Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Lösung Blatt 4 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Der Rand des Halbkreises ist gegeben durch die Vereinigung von $[0,1]\times\{0\}$ und $\{(\cos(t),\sin(t)) \mid t\in[0,\pi]\}$. Ein äußeres Einheitsnormalenfeld auf dieser Menge ist gegeben durch $\nu(t,0)=(0,-1)$ für alle $t\in[0,1]$ und $\nu(\cos(t),\sin(t))=(\cos(t),\sin(t))$ für alle $t\in[0,\pi]$.

zu (b) Durch $A=[0,1]^2$ und $\phi(x,y)=(x,y,x)$ für alle $(x,y)\in[0,1]^2$ ist eine Parametrisierung von S gegeben. Es gilt

$$\phi'(x,y)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

und $\phi'(x,y)(e_1)\times\phi'(x,y)(e_2)={}^{\mathrm{t}}(1,0,1)\times{}^{\mathrm{t}}(0,1,0)=(-1,0,1)$ und $\|\phi'(x,y)(e_1)\times\phi'(x,y)(e_2)\|_2=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$ für alle $(x,y)\in[0,1]^2$. Das gesuchte Flächenintegral ist also gegeben durch

$$\int_{(A,\phi)} f\,dA \quad=\quad \int_A (f\circ\phi)(x,y)\|\phi'(x,y)(e_1)\times\phi'(x,y)(e_2)\|_2\,d(x,y) \quad=$$

$$\int_A (f\circ\phi)(x,y)\|\phi'(x,y)(e_1)\times\phi'(x,y)(e_2)\|_2\,d(x,y) \quad=\quad \int_A f(x,y,z)\cdot\sqrt{2}\,d(x,y) \quad=$$

$$\sqrt{2}\int_A (2x+y)\,d(x,y) \quad=\quad \sqrt{2}\int_0^1\left(\int_0^1 (2x+y)\,dy\right)dx \quad=\quad \sqrt{2}\int_0^1\left(\left[2x+\tfrac12 y^2\right]_0^1\right)dx \quad=$$

$$\sqrt{2}\int_0^1 \tfrac12\,dx \quad=\quad \sqrt{2}\left[\tfrac12 x\right]_0^1 \quad=\quad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

zu (c) Nach Definition ist der Gradient die Funktion $\nabla f: U\to\mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $\partial_k f$ für $1\le k\le n$, und die Divergenz ist definiert durch $\mathrm{div}(F)(x_1,...,x_n)=\sum_{k=1}^n \partial_k F_k(x_1,...,x_n)$.

zu (d) Die Funktion $f\cdot F$ hat die Komponentenfunktionen fF_k mit $1\le k\le n$, und deren partielle Ableitungen sind gegeben durch $\partial_k(fF_k)=(\partial_k f)F_k+f(\partial_k F_k)$. Somit gilt für alle $(x_1,...,x_n)\in U$ die Gleichung

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(F)(x_1,...,x_n) \quad&=\quad \sum_{k=1}^n(\partial_k f)(x_1,...,x_n)F_k(x_1,...,x_n)+f(x_1,...,x_n)\sum_{k=1}^n(\partial_k F_k)(x_1,...,x_n)\\ &=\quad \langle(\nabla f)(x_1,...,x_n),F(x_1,...,x_n)\rangle+f(x_1,...,x_n)\mathrm{div}(F)(x_1,...,x_n).\end{aligned}$$

Aufgabe 1

zu (a) Der Rand ∂Q besteht aus den sechs Seiten $S_1 = \{0\} \times [0,1]^2$, $S_2 = \{1\} \times [0,1]^2$, $S_3 = [0,1] \times \{0\} \times [0,1]$, $S_4 = [0,1] \times \{1\} \times [0,1]$, $S_5 = [0,1]^2 \times \{0\}$ und $S_6 = [0,1]^2 \times \{1\}$. Ein äußeres Einheitsnormalenfeld ν erhält man, wenn indem man $\nu(0,y,z) = -e_1$ und $\nu(1,y,z) = e_1$ für alle $(y,z) \in \,]0,1[^2$, $\nu(x,0,z) = -e_2$ und $\nu(x,1,z) = e_2$ für alle $(x,z) \in \,]0,1[^2$ und $\nu(x,y,0) = -e_3$ und $\nu(x,y,1) = e_3$ für alle $(x,y) \in \,]0,1[^2$ definiert. Auf der Kantenmenge, also auf den Punkte (x,y,z) der Menge

$$\{(x,y,z) \in Q \mid x,y \in \{0,1\} \vee x,z \in \{0,1\} \vee y,z \in \{0,1\}$$

darf für $\nu(x,y,z)$ ein beliebiger Vektor der Länge 1 gewählt werden.

