Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— **Lösung Blatt 5** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a) Auf Grund des Stokes'schen Integralsatzes gilt die Beziehung $\int_\gamma \langle E, ds\rangle = \int_{(A,\phi)} \langle \mathrm{rot}(E), dA\rangle$. Wenden wir auf die rechte Seite das Faradaysche Gesetz an, so erhalten wir

$$\int_\gamma \langle E, ds\rangle \quad = \quad -\int_{(A,\phi)} \left\langle \frac{\partial B}{\partial t}, dA \right\rangle .$$

zu (b) Sei $\bar{B}_r \subseteq \mathbb{R}^2$ der Vollkreis vom Radius r, und sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\phi(x,y) = (x,y,0)$. Dann ist $\phi(A)$ der Vollkreis vom Radius r in der xy-Ebene. Dann ist $\phi'(x,y)(e_k) = e_k$ für $k = 1,2$ und $\phi'(x,y)(e_1) \times \phi'(x,y)(e_2) = e_3$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Seien $v_x, v_y, v_z \in \mathbb{R}$ die Komponenten des Vektors $v \in \mathbb{R}^3$ der Länge 1, d.h. es gilt $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1$. Wegen $B(t,x,y,z) = B_0 \sin(\omega_t) v$ gilt jeweils $\frac{\partial B}{\partial t}(t,x,y,z) = B_0 \omega \cos(\omega t) v$. Durch Einsetzen in die Formel aus Teil (a) erhalten wir für die induzierte Spannung den Wert

$$U(t) \quad = \quad \int_\gamma \langle E(t), ds\rangle \quad = \quad -\int_{(A,\phi)} \left\langle \frac{\partial B}{\partial t}, dA \right\rangle \quad =$$

$$-B_0 \omega \cos(\omega t) \int_{\bar{B}_r} \langle v, \phi'(x,y,z)(e_1) \times \phi'(x,y,z)(e_2)\rangle \, d(x,y,z) \quad =$$

$$-B_0 \omega \cos(\omega t) \int_{\bar{B}_r} \langle v, e_3\rangle \, d(x,y,z) \quad = \quad -B_0 \omega \cos(\omega t) \int_{\bar{B}_r} v_z \, d(x,y,z) \quad = \quad -\pi r^2 B_0 v_z \omega \cos(\omega t).$$

Die induzierte Spannung ist also am größten, wenn das Magnetfeld B zur xy-Ebene senkrecht steht ($v_z = 1$). Verläuft das Magnetfeld parallel zur xy-Ebene ($v_z = 0$), dann wird keine Spannung induziert.

Aufgabe 2

zu (a) Nach Satz 6.20 ist jede Riemann-integrierbare Funktion auf Q auch Lebesgue-integrierbar. Es genügt also, die Riemann-integrierbarkeit der Treppenfunktionen nachzuweisen. Sei $g : Q \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q mit der Eigenschaft, dass $g|_{K^\circ}$ für alle $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ konstant ist. Sei ferner c_K der konstante Wert von g auf K°. Setzen wir $g^\circ = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_K \chi_{K^\circ}$, dann unterscheidet sich diese Funktion von g nur auf der Menge $N = \bigcup_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} \partial K$. Wir zeigen gleich, dass

(i) die Menge N eine Jordansche Nullmenge ist, und dass

(ii) die Funktion χ_{K° für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ Riemann-integrierbar ist.

Weil die Riemann-integrierbaren Funktionen auf Q einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bilden, folgt aus (ii), dass die Funktion g° Riemann-integrierbar ist. Aus (i) und Satz 3.14 folgt, dass mit g° auch g Riemann-integrierbar ist.

