Lösung Globalübungsblatt 3

Aufgabe 1 1-Norm auf dem $\mathbb{R}^3$ $\|(x,y,z)\|_1 = |x|+|y|+|z|$

Oktaeder $O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\|_1 \leq 1\}$

zu (a) gesucht: $O(z)(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,y,z) \in O\} \subseteq \mathbb{R}$
für alle $y, z \in \mathbb{R}$

Bestimme zunächst $O(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z) \in O\}$
für jedes $z \in \mathbb{R}$ Sei also $z \in \mathbb{R}$.

Es gilt $O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|+|y|+|z| \leq 1\}$

1. Fall: $|z| > 1 \rightarrow |x|+|y|+|z| \leq 1$ für kein $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt
$\Longrightarrow O(z) = \emptyset$

2. Fall: $|z| \leq 1$ Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$(x,y) \in \mathcal{O}(z) \Longrightarrow (x,y,z) \in \mathcal{O} \Longrightarrow |x|+|y|+|z| \leq 1$

$\Longrightarrow |x|+|y| \leq 1-|z|$ also: $\mathcal{O}(z) = \{(x,y) \mid |x|+|y| \leq 1-|z|\}$

Sei nun $(y,z) \in \mathbb{R}^2$. 1. Fall: $|y|+|z| > 1$

Dann ist $|x|+|y|+|z| \leq 1$ für kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt $\Rightarrow$

$\mathcal{O}(y,z) = \emptyset$ 2. Fall: $|y|+|z| \leq 1$

Dann gilt die Äquivalenz $x \in \mathcal{O}(z)(y) \Longrightarrow (x,y) \in \mathcal{O}(z)$

$\overset{s.o.}{\Longleftrightarrow} |x|+|y| \leq 1-|z| \Longleftarrow |x| \leq 1-|y|-|z| \Longrightarrow$

$x \in [\,|y|+|z|-1,\ 1-|y|-|z|\,]$

Ergebnis: $\mathcal{O}(z)(y) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } |y|+|z| > 1 \\ [\,|y|+|z|-1,\ 1-|y|-|z|\,] & \text{sonst} \end{cases}$

zu (b) Bestimme zunächst $v_2(O(z))$ für alle $z \in \mathbb{R}$. Sei also $z \in \mathbb{R}$. 1. Fall: $|z| > 1$

s.o. $\Rightarrow O(z) = \emptyset \Rightarrow v_2(O(z)) = 0$

2. Fall: $|z| \leq 1$

Für jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| > 1 - |z|$ gilt $O(z)(y) = 0$ und somit $v_1(O(z)(y)) = 0$

Ansonsten gilt $v_1(O(z)(y)) =$

$v_1([|y| + |z| - 1, 1 - |z| - |y|]) =$

$(1 - |z| - |y|) - (|y| + |z| - 1) = 2(1 - |y| - |z|)$

Aufgabe

$z =$

$K =$

$A = K \setminus$

zu (a) ges.

$\rho_{zyl} =$ Zylinde

$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

(r, φ, z)

Cavalieri $\Rightarrow$ $V_2(\mathcal{O}(z)) = \int_{|z|-1}^{1-|z|} V_1(\mathcal{O}(z)(y))\,dy$

$$= \int_{|z|-1}^{1-|z|} 2(1-|y|-|z|)\,dy$$

$$= \int_{|z|-1}^{0} 2(1+y-|z|)\,dy + \int_{0}^{1-|z|} 2(1-y-|z|)\,dy$$

$$= 2\left[y+\tfrac{1}{2}y^2-|z|y\right]_{|z|-1}^{0} + 2\left[y-\tfrac{1}{2}y^2-|z|y\right]_{0}^{1-|z|}$$

