Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 6 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a) Sei zunächst $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Einschränkung der Funktion f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben durch $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ ist stetig, da sie durch Verknüpfung der stetigen Funktionen $x \mapsto \sin(x)$ und $x \mapsto x$ zu Stande kommt. Daraus folgt auch die Stetigkeit der Funktion f im Punkt x_0 . Ist nämlich $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = x_0$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < |x_0|$ für alle $n \geq N$. Für diese n gilt dann insbesondere $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und auf Grund der Stetigkeit von $f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ folgt

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n (f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}})(x_n) = (f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}})(x_0) = f(x_0).$$

Die Stetigkeit von f im Nullpunkt ist gleichbedeutend damit, dass der Funktionsgrenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert und mit $f(0) = 1$ übereinstimmt. Dies wiederum folgt aus der Differenzierbarkeit der Sinusfunktion im Nullpunkt, denn es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \cos'(0) = 1 = f(0).$$

(Alternativ kann man die Aussage über den Funktionsgrenzwert auch aus der l'Hospitalschen Regel ableiten, was aber fast auf dasselbe hinausläuft.)

zu (b) Auf Grund der Reihenentwicklung der Sinusfunktion gilt für alle $x \neq 0$ jeweils

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Diese Potenzreihe besitzt einen unendlichen Konvergenzradius. Ist nämlich $x \neq 0$ vorgegeben und setzen wir $a_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, dann gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{|x|^{2n}} = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} \leq \frac{|x|^2}{n^2},$$

und aus $\lim_n \frac{|x|^2}{n^2} = 0$ folgt $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$. Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe also in x (sogar absolut) konvergent. Durch die Reihe wird die Funktion f nicht nur auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sondern auch im Nullpunkt dargestellt, weil der konstante Term $(-1)^0 \frac{x^{2 \cdot 0}}{(2 \cdot 0 + 1)!}$ der Reihe gleich 1 ist.

zu (c) Wir betrachten die Potenzreihe F , die durch gliedweise Integration der Potenzreihe f zu Stande kommt, also

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

Auch hier überprüft man leicht mit Hilfe des Quotientenkriteriums, dass der Konvergenzradius der Reihe unendlich ist. Ist nämlich $x \neq 0$ und setzen wir $a_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)(2n+1)!}{|x|^{2n+1}} = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} \cdot \frac{2n+1}{2n+3}.$$

Wegen $\frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} \leq \frac{|x|^2}{n^2}$ gilt $\lim_n \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0$, und für den zweiten Faktor gilt $\lim_n \frac{2n+1}{2n+3} = \lim_n \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{3}{2n}} = 1$. Daraus folgt $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, was zeigt, dass die Potenzreihe in x absolut konvergiert.

Sei nun $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches abgeschlossenes Intervall (mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Wir begründen mit Hilfe des Satzes von Lebesgue, dass $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ gilt. Dazu definieren wir $f_m = \sum_{k=0}^m \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Als stetige Funktion auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall ist $f_m|_{[a,b]}$ Riemann-integrierbar, damit auch Lebesgue-integrierbar. Außerdem konvergiert die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ punktweise gegen f , weil die Funktion f durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ dargestellt wird. Desweiteren gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$|f_m(x)| \leq \sum_{k=0}^m \frac{|x|^{2k}}{(2k+1)!} \leq \sum_{k=0}^m \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^m}{m!} = \exp(|x|).$$

Die Funktion $x \mapsto \exp(|x|)$ ist auf $[a, b]$ stetig, somit Riemann- und damit auch Lebesgue-integrierbar. Insgesamt sind damit alle Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue erfüllt, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f_m(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \left(\sum_{k=0}^m \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \right) dx = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \int_a^b \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \left[\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} \right]_a^b = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^m \frac{b^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} - \sum_{k=0}^m \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} \right) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^{2m+1}}{(2m+1)(2m+1)!} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+1}}{(2m+1)(2m+1)!} = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Aufgabe 2

zu (a) Sei $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_1(t) = \int_0^t e^{-x^2} dx$. Weil die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-t^2}$ unter dem Integralzeichen stetig ist, kann der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung angewendet werden. Dieser liefert $f_1'(t) = e^{-t^2}$, und wegen $f(t) = f_1(t)^2$ erhalten wir mit der Kettenregel $f'(t) = 2f_1'(t)f_1(t) = 2e^{-t^2}f_1(t) = 2 \int_0^t e^{-t^2-x^2} dx$.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ hat die Funktion $g_x(t) = \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}$ die Ableitung

