Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Lösung Blatt 5 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Die partiellen Ableitungen der Normfunktion $(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sind gegeben durch

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{und} \quad \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Die Komponenten von F sind gegeben durch $F_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $F_2 = F_3 = 0$. Also ist

$$\text{rot}(F)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_3 F_1(x, y, z) \\ -\partial_2 F_1(x, y, z) \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ y \end{pmatrix}.$$

Für das Vektorfeld G erhalten wir

$$\text{rot}(G)(x, y, z) = \begin{pmatrix} (\partial_2 G_3 - \partial_3 G_2)(x, y, z) \\ (\partial_3 G_1 - \partial_1 G_3)(x, y, z) \\ (\partial_1 G_2 - \partial_2 G_1)(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_2(z) - \partial_3(x))(x, y, z) \\ (-\partial_3(y) - \partial_1(z))(x, y, z) \\ (\partial_1(x) + \partial_2(y))(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

zu (b) Das äußere Einheitsnormalenfeld ist ein Vektorfeld auf ∂A , dass in jedem glatten Randpunkt p durch einen äußeren Einheitsnormalenvektor gegeben ist. Um diesen zu bestimmen, wählt man eine offene Umgebung U von p und eine $\mathcal{C}^1$ -Funktion $q : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\nabla q)(p) \neq 0$ und $U \cap A = \{x \in U \mid q(x) \leq 0\}$. Dann ist durch $\nu(p) = \|(\nabla q)(p)\|_2^{-1} (\nabla q)(p)$ ein äußerer Einheitsnormalenvektor gegeben.

zu (c) Definiert man $\tilde{U} = U \times \mathbb{R}$ und die Funktion $q : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $q(x, z) = z - f(x)$, dann ist $(\nabla q)(p, f(p)) \neq 0$ (weil die letzte Komponente gleich 1 ist), und es gilt $\Lambda(f) \cap \tilde{U} = \{(x, z) \in \tilde{U} \mid q(x, z) \leq 0\}$. Deshalb ist

$$\|(\nabla q)(p, f(p))\|_2^{-1} (\nabla q)(p, f(p)) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(p)^2}} \begin{pmatrix} -(\nabla f)(p) \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein äußerer Einheitsnormalenvektor.

zu (d) Sei zum Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Definieren wir $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch $f_n(n) = 1$ und $f_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{n\}$, dann ist $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Jede der Funktionen f_n ist Riemann-integrierbar mit Riemann-Integral null. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ist eine Majorante von f , somit liegt f in $\hat{\mathcal{L}}_1$. Bezeichnet $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die konstante Folge der Nullfunktionen, dann gilt $\|f - g_n\|_1 = 0$. Dies zeigt, dass f Lebesgue-integrierbar ist, also in $\mathcal{L}_1$ liegt.

Aufgabe 1

zu (a) Der Rand von K ist gegeben durch $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\|_2 \in \{r, s\}\}$. Zunächst zeigen wir, dass kein Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ mit $\|p\|_2 \notin \{r, s\}$ ein Randpunkt ist, und verwenden dazu die Stetigkeit der Normfunktion $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Durch $] -\infty, r[\cup]s, +\infty[$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ gegeben. Somit ist auch die Urbildmenge $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\|_2 < r \vee \|(x, y, z)\|_2 > s\}$ unter der Normfunktion offen. Gilt $\|p\|_2 < r$ oder $\|p\|_2 > s$, dann ist dies also auch für alle Punkte q in einer offenen Umgebung von p erfüllt. Diese Punkte liegen alle im Komplement von K , und folglich ist p

kein Randpunkt von K . Ebenso ist $]r, s[$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, und dasselbe gilt folglich für $U' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r < \|(x, y, z)\|_2 < s\}$. Ist nun p ein Punkt mit $r < \|p\|_2 < s$, dann sind diese Ungleichungen also auch für alle Punkt q in einer offenen Umgebung von p erfüllt. All diese Punkte gehören zu K , folglich ist p auch in diesem Fall kein Randpunkt.