Für (i) genügt es zu zeigen, dass ∂K für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ eine Jordansche Nullmenge ist, denn jede endliche Vereinigung von Jordanschen Nullmengen ist wieder eine Jordansche Nullmenge. Sei also K ein Teilquader von Q der Form $K = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$. Wegen $K^\circ = \prod_{k=1}^n]a_k, b_k[$ und $\partial K = K \setminus K^\circ$ ist der Rand von K gegeben durch

$$\partial K \quad = \quad \bigcup_{k=1}^{n} \; [a_1, b_1] \times ... \times \{a_k, b_k\} \times ... \times [a_n, b_n].$$

Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ wird jede Menge dieser Vereinigung jeweils überdeckt durch die Vereinigung der beiden kompakten Quader

$$[a_1, b_1] \times ... \times [a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon] \times ... \times [a_n, b_n]$$

und

$$[a_1, b_1] \times ... \times [b_k - \varepsilon, b_k + \varepsilon] \times ... \times [a_n, b_n]$$

vom Volumen $2\varepsilon \prod_{\ell \neq k} [a_\ell, b_\ell]$. Weil $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus, dass jede Menge in der Vereinigung und somit auch ∂K eine Jordansche Nullmenge ist.

Für (ii) genügt es zu zeigen, dass χ_{K° als Funktion auf K Riemann-integrierbar ist. Wieder sei $K = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varepsilon < \frac{1}{2}(b_k - a_k)$ für $1 \leq k \leq n$ definieren wir eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon = (\mathcal{Z}_\varepsilon^{(1)}, ..., \mathcal{Z}_\varepsilon^{(n)})$ durch $\mathcal{Z}_k = \{a_k + \varepsilon, b_k - \varepsilon\}$ für $1 \leq k \leq n$. Auf dem Teilquader $L = [a_k + \varepsilon, b_k - \varepsilon]$ vom Volumen $\prod_{k=1}^n (b_k - a_k - 2\varepsilon)$ ist χ_{K° konstant 1, hier gilt also $c^-_{L,\chi_{K^\circ}} = c^+_{L,\chi_{K^\circ}} = 1$. Auf allen übrigen Teilquadern $L' \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_\varepsilon)$ von K gilt $c^-_{L',\chi_{K^\circ}} \geq 0$ und $c^+_{L',\chi_{K^\circ}} \leq 1$, weil χ_{K° auf K insgesamt nur die Werte 0 und 1 annimmt. Dies zeigt, dass für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ die Differenz von Ober- und Untersumme bezüglich $\mathcal{Z}_\varepsilon$ jeweils durch

$$\mathcal{S}^+_{\chi_{K^\circ}}(\mathcal{Z}_\varepsilon) - \mathcal{S}^-_{\chi_{K^\circ}}(\mathcal{Z}_\varepsilon) \quad \leq \quad \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k) - \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k - 2\varepsilon)$$

abgeschätzt werden kann. Für $\varepsilon \to 0$ läuft die Differenz rechts gegen null. Damit ist die Riemann-Integrierbarkeit von χ_{K° nachgewiesen.

zu (b) „$\Leftarrow$“ Setzen wir voraus, dass eine Folge $(g_m)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen $g_m : Q \to \mathbb{R}$ mit $\lim_m \|g_m - f\|_1 = 0$ existiert. Da $g_m - f$ jeweils ein Wert der Halbnorm $\|g_m - f\|_1$ zugeordnet werden kann, muss $g_m - f$ in $\widehat{\mathcal{L}_n}$ liegen. Nach Teil (a) gilt $g_m \in \mathcal{L}_n$ und somit auch $g_m \in \widehat{\mathcal{L}_n}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit ist auch f in $\widehat{\mathcal{L}_n}$ enthalten, und die Lebesgue-Integrierbarkeit von f folgt insgesamt aus Prop. 6.12 (ii).