$$= -2\left((|z|-1)(1-|z|)+\tfrac{1}{2}(|z|-1)^2\right)$$

$$+2\left((1-|z|)^2-\tfrac{1}{2}(|z|-1)^2\right)$$

$$= 2(1-|z|)\left(1-|z|-|z|+1\right) = 4(1-|z|)^2$$

Nochmalig

$V_3(\mathcal{O})$ =

$$4\int_{-1}^{1}(1-|z|$$

$$= 4\int_{-1}^{0}(1+2z$$

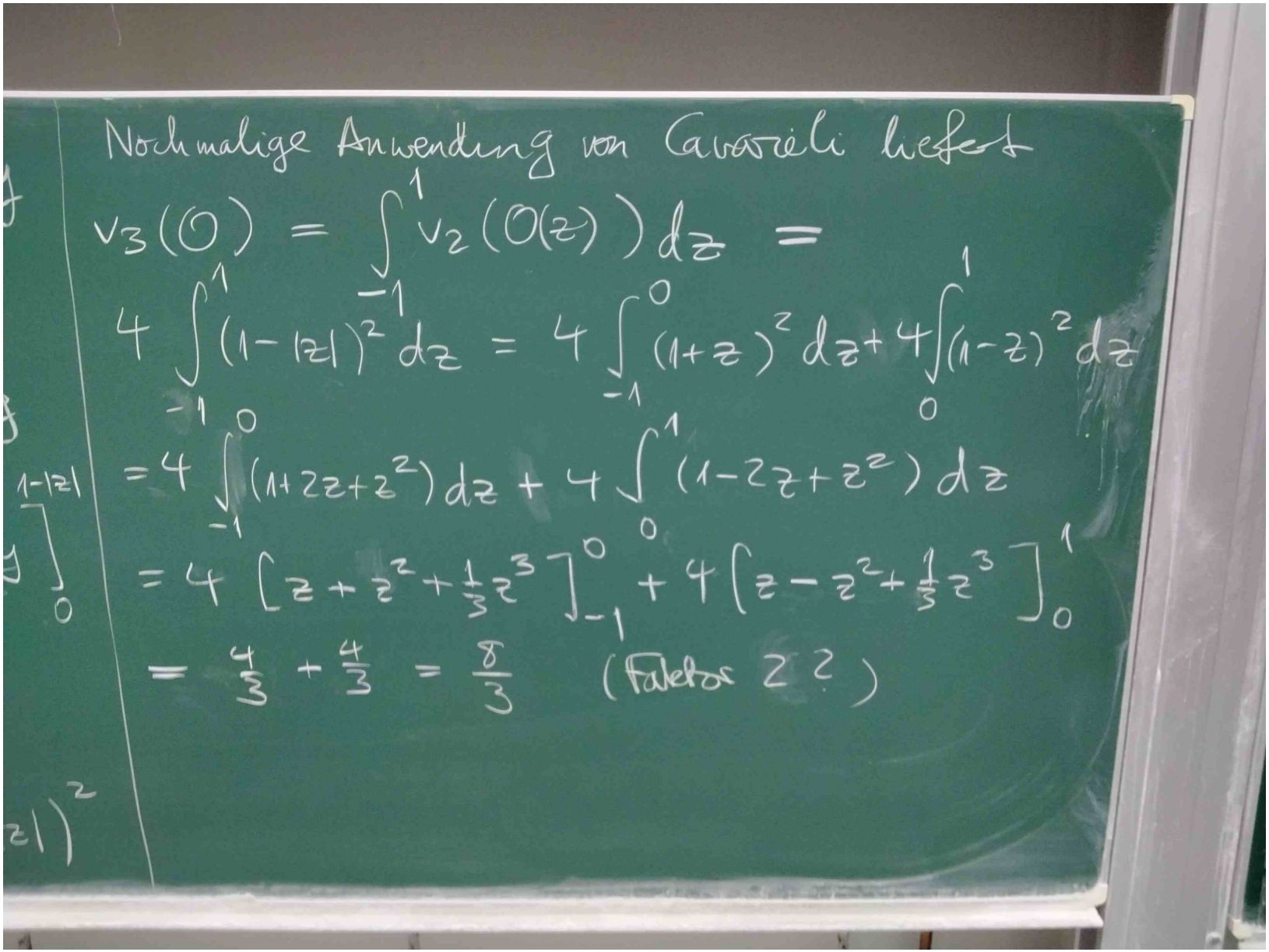
$$= 4\left[z+\right.$$

$$= \tfrac{4}{3}+\tfrac{4}{3}$$

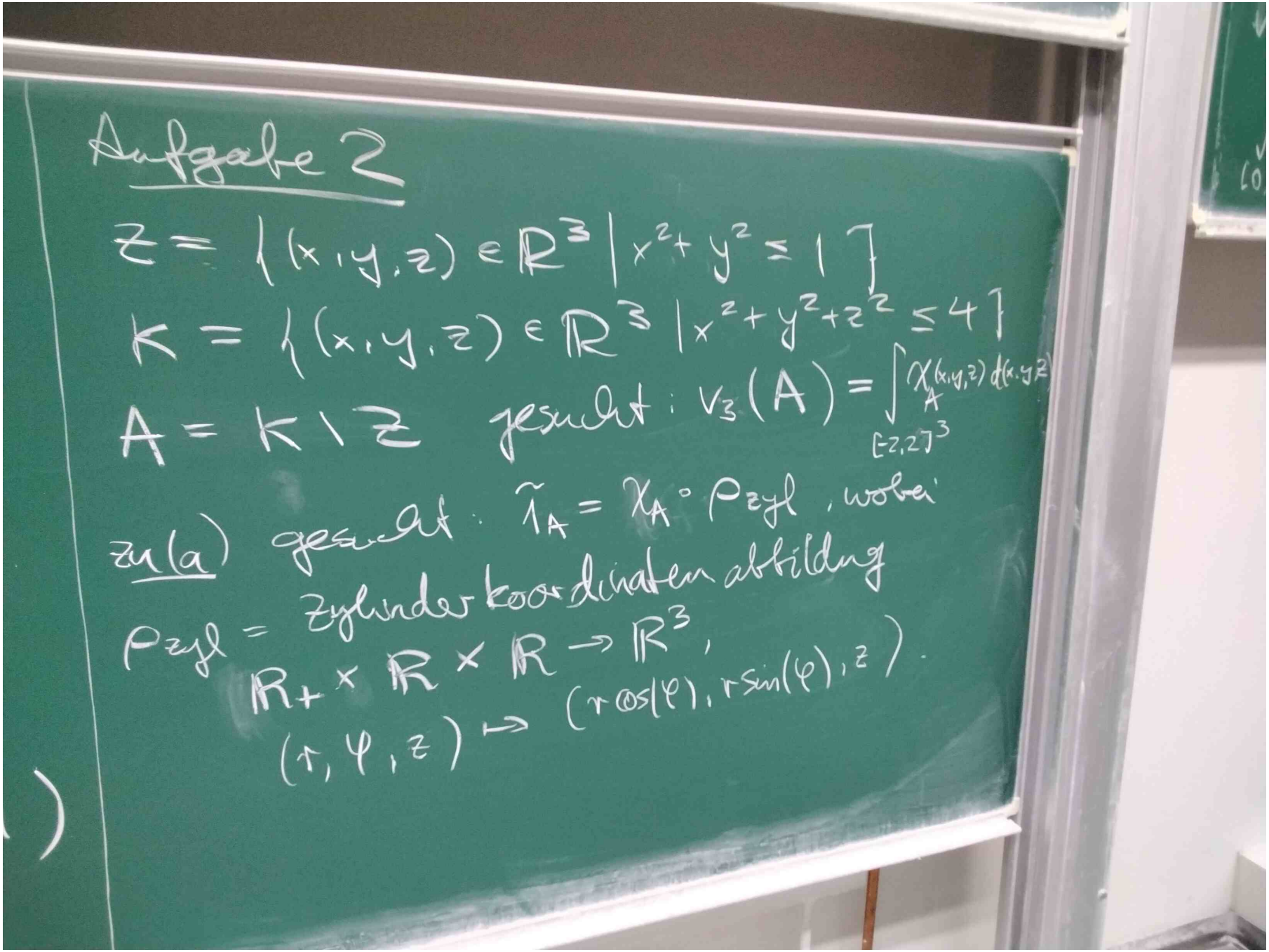
Hier hat sich im allerletzten Rechenschritt ein Vorzeichenfehler eingeschlichen. Die durchgestrichenen Terme heben sich nicht gegenseitig auf. Hier ist noch einmal die korrekte Rechnung aber der drittletzten Zeile:

$$
\begin{aligned}
&-2((|z|-1)(1-|z|)+\tfrac{1}{2}(|z|-1)^2)+2((1-|z|)^2-\tfrac{1}{2}(|z|-1)^2)\\
&= \quad (-2)(-(|z|-1)^2+\tfrac{1}{2}(|z|-1)^2)+2((|z|-1)^2-\tfrac{1}{2}(|z|-1)^2)\\
&= \quad (-2)(-\tfrac{1}{2}(|z|-1)^2)+2\cdot\tfrac{1}{2}(|z|-1)^2\\
&= \quad 2\cdot\tfrac{1}{2}(|z|-1)^2+2\cdot\tfrac{1}{2}(|z|-1)^2 \quad = \quad 2(|z|-1)^2.
\end{aligned}
$$