Setzen wir nun $\|p\|_2 = r$ voraus, und sei U'' eine offene Umgebung von p . Dann existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass der $\|\cdot\|_2$ -Ball vom Radius ε um p in U'' liegt. Nach eventueller Verkleinerung von ε gilt auch $\varepsilon < s - r$ und $\varepsilon < r$. Die Punkte $q^\pm = p \pm \frac{1}{2}\varepsilon\|p\|^{-1}p$ liegen dann beide in U'' , der Punkt q^- wegen $\|q^-\| < r$ aber außerhalb und der Punkt q^+ wegen $r < \|q^+\| < s$ innerhalb von K . Also ist p ein Randpunkt. Im Fall $\|p\|_2 = s$ läuft das Argument analog, nur dass in diesem Fall $q^- \in K$ und $q^+ \notin K$ gilt.

zu (b) Sei zunächst $p \in \partial K$ mit $\|p\|_2 = s$. Um einen äußeren Einheitsnormalenvektor im Punkt p zu erhalten, betrachten wir die Menge $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\|_2 > r\}$, die als Urbild des offenen Intervalls $]r, +\infty[$ unter der Normfunktion offen in $\mathbb{R}^3$ ist, und die Funktion $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto \|(x, y, z)\|_2^2 - s^2$. Es gilt $(\nabla\phi)(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = 2(x, y, z)$ für alle $(x, y, z) \in U$ und somit insbesondere $(\nabla\phi)(p) \neq 0$. Außerdem gilt für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Äquivalenz $(x, y, z) \in K \Leftrightarrow \|(x, y, z)\|_2 \leq s \Leftrightarrow \|(x, y, z)\|_2^2 \leq s^2 \Leftrightarrow \phi(x, y, z) \leq 0$, also $U \cap K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(x, y, z) \leq 0\}$. Dies zeigt, dass durch $\nu(p) = \|(\nabla\phi)\|^{-1}(\nabla\phi)(p) = s^{-1}\|p\|$ ein äußerer Einheitsnormalenvektor gegeben ist.

Nun betrachten wir den Fall $\|p\|_2 = r$. Hier betrachten wir die Menge $U' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\|_2 < s\}$, die als Urbild des offenen Intervalls $] -\infty, s[$ unter der Normfunktion offen in $\mathbb{R}^3$ ist, und die Funktion $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto r^2 - \|(x, y, z)\|_2^2$. Es gilt $(\nabla\psi)(x, y, z) = (-2x, -2y, -2z) = (-2)(x, y, z)$ für alle $(x, y, z) \in U$ und somit insbesondere $(\nabla\psi)(p) \neq 0$. Außerdem gilt für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Äquivalenz $(x, y, z) \in K \Leftrightarrow \|(x, y, z)\|_2 \geq r \Leftrightarrow \|(x, y, z)\|_2^2 \geq r^2 \Leftrightarrow \psi(x, y, z) \leq 0$, also $U \cap K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \psi(x, y, z) \leq 0\}$. Dies zeigt, dass durch $\nu(p) = \|(\nabla\psi)\|^{-1}(\nabla\psi)(p) = r^{-1}\|p\|$ ein äußerer Einheitsnormalenvektor gegeben ist.

zu (c) Das äußere Einheitsnormalenfeld der Kugel B_s ist auf dem Rand $\partial B_s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\|_2 = s\}$ ist gegeben durch $\nu_s(x, y, z) = s^{-1}(x, y, z)$, stimmt dort also mit ν überein. Es gilt also $\int_{(\partial B_s, \nu)} \langle F, dA \rangle = \int_{(\partial B_s, \nu_s)} \langle F, dA \rangle$. Auf dem Rand der Kugel B_r gilt $\nu_r(x, y, z) = r^{-1}(x, y, z) = -\nu(x, y, z)$. Bezeichnet $(A_i, \phi_i)_{i \in I}$ eine Parametrisierung von $(B_r, \nu) = (B_r, -\nu_r)$, dann folgt aus Proposition 5.22

$$\int_{(\partial B_r, \nu)} \langle F, dA \rangle = \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^3 \int_{(B_r, \phi_i)} F_k(\nu)_k dA = - \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^3 \int_{(B_r, \phi_i)} F_k(\nu_r)_k dA = - \int_{(\partial B_r, \nu_r)} \langle F, dA \rangle.$$