„$\Rightarrow$“ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Definition der Lebesgue-integrierbarkeit liegt f in $\widehat{\mathcal{L}_n}$, und es existiert ein $h \in \mathcal{C}_n$ mit $\|f - h\|_1 < \frac{1}{2}\varepsilon$. Der Träger von h ist in einem kompakten Quader Q enthalten, und auf Grund der Riemann-Integrierbarkeit von h gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q mit $\mathcal{S}^+_h(\mathcal{Z}) - \mathcal{S}^-_h(\mathcal{Z}) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Sei nun $g : Q \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit konstantem Wert $c_K = c^-_{K,h}$ auf K°, jeweils für alle $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$. Nach Lemma 6.18 (ii) ist g Lebesgue-integrierbar, und das Lebesgue-Integral stimmt mit $\mathcal{S}^-_h(\mathcal{Z})$ überein. Die 1-Halbnorm von $h - g$ kann nach Prop. 6.13 (ii) abgeschätzt werden durch das Lebesgue-Integral dieser Funktion, und wegen $\mathcal{S}^-_h(\mathcal{Z}) \leq I(h) \leq \mathcal{S}^+_h(\mathcal{Z})$ gilt somit $\|h - g\|_1 = \int |h(x) - g(x)|\, dx = I(h) - \int g(x)\, dx \leq \mathcal{S}^+_h(\mathcal{Z}) - \mathcal{S}^-_h(\mathcal{Z}) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Insgesamt erhalten wir $\|f - g\|_1 \leq \|f - h\|_1 + \|h - g\|_1 < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert also eine Treppenfunktion g mit $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Daraus folgt, dass eine Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $\lim_m \|f - g_m\|_1 = 0$ existiert.

Aufgabe 3

zu (a) Sei $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$, und für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei f_m die Nullfortsetzung von $f|_{[1,\pi m]}$. Die Funktion $f|_{[1,\pi m]}$ ist offenbar stetig (da sie durch Verknüpfung stetiger Funktionen zu Stande kommt) und somit Riemann-integrierbar. Nach Satz 6.20 folgt daraus $f_m \in \mathcal{L}_1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wenn wir nun zeigen können, dass $\lim_m \|f_m - f_0\|_1 = 0$ gilt, wobei f_0 die Nullfortsetzung von f bezeichnet, dann folgt daraus die Lebesgue-Integrierbarkeit von f_0 und von f, nach Prop. 6.12 (ii). Sei dazu g_m für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Nullfortsetzung von $|f||_{[\pi m, \pi(m+1)]}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist dann $\sum_{k=m}^{\infty} g_k$ eine Majorante von $f_0 - f_m$, denn $f_0 - f_m$ ist auf $[1, \pi m]$ gleich null, und auf $]\pi m, +\infty]$ stimmt $|f_0 - f_m|$ mit $|f_0|$ und mit $\sum_{k=m}^{\infty} g_k$ überein. Daraus folgt mit Prop. 6.7 jeweils

$$\begin{aligned}
\|f_0 - f_m\|_1 \quad &\leq \quad \sum_{k=m}^{\infty} \|g_k\|_1 \quad = \quad \sum_{k=m}^{\infty} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} |f(x)|\,dx \quad = \quad \lim_{x \to +\infty} \int_{\pi m}^{x} |f(t)|\,dt \\
&\leq \quad \lim_{x \to +\infty} \int_{\pi m}^{x} \frac{dt}{t^2} \quad \leq \quad \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_{\pi m}^{x} \quad = \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\pi m} - \frac{1}{x}\right) \quad = \quad \frac{1}{\pi m}.
\end{aligned}$$

Aus $\lim_m \frac{1}{\pi m} = 0$ folgt somit auch $\lim_m \|f_0 - f_m\|_1 = 0$.

zu (b) Hier läuft der Nachweis im Wesentlichen nach demselben Schema ab. Sei $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, und für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei f_m die Nullfortsetzung von $f|_{[\frac{1}{m},1]}$. Die Funktion $f|_{[\frac{1}{m},1]}$ ist offenbar stetig (da sie durch Verknüpfung stetiger Funktionen zu Stande kommt) und somit Riemann-integrierbar. Nach Satz 6.20 folgt daraus $f_m \in \mathcal{L}_1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wenn wir nun zeigen können, dass $\lim_m \|f_m - f_0\|_1 = 0$ gilt, wobei f_0 die Nullfortsetzung von f bezeichnet, dann folgt daraus die Lebesgue-Integrierbarkeit von f_0 und von f, nach Prop. 6.12 (ii).