Die Rechnung auf der nächsten Tafel liefert somit das Ergebnis $v_3(O) = 2\int_{-1}^{1}(1-|z|^2)\,dz = \frac{4}{3}$, und nicht $\frac{8}{3}$.



richtiges Ergebnis: $v_3(O) = \frac{4}{3}$, siehe oben


Aufgabe 2
$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
$A = K \setminus Z$ gesucht: $V_3(A) = \int_{[-2,2]^3} \chi_A(x,y,z)\, d(x,y,z)$
zu (a) gesucht: $\tilde{\chi}_A = \chi_A \circ \rho_{zyl}$, wobei
ρ_{zyl} = Zylinderkoordinatenabbildung
$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
$(r, \varphi, z) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$.

$[0,2] \times [0,2\pi] \times [-2,2]$

Wir bestimmen zunächst χ_A auf $\mathbb{R}^3$.
Für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt die Äquivalenz
$\chi_A(x,y,z) = 1 \iff (x,y,z) \in A \iff (x,y,z) \in K$
und $(x,y,z) \notin Z \iff x^2+y^2+z^2 \leq 4 \wedge x^2+y^2 > 1$
Sei nun $(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$. Dann gilt die
Äquiv $\tilde{\chi}_A(r,\varphi,z) = 1 \iff (\chi_A \circ \Phi_{zyl})(r,\varphi,z) = 1$
$\iff \chi_A(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) = 1 \overset{\text{so}}{\iff}$
$(r\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\varphi))^2 + z^2 \leq 4 \wedge (r\cos(\varphi))^2 +$
$(r\sin(\varphi))^2 > 1 \iff r^2+z^2 \leq 4 \wedge r > 1$
$\iff z \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, und $1 < r \leq \sqrt{4-z^2}$

$\Rightarrow z \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, und

Ergebnis: $1_{\check{A}}(r, \varphi, z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in [-2,2],\ 1 \le r \le \sqrt{4-z^2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

zu (6) Berechnung des Volumens $v_3(A)$

$$v_3(A) = \int_{[-2,2]^3} \chi_A(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

Es gilt $\rho_{zyl}([0,2]\times[0,2\pi]\times[-2,2]) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 4,\ z \in [-2,2]\} \supseteq A$, somit

$$v_3(A) = \int_{\rho_{zyl}([0,2]\times[0,2\pi]\times[-2,2])} \chi_A(x,y,z)\, d(x,y,z) \overset{\text{Transformationssatz}}{=}$$

$$\int_{[0,2]\times[0,2\pi]\times[-2,2]} (\chi_A \circ \rho_{zyl})(r,\varphi,z)\, \underline{r}\, d(r,\varphi,z) \overset{s.o.}{=}$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\int_{1}^{\sqrt{4-z^2}} \left(\int_{0}^{2\pi} r \, d\varphi \right) dr \right) dz$$

$$= 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\int_{1}^{\sqrt{4-z^2}} r \, dr \right) dz =$$

$$2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\tfrac{1}{2} r^2 \right]_{1}^{\sqrt{4-z^2}} dz =$$

$$\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3 - z^2) \, dz = \pi \left[3z - \tfrac{1}{3} z^3 \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\pi \left(3 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \right) = 4\pi \sqrt{3}$$

Aufg

zu (b

$t \mapsto$

z.zg:

aber w

zur Stetig

γ als Ve

Nachweis d

Für alle t

$t^2 + t^4$

In der Übung hatte ich die Ungleichung zunächst nach r umgeformt, dabei aber die die Grenzen für r falsch gewählt. Das hatte zu einem falschen Ergebnis geführt. Man kann aber die Integration durchaus auch in der anderen Reihenfolge durchführen. Die korrekte Äquivalenzumformung lautet

$$r^2 + z^2 \leq 4 \text{ und } r > 1 \;\Leftrightarrow\; r \in]1, 2] \text{ und } |z| \leq \sqrt{4 - r^2}.$$

