t + i \cdot 0) = \sqrt{|t \cdot 0|} = 0 \;\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(0) = (g \circ \phi)'(0) = 0$

$(g \circ \psi)(t) = g(it) = g(0 + it) = \sqrt{|0 \cdot t|} = 0 \;\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(0) = (g \circ \psi)'(0) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(0) = 0 = \frac{\partial h}{\partial y}(0)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(0) = 0 = -\frac{\partial h}{\partial x}(0) \Rightarrow$ CR-DGL sind im Nullpunkt erfüllt

zeige nun: $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$ ist im Nullpunkt nicht komplex diff'bar

<u>1. Möglichkeit:</u> Zeige, dass der komplexe Differenzialquotient keinen Grenzwert hat

zu zeigen also:

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} \sqrt{|\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)|} \text{ existiert nicht in } \mathbb{C}$$

Ang., der Grenzwert existiert und ist gleich $c \in \mathbb{C}$. Für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ muss dann $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \sqrt{|\operatorname{Re}(z_n)\operatorname{Im}(z_n)|} = c$ gelten.

Betrachte die Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n')_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch $z_n = \frac{1}{n}(1+i)$, $z_n' = \frac{1}{n}(1-i)$.

$\lim z_n = 0 \Rightarrow c = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n}\sqrt{|\operatorname{Re}(z_n)\operatorname{Im}(z_n)|} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+i}\sqrt{|\operatorname{Re}(\frac{1}{n}(1+i))\operatorname{Im}(\frac{1}{n}(1+i))|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+i}\sqrt{\frac{1}{n^2}|\operatorname{Re}(1+i)\operatorname{Im}(1+i)|}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{1+i}\cdot\frac{1}{\cancel{n}} = \frac{1}{1+i}$

$\lim z_n' = 0 \Rightarrow c = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n'}\sqrt{|\operatorname{Re}(z_n')\operatorname{Im}(z_n')|} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1-i}\sqrt{|\operatorname{Re}(\frac{1}{n}(1-i))\operatorname{Im}(\frac{1}{n}(1-i))|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1-i}\sqrt{\frac{1}{n^2}|\operatorname{Re}(1-i)\operatorname{Im}(1-i)|}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{1-i}\cdot\frac{1}{\cancel{n}} = \frac{1}{1-i} \Rightarrow \frac{1}{1+i} = c = \frac{1}{1-i}$ $\lightning$

Also existiert der Grenzwert nicht.

<u>2. Möglichkeit</u>: Zeige, dass f im Nullpunkt nicht reell diff'bar (= total diff'bar) ist.

Wäre dies der Fall, dann wäre auch $g = \operatorname{Re}(f)$ im Nullpunkt total diff'bar. Insb. müsste dann auch die Richtungsableitung für den Vektor $v = 1+i$ existieren. Sei $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ geg. durch $\phi(t) = (1+i)t$. $\Rightarrow$

$(g\circ\phi)(t) = g((1+i)t) = \sqrt{|\operatorname{Re}((1+i)t)\operatorname{Im}((1+i)t)|} = \sqrt{|t^2|} = |t|.$

Würde die Richtungsableitung $\partial_{1+i} f(0)$, dann müsste $g \circ \phi$ im Nullpunkt differenzierbar sein. Aber die Betragsfunktion ist bekanntlich im Nullpunkt nicht differenzierbar.

<u>Aufgabe 2</u> geg.: eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

<u>zu (a)</u> z.zg.: $\mathrm{Re}(f)$ ist konstant $\Rightarrow$ f ist konstant

Sei $f = g + ih$ die Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil.

Nach Vor. ist g konstant. $\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$

Cauchy-Riem. DGL $\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} = -0 = 0$

Da f holomorph ist, ist h auf $\mathbb{C}$ total diff'bar. Weil die beiden Richtungsableitungen von h gleich null ist, ist die totale Ableitung von h konstant null. Somit ist h konstant.

Mit $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f) = h$ ist auch f selbst konstant.

<u>zu (b)</u> z.zg.: $\mathrm{Im}(f)$ ist konstant $\Rightarrow$ f ist konstant

Sei $f = g + ih$ die Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil.

Nach Vor. ist h konstant. $\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = 0$

Cauchy-Riem. DGL $\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x} = 0$

Da f holomorph ist, ist g auf $\mathbb{C}$ total diff'bar. Weil die beiden

Richtungsableitungen von g gleich null ist, ist die totale Ablei-
tung von g konstant null. Somit ist g konstant.
Mit $\mathrm{Im}(f)$ und $\mathrm{Re}(f) = g$ ist auch f selbst konstant.