Sei dazu g_m für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Nullfortsetzung von $f|_{[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}]}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist dann $\sum_{k=m}^{\infty} g_m$ eine Majorante von $f_0 - f_m$, denn $f_0 - f_m$ ist auf $[\frac{1}{m}, 1]$ gleich null, und auf $[0, \frac{1}{m}[$ stimmt $|f_0 - f_m|$ mit f_0 überein. Auf $[0, \frac{1}{m}]$ gilt außerdem $f_0 \leq \sum_{k=m}^{\infty} g_k$, mit Gleichheit in allen Punkten $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{k} \mid k \geq m\}$. Mit Prop. 6.7 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|f_0 - f_m\|_1 \quad &\leq \quad \sum_{k=m}^{\infty} \|g_k\|_1 \quad = \quad \sum_{k=m}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x)\,dx \quad = \quad \lim_{x \to 0} \int_{x}^{1/m} f(t)\,dt \\
= \quad \lim_{x \to 0} \int_{x}^{1/m} \left(\frac{dt}{\sqrt{t}}\right) dt \quad &= \quad \lim_{x \to 0} \left[2\sqrt{t}\right]_{x}^{1/m} \quad = \quad \lim_{x \to 0} \left(2\sqrt{\frac{1}{m}} - 2\sqrt{x}\right) \quad = \quad \frac{2}{\sqrt{m}}.
\end{aligned}$$

Aus $\lim_m \frac{2}{\sqrt{m}} = 0$ folgt somit auch $\lim_m \|f - 0 - f_m\|_1 = 0$.

zu (c) Zuerst zeigen, wir, dass die Funktion $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ nicht Lebesgue-integrierbar ist. Wäre sie Lebesgue-integrierbar, dann müsste dies nach Prop. 6.12 (iii) auch für $|f|$ gelten. Mit $|f|$ wäre dann auch $|f| \cdot \chi_{[2\pi, 2\pi m]}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ Lebesgue-integrierbar. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt jeweils

$$\begin{aligned}
\int_{2\pi m}^{2\pi m + \pi} \frac{|\sin(x)|}{|x|}\,dx \quad &\geq \quad \frac{1}{\pi(2m+1)} \int_{2\pi m}^{2\pi m+\pi} \sin(x)\,dx \quad = \quad \frac{1}{\pi(2m+1)} \int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx \quad = \\
\frac{1}{\pi(2m+1)} \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} \quad &= \quad \frac{1}{\pi(2m+1)} \left(-(-1) - (-1)\right) \quad = \quad \frac{1}{\pi(m+\frac{1}{2})} \quad ,
\end{aligned}$$

und ebenso erhält man $\int_{2\pi m+\pi}^{2\pi m+2\pi} \frac{|\sin(x)|}{|x|}\,dx \geq \frac{1}{\pi(m+1)}$, insgesamt also die Abschätzung

$$\int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} \frac{|\sin(x)|}{|x|}\,dx \quad \geq \quad \frac{1}{\pi(m+\frac{1}{2})} + \frac{1}{\pi(m+1)} \quad = \quad \frac{1}{\pi(m+1)} + \frac{1}{\pi(m+1)} \quad = \quad \frac{2}{\pi(m+1)}.$$

Das Lebesgue-integral $\int_{[1,+\infty[} |f(x)|\,dx$ wäre eine endliche reelle Zahl. Andererseits müsste für jedes $m \in \mathbb{N}$ wegen $|f| \geq |f| \cdot \chi_{[2\pi,2\pi m]}$ aber die Abschätzung

$$\int_{[1,+\infty[} |f(x)|\,dx \quad \geq \quad \int_{2\pi}^{2\pi m} \frac{|\sin(x)|}{|x|}\,dx \quad = \quad \sum_{k=1}^{m-1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{|\sin(x)|}{|x|}\,dx \quad \geq \quad \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2}{\pi(m+1)}.$$

gelten, was wegen $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(m+1)} = +\infty$ der Endlichkeit von $\int_{[1,+\infty[} |f(x)|\,dx$ widerspricht.