Außerdem gilt $B_s \setminus B_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r < \|(x, y, z)\|_2 \leq s\}$, also $(B_s \setminus B_r) \cup (\partial B_r) = K$. Weil B_r eine Jordan-messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist, handelt es sich bei ∂B_r um eine Jordansche Nullmenge. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_K \operatorname{div}(F)(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{B_s \setminus B_r} \operatorname{div}(F)(x, y, z) d(x, y, z) = \\ &= \int_{B_s} \operatorname{div}(F)(x, y, z) d(x, y, z) - \int_{B_r} \operatorname{div}(F)(x, y, z) d(x, y, z). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} \int_{(\partial K, \nu)} \langle F, dA \rangle &= \int_{(\partial B_s, \nu)} \langle F, dA \rangle + \int_{(\partial B_r, \nu)} \langle F, dA \rangle = \int_{(\partial B_s, \nu_s)} \langle F, dA \rangle - \int_{(\partial B_r, \nu_r)} \langle F, dA \rangle \\ &= \int_{B_s} \operatorname{div}(F)(x, y, z) d(x, y, z) - \int_{B_r} \operatorname{div}(F)(x, y, z) d(x, y, z) = \int_K \operatorname{div}(F)(x, y, z) d(x, y, z). \end{aligned}$$

Aufgabe 2

zu (a) Definieren wir $B = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$ und $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $\phi(y, z) = (0, y, z)$, dann ist $\phi(B) = S$ offenbar erfüllt.

zu (b) Die Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist genau das rechte obere Viertel der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe um den Punkt $(0, 0)$. Eine Randkurve von B erhalten wir, indem wir erst auf geradem Weg von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$ laufen, dann entlang der Kreislinie zum Punkt $(0, 1)$, und anschließend zurück zu $(0, 0)$. Eine solche Kurve hat die Form $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ mit

$$\begin{aligned} \tau_1: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 0) \quad , \quad \tau_2: [0, \frac{1}{2}\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \\ \text{und } \tau_3: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (0, 1 - t). \end{aligned}$$

zu (c) Zunächst berechnen wir das Integral $\int_{\gamma} \langle F, ds \rangle$ direkt. Wegen $\gamma = \phi \circ \tau$ ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ mit $\gamma_1(t) = (\phi \circ \tau_1)(t) = (0, t, 0)$ für $t \in [0, 1]$, $\gamma_2(t) = (\phi \circ \tau_2)(t) = (0, \cos(t), \sin(t))$ für alle $t \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ und $\gamma_3(t) = (\phi \circ \tau_3)(t) = (0, 0, 1 - t)$ für $t \in [0, 1]$. Das Integral über die erste Teilkurve ist

$$\int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle = \int_0^1 \langle (F \circ \gamma_1)(t), \gamma_1'(t) \rangle dt = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Für die zweite Teilkurve erhalten wir unter Verwendung der Stammfunktion $x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$ von $x \mapsto \sin(x)^2$ den Wert

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \langle F, ds \rangle &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \langle (F \circ \gamma_2)(t), \gamma_2'(t) \rangle dt = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 -\sin(t)^2 dt = -\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi - 0\right) = -\frac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

Die Berechnung des dritten Teilintegrals ergibt

$$\int_{\gamma_3} \langle F, ds \rangle = \int_0^1 \langle (F \circ \gamma_3)(t), \gamma_3'(t) \rangle dt = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Insgesamt erhalten wir $\int_{\gamma} \langle F, ds \rangle = \int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle + \int_{\gamma_2} \langle F, ds \rangle + \int_{\gamma_3} \langle F, ds \rangle = 0 + (-\frac{1}{4}\pi) + 0 = -\frac{1}{4}\pi$.