<u>zu (c)</u> z.zg.: $|f|$ ist konstant $\Rightarrow$ f ist konstant

Sei $f = g + ih$ die Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil.
Mit $|f|$ ist auch $|f|^2 = g^2 + h^2$ konstant. $\Rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial x}(g^2+h^2) = \frac{\partial}{\partial y}(g^2+h^2) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} g + \frac{\partial h}{\partial x} h = \frac{\partial g}{\partial y} g + \frac{\partial h}{\partial y} h = 0 \qquad \text{CR-DGL} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} g - \frac{\partial g}{\partial y} h = \frac{\partial g}{\partial y} g + \frac{\partial g}{\partial x} h = 0 \quad \overset{\text{Quadrieren}}{\Rightarrow}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 g^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 h^2 - 2\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} gh = 0$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 h^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) g^2 + 2\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} gh = 0 \qquad \text{Addition der Gleichungen} \Rightarrow$$

$$\left(\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2\right)(g^2+h^2) = 0 \quad (*)$$

1. Fall: Der konstante Wert von g^2+h^2 ist null. $\Rightarrow$ $g = h = 0$ $\Rightarrow$ $f = 0$ $\Rightarrow$ f ist konstant
2. Fall: Der Wert ist ungleich null. $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$

Da f holomorph ist, ist g auf $\mathbb{C}$ total diff'bar. Weil die beiden Richtungsableitungen von g gleich null ist, ist die totale Ablei-
tung von g konstant null. Somit ist g konstant.
Nach Teil (a) ist damit auch f konstant. $\square$

Aufgabe 3

zu (a) Aus technischen Gründen betrachten wir die Funktionen f_n auf $\mathbb{R}_+$ an Stelle von $\mathbb{R}^+$. Im Hinblick auf die Lebesgue-Integrierbarkeit macht das keinen Unterschied, weil sich $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}_+$ nur um die Nullmenge $\{0\}$ unterscheiden. Zunächst beweisen wir die Lebesgue-Integrierbarkeit von $f_0(x) = e^{-x}$ auf $\mathbb{R}_+$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $f_0|_{[0,m]}$ als stetige Funktion Riemann- und damit auch Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_0^m f_0(x)\,dx \quad = \quad \int_0^m e^{-x}\,dx \quad = \quad \left[-e^{-x}\right]_0^m \quad = \quad (1-e^{-m}).$$

Die Lebesgue-Intgrierbarkeit von $f_0|_{[0,m]}$ ist gleichbedeutend mit der Lebesgue-Integrierbarkeit von $f_0 \cdot \chi_{[0,m]}$ auf ganz $\mathbb{R}$, und die Integrale stimmen überein. Die Funktionenfolge $(f_0 \cdot \chi_{[0,m]})_{m\in\mathbb{N}}$ ist offenbar monoton wachsend, sie konvergiert auf $\mathbb{R}_+$ punktweise gegen f_0, und die Folge $(1-e^{-m})_{m\in\mathbb{N}}$ der Integrale ist nach oben durch 1 beschränkt. Daraus folgt nach dem Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz die Lebesgue-Integrierbarkeit von f_0, und der Wert des Integrals ist gegeben durch

$$\int_0^{+\infty} f_0(x) \quad = \quad \lim_m (1-e^{-m}) \quad = \quad 1.$$

Nun beweisen wir die Lebesgue-Integrierbarkeit von f_n auf $\mathbb{R}_+$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$, wobei der Induktionsanfang bereits erledigt ist. Wie der Beweis der Induktionsanfang zeigt, genügt es jeweils zu überprüfen, dass die Folge der Integrale $\int_0^m f_n(x)\,dx$ mit $m \in \mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist. Sei nun $n \in \mathbb{N}$, und setzen wir die Aussage für $n-1$ voraus. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit partieller Integration jeweils

$$\int_0^m f_n(x)\,dx \quad = \quad \int_0^m x^n e^{-x}\,dx \quad = \quad \left[-x^n e^{-x}\right]_0^m + n\int_0^m x^{n-1}e^{-x}\,dx \quad = \quad m^n e^{-m} + n\int_0^m x^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind die Integrale $\int_0^m x^{n-1}e^{-x}\,dx$ mit $m \in \mathbb{N}$ nach oben beschränkt. Aus der Analysis einer Variablen ist bekannt, dass $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gleich 0 ist. Dies zeigt, dass auch die Folge $(m^n e^{-m})_{m\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist. Insgesamt ist damit die Aussage für n bewiesen.

zu (b) Sei $s \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Es genügt zu zeigen, dass $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx$ und $\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$ als Lebesgue-Integrale existieren, denn die Summe der Nullfortsetzung von $]0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{s-1}e^{-x}$ ud der Nullfortsetzung derselben Funktion auf $[1,+\infty[$ ist die Nullfortsetzung von $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{s-1}e^{-x}$, und die Summe zweier Lebesgue-integrierbarer Funktionen ist wiederum Lebesgue-integrierbar.