$$g_x'(t) = (-2t)(1+x^2)(1+x^2)^{-1}e^{-t^2(1+x^2)} = (-2t)e^{-t^2(1+x^2)}.$$

Als stetige Funktion ist $|g_x'(t)| = 2|t|e^{-t^2(1+x^2)}$ auf $[0, 1]$ integrierbar. Der Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation kann somit angewendet werden und liefert

$$\begin{aligned} g'(t) &= \int_0^1 (-2t)e^{-t^2(1+x^2)} dx = \int_0^1 (-2t)e^{-t^2-t^2x^2} dx = (-2)e^{-t^2} \int_0^1 te^{-(tx)^2} dx = \\ &= (-2)e^{-t^2} \int_0^t e^{-x^2} dx = (-2) \int_0^t e^{-t^2-x^2} dx. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $f'(t) + g'(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gleich null ist.

zu (b) Das Ergebnis von Teil (a) zeigt, dass die Funktion $f + g$ auf $\mathbb{R}$ konstant ist. Es genügt deshalb zu zeigen, dass $(f + g)(0) = \frac{1}{4}\pi$ gilt. Nun ist $f(0) = \left(\int_0^0 e^{-x^2} dx \right)^2 = 0^2 = 0$ und $g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{1}{4}\pi - 0 = \frac{1}{4}\pi$, also $(f + g)(0) = 0 + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi$.

zu (c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $h_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto \frac{e^{-n^2(1+x^2)}}{1+x^2}$, und es sei $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Als stetige Funktion ist h auf dem kompakten Intervall $[0, 1]$ integrierbar. Dasselbe gilt für jede der Funktionen h_n , und es gilt $|h_n| \leq h$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

gilt $\lim_n e^{-n^2(1+x^2)} = 0$ für jedes $x \in [0, 1]$, somit konvergiert die Funktionenfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion. Insgesamt sind damit die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue erfüllt, und wir erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 h_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 0 dx = 0.$$

zu (d) Auf Grund der bisherigen Ergebnisse gilt

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f+g)(n) = (f+g)(0) = \frac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen auf beiden Seiten erhalten wir den angegebenen Wert für das Gauß'sche Fehlerintegral.

Aufgabe 3

Für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt jeweils

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} z^k dz &= \int_0^{2\pi} \gamma_r(t)^k \gamma_r'(t) dt = \int_0^{2\pi} (re^{it})^k ire^{it} dt = ir^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt = \\ ir^{k+1} \left[\frac{1}{i(k+1)} e^{i(k+1)t} \right]_0^{2\pi} &= \frac{r^{k+1}}{k+1} \left[e^{i(k+1)t} \right]_0^{2\pi} = \frac{r^{k+1}}{k+1} (0-0) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_{\gamma_r} p(z) dz = \sum_{k=0}^n a_k \int_{\gamma_r} z^k dz = \sum_{k=0}^n a_k \cdot 0 = 0.$$

Für die zweite Gleichung bemerken wir zunächst, dass $p'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$ und somit $p'(0) = a_1$ gilt.

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\int_{\gamma_r} \bar{z}^k dz = \int_0^{2\pi} \bar{\gamma}_r(t)^k \gamma_r'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\overline{re^{it}})^k ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} r^k e^{-ikt} ire^{it} dt = ir^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(1-k)t} dt.$$

Betrachten wir nun zunächst den Fall $k \neq 1$. Dann gilt

$$\int_{\gamma_r} \bar{z}^k dz = \frac{r^{k+1}}{1-k} \left[e^{i(1-k)t} \right]_0^{2\pi} = \frac{r^{k+1}}{1-k} (1-1) = 0.$$

Im Fall $k = 1$ erhalten wir dagegen

$$\int_{\gamma_r} \bar{z} dz = ir^2 \int_0^{2\pi} 1 dt = ir^2 \cdot 2\pi = 2\pi ir^2.$$

Insgesamt gilt also

$$\int_{\gamma_r} \bar{p}(z) dz = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k \int_{\gamma_r} \bar{z}^k dz = \bar{a}_1 \cdot 2\pi ir^2 = 2\pi ir^2 \overline{p'(0)}.$$