zu (b) Die Divergenz des Vektorfeldes ist gegeben durch $\operatorname{div}(F)(x,y,z) = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz$, und es ist

$$\int_Q \operatorname{div}(F)(x,y,z)\, d(x,y,z) \quad = \quad \int_Q 6xyz\, d(x,y,z) \quad = \quad 6 \int_0^1 x \left(y \int_0^1 (z\, dz)\; dy \right) dx \quad =$$
$$6 \int_0^1 x \left(y \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} z^2\right]_0^1 dy \right) dx \quad = \quad 3 \int_0^1 x\, (y\, dy)\; dx \quad = \quad 3 \int_0^1 x \left[\tfrac{1}{2} y^2\right]_0^1 dx \quad =$$
$$\tfrac{3}{2} \int_0^1 x\, dx \quad = \quad \tfrac{3}{2} \left[\tfrac{1}{2} x^2\right]_0^1 \quad = \quad \tfrac{3}{4}.$$

Um $\int_{(\partial Q,\nu)} \langle F, dA\rangle$ zu berechnen, müssen wir auf jeder der Seitenflächen $S_1, ..., S_6$ die Parametrisierung $\phi_i : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ so wählen, dass $\phi_i'(x,y)(e_1) \times \phi_i'(x,y)(e_2)$ zumindest für alle $(x,y) \in \,]0,1[$ ein positives Vielfaches von $\nu(\phi(x,y))$ ist. Setzen wir $\phi_1(x,y) = (0,y,x)$, dann gilt

$$\phi_1'(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit $\phi_1'(x,y)(e_1) \times \phi'(x,y)(e_2) = {}^{\mathrm{t}}(0,0,1) \times {}^{\mathrm{t}}(0,1,0) = (-1,0,0)$. Wir erhalten somit

$$\int_{([0,1]^2,\phi_1)} \langle F, dA\rangle \quad = \quad \int_{[0,1]^2} \langle (F \circ \phi)(x,y), \phi_1'(x,y)(e_1) \times \phi'(x,y)(e_2)\rangle\, d(x,y) \quad =$$
$$\int_{[0,1]^2} \langle F(0,y,x), \phi_1'(x,y)(e_1) \times \phi'(x,y)(e_2)\rangle\, d(x,y) \quad =$$
$$\int_{[0,1]^2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d(x,y) \quad = \quad \int_{[0,1]^2} 0\, d(x,y) \quad = \quad 0.$$

Setzen wir $\phi_2(x,y) = (1,x,y)$, dann gilt

$$\phi_1'(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit $\phi_1'(x,y)(e_1) \times \phi'(x,y)(e_2) = {}^{\mathrm{t}}(0,1,0) \times {}^{\mathrm{t}}(0,0,1) = (1,0,0)$.

Wir erhalten somit

$$\int_{([0,1]^2,\phi_2)} \langle F, dA\rangle \quad = \quad \int_{[0,1]^2} \langle (F\circ\phi)(x,y), \phi_1'(x,y)(e_1) \times \phi'(x,y)(e_2)\rangle \, d(x,y) \quad =$$

$$\int_{[0,1]^2} \langle F(1,x,y), \phi_1'(x,y)(e_1) \times \phi'(x,y)(e_2)\rangle \, d(x,y) \quad =$$

$$\int_{[0,1]^2} \left\langle \begin{pmatrix} xy \\ x^2y \\ xy^2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d(x,y) \quad = \quad \int_{[0,1]^2} xy \, d(x,y) \quad = \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 xy \, dy \right) dx \quad =$$

$$\int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}xy^2\right]_0^1 dx \quad = \quad \int_0^1 \tfrac{1}{2}x \, dx \quad = \quad \left[\tfrac{1}{4}x^2\right]_0^1 \quad = \quad \tfrac{1}{4}.$$