Für die Lebesgue-Integrierbarkeit von $x \mapsto x^{s-1}e^{-x}$ auf $[1,+\infty[$ reicht es wiederum zu überprüfen, dass die Folge der Integrale $\int_1^m x^{s-1}e^{-x}\,dx$ mit $m \in \mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist. Dies wiederum ergibt sich direkt aus Teil (a). Ist nämlich $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq s-1$, dann gilt $\int_1^m x^{s-1}e^{-x}\,dx \leq \int_0^m x^n e^{-x}\,dx$.

Für die Lebesgue-Integrierbarkeit von $x \mapsto x^{s-1}e^{-x}$ auf $]0,1]$ wiederum genügt es zu überprüfen, dass die Folge der Integrale $\int_{[\frac{1}{m},1]}^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx$ für $m \in \mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist. Dies ist tatsächlich der Fall, denn es gilt

$$\int_{[\frac{1}{m},1]}^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx \quad \leq \quad \int_{1/m}^1 x^{s-1}\,dx \quad = \quad \left[\frac{x^s}{s}\right]_{1/m}^1 \quad = \quad \frac{1}{s}(1-m^{-s}) \quad \leq \quad \frac{1}{s}\ .$$

zu (c) Sei $s \in \mathbb{R}^+$ und $m \in \mathbb{N}$. Auf Grund der Substitutionsregel gilt jeweils

$$\int_{1/m}^{m} x^{s-1} e^{-tx}\, dx \quad = \quad t^{-s} \int_{1/m}^{m} t \cdot (tx)^{s-1} e^{-tx}\, dx \quad = \quad t^{-s} \int_{1/(tm)}^{tm} x^{s-1} e^{-x}\, dx.$$

Die Folge der Funktionen $x \mapsto x^{s-1} e^{-tx} \chi_{[1/m,m]}$ auf $\mathbb{R}$ konvergiert punktweise und monoton wachsend gegen die Nullfortsetzung der Funktion $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{s-1} e^{-tx}$. Auf Grund der Lebesgue-Integrierbarkeit von $x \mapsto x^{s-1} e^{-x}$ und der soeben bewiesenen Gleichung ist die Folge der Integrale durch $t^{-s}\Gamma(s) = t^{-s} \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx$ beschränkt. Nach dem Satz von Beppo Levi ist $x \mapsto x^{s-1} e^{-tx}$ damit auf $\mathbb{R}^+$ Lebesgue-integrierbar, und es ist

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-tx}\, dx \quad = \quad \lim_m \int_{1/m}^{m} x^{s-1} e^{-tx}\, dx \quad = \quad \lim_m t^{-s} \int_{1/(mt)}^{mt} x^{s-1} e^{-x}\, dx \quad = \quad t^{-s}\Gamma(s).$$

zu (d) Die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^{s-1} e^{-tx}$ unter dem Integralzeichen nach t liefert die Funktion $x \mapsto x^{s-1} \cdot (-x) \cdot e^{-tx} = -x^s e^{-tx}$, und das Integral ist gleich $-\Gamma(s+1)$. Nach Teil (c) ist $x \mapsto x^s e^{-tx}$ Lebesgue-integrierbar und der Satz über die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration somit anwendbar. Nun ist einerseits

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-s}\Gamma(s)\right) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-tx}\, dx\right) \quad = \quad \int_0^{+\infty} (-x^s) e^{-tx}\, dx \quad = \quad -t^{-s-1}\Gamma(s+1) \quad ,$$

andererseits aber auch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-s}\Gamma(s)\right) \quad &= \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-s}\right)\Gamma(s) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-s\ln(t)}\right)\Gamma(s) \\ &= \quad -\frac{s}{t} e^{-s\ln(t)}\Gamma(s) \quad = \quad -\frac{s}{t} t^{-s}\Gamma(s) \quad = \quad -st^{-s-1}\Gamma(s). \end{aligned}$$

Es folgt $-t^{-s-1}\Gamma(s+1) = -st^{-s-1}\Gamma(s)$, was durch Einsetzen von $t = 1$ die Gleichung $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ liefert.

Wie wir in Teil (a) bereits nachgerechnet haben, ist $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} = 1 = 0!$. Setzen wir nun die Gleichung $\Gamma(n+1) = n!$ für ein $n \in \mathbb{N}$ voraus, dann folgt $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$.