Nun zeigen wir noch, dass $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ Riemann-integrierbar ist, was gleichbedeutend ist mit der Existenz des Grenzwertes $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. In einem ersten Schritt zeigen wir, dass der Folgengrenzwert $\lim_m \int_1^{2\pi m} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ existiert. Dazu schätzen wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ das Integral $\int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ nach oben und nach unten ab. Für alle $t \in [2\pi m, 2\pi m + \pi]$ gilt jeweils $\sin(t+\pi) = -\sin(t)$ und somit $\frac{\sin(t)}{t} = -\frac{\sin(t+\pi)}{t} \geq -\frac{\sin(t+\pi)}{t+\pi}$. Daraus folgt

$$\int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} \frac{\sin(t)}{t}\,dt \quad = \quad \int_{2\pi m}^{2\pi m+\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \int_{2\pi m+\pi}^{2\pi(m+1)} \frac{\sin(t)}{t}\,dt \quad =$$

$$\int_{2\pi m}^{2\pi m+\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \int_{2\pi m}^{2\pi m+\pi} \frac{\sin(t+\pi)}{t+\pi}\,dt \quad \geq \quad 0.$$

Der Grenzwert $\lim_m \int_1^{2\pi m} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ existiert somit genau dann, wenn die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ konvergiert, denn sämtliche Reihenglieder sind nicht negativ. Nun gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} \frac{\sin(t)}{t}\,dt \quad = \quad \int_{2\pi m}^{2\pi m+\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \int_{2\pi m+\pi}^{2\pi(m+1)} \frac{\sin(t)}{t}\,dt \quad \leq$$

$$\frac{1}{2\pi m} \int_{2\pi m}^{2\pi m+\pi} \sin(t)\,dt - \frac{1}{2\pi(m+1)} \int_{2\pi m+\pi}^{2\pi(m+1)} \sin(t)\,dt \quad =$$

$$\frac{1}{2\pi m} \int_0^{\pi} \sin(t)\,dt - \frac{1}{2\pi(m+1)} \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t)\,dt \quad = \quad \frac{1}{2\pi m}\left[-\cos(t)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi(m+1)}\left[-\cos(t)\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \quad \frac{1}{\pi m} - \frac{1}{\pi(m+1)} \quad = \quad \frac{1}{\pi m(m+1)}.$$

Die Existenz des Grenzwerts $\lim_m \int_1^{2\pi m} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ als endliche reelle Zahl folgt also aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi m(m+1)}$.

Nun beweisen wir noch die Existenz und Endlichkeit des Funktionsgrenzwertes $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $g(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ im Intervall $[2\pi m, 2\pi m + \pi]$ jeweils monoton wachsend (weil dort der Sinus nichtnegativ ist), und im Intervall $[2\pi m + \pi, 2\pi(m+1)]$ monoton fallend. Die Rechnung von oben zeigt $g(2\pi m + \pi) = g(2\pi m) + \int_{2\pi m}^{2\pi m+\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,dt \leq g(2\pi m) + \frac{1}{\pi m}$. Es gilt also jeweils $|g(x) - g(2\pi m)| \leq \frac{1}{\pi m}$ für alle $x \in [2\pi m, 2\pi(m+1)]$. Sei nun $c = \lim_m g(2\pi m) = \lim_m \int_1^{2\pi m} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$, und sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit $|c - g(2\pi m)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $\frac{1}{\pi m} < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $m \geq M$. ist nun $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 2\pi M$, dann existiert ein $m \geq M$ mit $x \in [2\pi m, 2\pi(m+1)]$, und wir erhalten $|g(x) - c| \leq |g(x) - g(2\pi m)| + |g(2\pi m) - c| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. Damit ist $\lim_{x\to+\infty} g(x) = c$ nachgewiesen.