Durch analoge Rechnungen erhält man $\int_{([0,1]^2,\phi_3)} \langle F, dA\rangle = 0$, $\int_{([0,1]^2,\phi_4)} \langle F, dA\rangle = \frac{1}{4}$, $\int_{([0,1]^2,\phi_5)} \langle F, dA\rangle = 0$ und $\int_{([0,1]^2,\phi_6)} \langle F, dA\rangle = \frac{1}{4}$, insgesamt also

$$\int_{(\partial Q,\nu)} \langle F, dA\rangle \quad = \quad \sum_{k=1}^{6} \int_{([0,1]^2,\phi_k)} \langle F, dA\rangle \quad = \quad 0 + \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{4} \quad = \quad \tfrac{3}{4}.$$

Aufgabe 2

zu (a) Wir wählen die Parametrisierung $\phi : [a,b] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\phi(t,\varphi) = (t, f(t)\cos(\varphi), f(t)\sin(\varphi))$. Dann gilt

$$\phi'(t,\varphi) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(t)\cos(\varphi) & -f(t)\sin(\varphi) \\ f'(t)\sin(\varphi) & f(t)\cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad ,$$

somit

$$\phi'(t,\varphi)(e_1) \times \phi'(t,\varphi)(e_2) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t)\cos(\varphi) \\ f'(t)\sin(\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t)\sin(\varphi) \\ f(t)\cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} f'(t)f(t) \\ -f(t)\cos(\varphi) \\ -f(t)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

und $\|\phi'(t,\varphi)(e_1) \times \phi'(t,\varphi)(e_2)\|^2 = f'(t)^2 f(t)^2 + (-f(t))^2\cos(\varphi)^2 + (-f(t))^2\sin(\varphi)^2 = f(t)(1 + f'(t)^2)$, also $\|\phi'(t,\varphi)(e_1) \times \phi'(t,\varphi)(e_2)\| = f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}$. Als Flächeninhalt erhalten wir somit

$$v_2(S(f)) \quad = \quad \int_{[a,b]\times[0,2\pi]} f(t)\sqrt{1+f'(t)^2} \, d(t,\varphi) \quad = \quad \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} f(t)\sqrt{1+f'(t)^2} \, d\varphi \right) dt$$

$$= \quad 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1+f'(t)^2} \, dt.$$

Anmerkung: Das Paar $([a,b] \times [0,2\pi], \phi)$, das hier definiert wurde, ist streng genommen keine Parametrisierung von $S(f)$ im Sinne von Definition 5.11, weil ϕ nicht injektiv ist; es gilt $\phi(t,0) = \phi(t,2\pi)$ für alle $t \in [a,b]$. Um formal korrekt vorzugehen, müsste man eigentlich mit Definition 5.21 arbeiten. Man kann beispielsweise $S(f)$ durch die beiden Parametrisierungen $([a,b] \times [0,\pi], \phi_1)$ und $([a,b] \times [\pi,2\pi], \phi_2)$ abdecken, wobei ϕ_1 und ϕ_2 auf ihrem Definitionsbereich jeweils mit ϕ übereinstimmen. Es gilt dann

$$v_2(S(f)) \quad = \quad \int_{(S(f),\nu)} 1 \, dA \quad = \quad \int_{([a,b]\times[0,\pi],\phi_1)} 1 \, dA + \int_{([a,b]\times[0,\pi],\phi_1)} 1 \, dA$$

mit dem Einheitsnormalenfeld gegeben durch $\nu(x,y,z) = \|f'(x)f(x)\|_2^{-1}(-f'(x)f(x),y,z)$ für alle $(x,y,z) \in S(f)$. Die Berechnung nach dieser Formel liefert aber natürlich dasselbe Ergebnis, weil $[a,b]\times[0,2\pi]$ gleich der Vereinigung von $[a,b]\times[0,\pi]$ und $[a,b]\times[\pi,2\pi]$ ist und sich die beiden Mengen nur in der Jordanschen Nullmenge $[a,b]\times\{\pi\}$ schneiden.