Nun verwenden wir zur Berechnung des Kurvenintegrals die Gleichung $\int_{\gamma} \langle F, ds \rangle = \int_{(B, \phi)} \langle \text{rot}(F), dA \rangle$ aus dem Stokes'schen Integralsatz. Die Ableitung von ϕ ist gegeben durch

$$\phi'(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit $\phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2) = e_2 \times e_3 = e_1$ für alle $(x, y) \in B$. Außerdem gilt für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ jeweils

$$\text{rot}(F)(x, y, z) = \begin{pmatrix} (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2)(x, y, z) \\ (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3)(x, y, z) \\ (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_2(x) - \partial_3(z))(x, y, z) \\ (\partial_3(y) - \partial_1(x))(x, y, z) \\ (\partial_1(z) - \partial_2(y))(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechnen wir nun das Flächenintegral durch

$$\begin{aligned}
 \int_{(B,\phi)} \langle \operatorname{rot}(F), \nu \rangle dA &= \int_B \langle (\operatorname{rot}(F) \circ \phi)(y, z), \phi'(y, z)(e_1) \times \phi'(y, z)(e_2) \rangle d(y, z) \\
 &= \int_B \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d(y, z) = \int_B (-1) d(y, z) = - \int_{[0,1] \times [0, \frac{1}{2}\pi]} r d(r, \varphi) \\
 &= - \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r d\varphi \right) dr = -\frac{1}{2}\pi \int_0^1 r dr = -\frac{1}{2}\pi \left[\frac{1}{2}r^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\pi.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ ist $f|_{[a,c]}$ als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall Riemann-integrierbar. Wir zeigen nun, dass der Grenzwert $\lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) dx$ in $\mathbb{R}$ existiert. Mit f ist laut Vorlesung auch $|f|$ auf $[a, b[$ Lebesgue-Integrierbar. Die Menge bestehend aus den (Riemannschen oder Lebesgueschen) Integralen über $|f|_{[a,c]}$ mit $a < c < b$ ist deshalb durch das Lebesgue-Integral $\int_{[a,b[} |f|(x) dx$ nach oben beschränkt.

Sei $s \in \mathbb{R}$ das Supremum dieser Menge. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert (nach Definition des Supremums) ein $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\int_{[a,c_\varepsilon]} |f|(x) dx > s - \varepsilon$, und es folgt $s - \varepsilon < \int_{[a,c_\varepsilon]} |f|(x) dx \leq \int_{[a,c]} |f|(x) dx \leq s$ für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c_\varepsilon \leq c < b$. Dies zeigt, dass der Grenzwert

$$\lim_{c \rightarrow b} \int_{[a,c]} |f|(x) dx = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c |f|(x) dx$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Damit ist die uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit für nicht-negative Funktionen f bewiesen. Im allgemeinen Fall definierten wir $f^+ = f \vee 0$ und $f^- = -(f \wedge 0)$. Mit f sind auch f^+ und f^- Lebesgue-integrierbar auf $[a, b[$, und laut Angabe auch stetig. Auf Grund des bereits gezeigten Falls sind f^+ und f^- beide uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a, b[$. Nun gilt

$$\begin{aligned}
 \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) dx &= \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c (f^+(x) - f^-(x)) dx = \lim_{c \rightarrow b} \left(\int_a^c f^+(x) dx - \int_a^c f^-(x) dx \right) \\
 &= \left(\lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f^+(x) dx \right) - \left(\lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f^-(x) dx \right).
 \end{aligned}$$

Weil die beiden Grenzwerte existieren, ist die uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit von f damit auch im allgemeinen Fall bewiesen ist. (Mit Hilfe des Satzes über die majorisierte Konvergenz werden wir auch leicht zeigen können, dass das uneigentliche Riemann-Integral von f über $[a, b[$ mit dem Lebesgue-Integral von f übereinstimmt.)