Man erhält dann mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} v_3(A) &= \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} (r\ d\varphi)\ dz \right) dr = 2\pi \int_1^2 r \left(\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} 1\, dz \right) dr \\ &= 4\pi \int_1^2 r \cdot \sqrt{4 - r^2}\, dr = -2\pi \int_1^2 (-2r)\sqrt{4 - r^2}\, dr \\ &= -2\pi \int_3^0 \sqrt{x}\, dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{x}\, dx = 2\pi \left[\tfrac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^3 \\ &= 2\pi \left(\tfrac{2}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \right) = 4\pi\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

zu (a) Am Anfang von § 4 haben wir festgestellt, dass stetig differenzierbare Funktionen lokal Lipschitz-stetig sind, wobei die Lipschitz-Konstante jeweils von der Ableitung abhängt. Ist insbesondere $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung und ist $L \in \mathbb{R}^+$ eine Konstante mit der Eigenschaft, dass $\|\gamma'(t)\|_\infty \leq L$ in allen Punkten erfüllt ist, in denen γ stetig differenzierbar ist, dann gilt $\|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\| \leq \sqrt{n}L(t_1 - t_0)$ für alle $t_0, t_1 \in I$.

Sei nun $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und L eine auf diese Weise definierte Konstante. Ist $\mathscr{Z} = \{t_1, ..., t_{m-1}\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, und setzen wir wie immer $t_0 = a$ und $t_m = b$, dann gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \ell(\gamma, \mathscr{Z}) &= \sum_{k=0}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \leq \sum_{k=0}^{m} \sqrt{n}L(t_k - t_{k-1}) \\ &= \sqrt{n}L(t_m - t_0) = \sqrt{n}L(b - a). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Menge $\{\ell(\gamma, \mathscr{Z}) \mid \mathscr{Z} \in \mathscr{Z}(a,b)\}$ beschränkt und γ somit rektifizierbar ist. Sei nun $\tilde{\ell}(\gamma)$ das Supremum dieser Menge, und beweisen wir die Gleichung

$$\tilde{\ell}(\gamma) \quad = \quad \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Sei $s(t) = \tilde{\ell}(\gamma|_{[a,t]})$ für alle $t \in [a,b]$. Es genügt zu zeigen, dass in jedem Punkt $t \in]a,b[$, in dem γ stetig differenzierbar ist, die Gleichung $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ erfüllt ist, denn dann erhalten wir

$$\tilde{\ell}(\gamma) \quad = \quad s(b) \quad = \quad s(b) - s(a) \quad = \quad \int_a^b s'(t)\, dt$$

$$= \quad \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.
Sei also $t_0 \in]a,b[$ ein Punkt, in dem γ stetig differenzierbar ist. Die zu beweisende Gleichung $s'(t_0) = \|\gamma'(t_0)\|$ ist äquivalent zu

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{1}{h}(s(t_0+h) - s(t_0)) - \|\gamma'(t_0)\| \right| \quad = \quad 0. \qquad (*)$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der stetigen Differenzierbarkeit von γ existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass $\|\gamma'(t) - \gamma'(t_0)\|_\infty < \varepsilon$ für alle $t \in [a, b]$ mit $|t - t_0| < \delta$ gilt. Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < h < \delta$ und $\mathscr{Z} = \{t_1, ..., t_{m-1}\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[t_0, t_0 + h]$. Setzen wir $t_m = t_0 + h$, und definieren wir die Hilfsfunktionen $\phi(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0)$ und $\psi(t) = \gamma(t) - \phi(t)$, dann gilt

$$|\ell(\gamma|_{[t_0,t_0+h]}, \mathscr{Z}) - \ell(\phi, \mathscr{Z})| \quad \leq$$

$$\sum_{k=1}^{m} (\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| - \|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\|) \quad \leq$$

$$\sum_{k=1}^{m} (\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) - \phi(t_k) + \phi(t_{k-1})\|) \quad =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \|\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})\| \quad \leq$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sqrt{n}\varepsilon(t_k - t_{k-1}) \quad = \quad \sqrt{n}\varepsilon(t_m - t_0) \quad = \quad \sqrt{n}\varepsilon h.$$

Dabei wurden im drittletzten Schritt die Lipschitz-Stetigkeit von ψ im Zusammenhang mit der Abschätzung

$$\|\psi'(t)\|_\infty = \|\gamma'(t) - \phi'(t)\|_\infty = \|\gamma'(t) - \gamma'(t_0)\|_\infty < \varepsilon$$

für $t \in [t_0, t_0 + h]$ verwendet. Es gilt weiter

$$\begin{aligned} \ell(\phi, \mathscr{Z}) &= \sum_{k=1}^{m} \|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1}) \|\gamma'(t_0)\| \\ &= (t_m - t_0)\|\gamma'(t_0)\| = h\|\gamma'(t_0)\|. \end{aligned}$$