zu (b) Bis auf Vertauschung der Koordinaten stimmt die Oberfläche des elliptischen Paraboloids überein mit $S(f)$ für die Funktion $f : [0,h] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, denn für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x \in [a,b]$ gilt die Äquivalenz $(x,y,z) \in E \Leftrightarrow z = x^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = z = (\sqrt{z})^2 = f(z)^2$. Nach Teil (a) erhäl man den den Flächeninhalt also mit der Ableitungsfunktion $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ durch die Rechnung

$$v_2(E) = v_2(S(f)) = 2\pi\int_0^h f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt = 2\pi\int_0^h \sqrt{t}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4t}}\,dt$$

$$= 2\pi\int_0^h \sqrt{t+\tfrac{1}{4}}\,dt = \pi\int_0^h \sqrt{4t+1}\,dt = \tfrac{1}{4}\pi\int_0^h 4\sqrt{4t+1}\,dt = \tfrac{1}{4}\pi\int_1^{4h+1}\sqrt{x}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi\left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^{4h+1} = \tfrac{1}{6}\pi\left[x^{3/2}\right]_1^{4h+1} = \tfrac{1}{6}\pi\left((4h+1)^{3/2}-1\right).$$

Aufgabe 3

zu (a) Seien $\varphi_y, \psi_y : [-2,2] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi_y(x) = x^2$ und $\psi_y(x) = 4$. Diese Funktionen sind auf $[-2,2]$ stetig, und es gilt $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2\ ,\ \varphi_y(x) \le y \le \psi_y(x)\}$. Dies zeigt, dass B ein Normalbereich bezüglich der y-Achse ist. Um zu zeigen, dass B auch ein Normalbereich bezüglich der x-Achse ist, führen wir eine Äquivalenzumformung durch. Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$(x,y) \in B \Leftrightarrow (-2 \le x \le 2) \wedge (x^2 \le y \le 4) \Leftrightarrow (-2 \le x \le 2) \wedge (0 \le y \le 4) \wedge (x^2 \le y)$$

$$\Leftrightarrow (0 \le y \le 4) \wedge (x^2 \le y) \Leftrightarrow (0 \le y \le 4) \wedge (|x| \le \sqrt{y}) \Leftrightarrow (0 \le y \le 4) \wedge (-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y})$$

Definieren wir also $\varphi_x, \psi_x : [0,4] \to \mathbb{R}$ durch $\varphi_x(y) = -\sqrt{y}$ und $\psi_x(y) = \sqrt{y}$, dann gilt $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,4]\ ,\ \varphi_x(y) \le x \le \psi_x(y)\}$. Auch hier sind die Begrenzungsfunktionen auf dem gesamten Definitionsbereich $[0,4]$ stetig.

zu (b) Eine Randkurve für B ist gegeben durch $\gamma_- + \gamma_+$, bestehend aus den Teilkurven $\gamma_- : [-2,2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t,t^2)$ und $\gamma_+ : [-2,2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (-t,4)$.

zu (c) Da die Begrenzungsfunktionen φ_y und ψ_y nicht nur stetig, sondern sogar stetig differenzierbar sind, die stetigen Funktionen φ_x und ψ_x zumindest auf $]0,4]$ stetig differenzierbar sind und da F ein stetig differenzierbares Vektorfeld ist, ist der Gauß'sche Integralsatz der Ebene anwendbar und liefert die Gleichung $\int_\gamma \langle F, ds\rangle = \int_B \operatorname{div}(F)(x,y)\,d(x,y)$. Es ist $\operatorname{div}(F)(x,y) = 1+1 = 2$ für alle $(x,y) \in B$. Somit erhalten wir

$$\int_\gamma \langle F, ds\rangle = \int_B 2\,d(x,y) = \int_{-2}^2\left(\int_{\varphi_y(x)}^{\psi_y(x)} 2\,dy\right)dx = \int_{-2}^2\left(\int_{x^2}^4 2\,dy\right)dx =$$

$$\int_{-2}^2 2(4-x^2)\,dx = \int_{-2}^2 (8-2x^2)\,dx = \left[8x - \tfrac{2}{3}x^3\right]_{-2}^2$$

$$= 2\cdot(16-\tfrac{16}{3}) = 2\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 16 = \tfrac{64}{3}.$$