Auf Grund der Definition von $\tilde{\ell}(\gamma|_{[t_0,t_0+h]})$ als Supremum existiert eine Zerlegung $\mathscr{Z}$ mit der Abschätzung

$$s(t_0 + h) - s(t_0) = \tilde{\ell}(\gamma|_{[t_0,t_0+h]}) - \ell(\gamma|_{[t_0,t_0+h]}, \mathscr{Z}) < \sqrt{n}\varepsilon h.$$

Insgesamt erhalten wir damit die Abschätzung

$$\begin{aligned} |s(t_0+h) - s(t_0) - h\|\gamma'(t_0)\|| &= |\tilde{\ell}(\gamma|_{[t_0,t_0+h]}) - \ell(\phi, \mathscr{Z})| \\ \leq |\tilde{\ell}(\gamma|_{[t_0,t_0+h]}) - \ell(\gamma|_{[t_0,t_0+h]}, \mathscr{Z})| &+ |\ell(\gamma|_{[t_0,t_0+h]}, \mathscr{Z}) - \ell(\phi, \mathscr{Z})| \\ < \sqrt{n}\varepsilon h + \sqrt{n}\varepsilon h &= 2\sqrt{n}\varepsilon h. \end{aligned}$$

Genauso beweist die Abschätzung im Fall $-\delta < h < 0$. Damit ist der Nachweis von (*) abgeschlossen.

Aufgabe 3

zu (b) gegeben: $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \begin{cases} \left(t, t^2 \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right)\right) & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ (0,0) & \text{sonst} \end{cases}$$

z.zg: γ ist ein Weg (d.h. eine stetige Abb.) aber nicht rektifizierbar

zur Stetigkeit: Auf $]0,1]$ ist γ stetig, da γ als Verknüpfung stetiger Fkt. dargestellt wird.

Nachweis der Stetigkeit im Nullpunkt:

Für alle $t \in \mathbb{R}^+$ gilt $\left\| \left(t, t^2 \cos\left(\frac{\pi}{t}\right)\right) \right\|_2^2 = t^2 + t^4 \cos\left(\frac{\pi}{t}\right)^2 \leq t^2 + t^4$.

falls $z = (t_1, \dots, t_{n-1}, \dots)$

$\Rightarrow \|(t, t^2 \cos(\frac{\pi}{t}))\|_2 \leq \sqrt{t^2 + t^4}$

Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim t_n = 0$ $t \mapsto \sqrt{t^2 + t^4}$ stetig im Nullpunkt $\Rightarrow \lim \sqrt{t_n^2 + t_n^4} = \sqrt{0^2 + 0^4} = 0$

Sandwich-Lemma $\Rightarrow \lim \|\gamma(t_n)\| = 1$

$\lim \|(t_n, t_n^2 \cos(\frac{\pi}{t_n}))\|_2 = 0 \rightarrow$

$\lim_{n \to \infty} \gamma(t_n) = (0,0) = \gamma(0)$

Nicht-Rektifizierbarkeit:

z.zg.: $l[(\gamma, Z) \mid Z \in \mathcal{Z}(0,1)]$ ist unbeschränkt, wobei

$$l(\gamma, Z) = \sum_{k=1}^{n} \| \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \|$$

falls $Z = (t_1, \dots, t_{n-1})$, $t_0 = 0$, $t_n = 1$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt jeweils

$$\gamma\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\cos(n\pi)\right) =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, (-1)^n \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \left\| \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \right\| \geq \frac{1}{n}$$

Seien nun $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, betrachte

$$Z = \left\{ \frac{1}{\sqrt{k}} \mid m \leq k \leq n \right\}$$

$$\Rightarrow l(\gamma, Z) \geq \sum_{k=m}^{n-1} \| \gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1}) \|$$

$$\geq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Lassen wir nun $n \to \infty$ laufen, erhalten wir bel. große Zahlen. Die Menge $\{ l(\gamma, Z) \mid Z \in \mathcal{Z}((0,1)) \}$ ist also unbeschränkt.