Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Lösung Blatt 2 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Auf der Menge $[0,1]$ ist die Funktion $f(x) = x^2$ Lipschitz-stetig. Sind nämlich $u, v \in [0,1]$ mit $u < v$ vorgegeben, dann existiert laut Mittelwertsatz ein $w \in \,]u,v[$ mit $f'(w)(v-u) = f(v) - f(u)$. Wegen $f'(x) = 2x$ ist $|f'(w)| \le 2$ und somit $|f(v) - f(u)| \le |f'(w)||v-u| \le 2|v-u|$. Also ist die 2 eine Lipschitz-Kontante von f.

Nehmen wir nun an, f wäre auf ganz $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, mit einer Lipschitz-Konstanten $L \in \mathbb{R}^+$. O.B.d.A. können wir $L > 1$ annahmen. Dann müsste insbesondere $x^2 = |f(x) - f(0)| \le L|x - 0| = Lx$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gelten. Setzen wir $x = 2L$, dann erhalten wir den Widerspruch $(2L)^2 = 4L^2 \le 2L^2 = L(2L) \Leftrightarrow 4 \le 2$. Also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ nicht Lipschitz-stetig.

Die Funktion g dagegen ist auf ganz $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, mit Lipschitz-Konstante 3, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|g(x) - g(y)| = |(3x+5) - (3y+5)| = 3|x-y|$.

zu (b) Die eindimensionale Substitutionsregel hat die Form

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \quad = \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \quad ,$$

wobei f eine stetige Funktion und φ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion bezeichnet. Beim Übergang zur mehrdimensionalen Substitutionsregel ersetzt man die Intervallgrenzen a und b links durch eine kompakte Jordan-messbare Teilmenge T, rechts integriert man entsprechend über $\varphi(T)$. Der Faktor $\varphi'(t)$ ist durch den Ausdruck $|\det \varphi'(t)|$ zu ersetzen.

zu (c) Die Bildmenge $\phi_A(Q)$ ist das Parallelotop, das von den Spaltenvektoren der Matrix A aufgespannt wird. Die Gleichung $v(\phi_A(Q)) = |\det(A)|$ erhält man, indem man die mehrdimensionale Substitutionsregel auf die Jordan-messbare Menge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, die konstante Funktion $f = 1$ und die Substitutionsfunktion $\varphi = \phi_A$ mit der Ableitung gegeben durch $\varphi'(x) = \phi_A$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ anwendet.

zu (d) Man verwendet die mehrdimensionale Substitutionsregel mit den Kugelkoordinaten als Substitutionsfunktion. Auf diese Weise lässt sich das Integral auf die Form

$$\int_{[0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \frac{r^2 \sin(\vartheta)}{r^3+1}\, d(r,\vartheta,\varphi) \qquad \text{bringen.}$$

Aufgabe 1

zu (a) Die partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen $F_1(x,y) = e^x \cos(y + x^3)$ und $F_2(x,y) = e^x \sin(y + x^3)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\partial_1 F_1(x,y) &= e^x \cos(y+x^3) - 3x^2 e^x \sin(y+x^3) \\
\partial_2 F_1(x,y) &= -e^x \sin(y+x^3) \\
\partial_1 F_2(x,y) &= e^x \sin(y+x^3) + 3x^2 e^x \cos(y+x^3) \\
\partial_2 F_2(x,y) &= e^x \cos(y+x^3).
\end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix im Punkt (x, y) hat also die Form

$$F'(x,y) \quad = \quad e^x \begin{pmatrix} \cos(y+x^3) - 3x^2\sin(y+x^3) & -\sin(y+x^3) \\ \sin(y+x^3) + 3x^2\cos(y+x^3) & \cos(y+x^3) \end{pmatrix}.$$

zu (b) Nach Voraussetzung gilt $M = F(D)$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x \le 1\}$. Dabei ist D nach Definition ein Normalbereich bezüglich der x-Achse mit den Begrenungsfunktionen $\psi_1, \psi_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegegeben durch $\psi_1(x) = 0$ und $\psi_2(x) = x$ für alle $x \in [0, 1]$. Wir berechnen das Volumen von M, indem wir die mehrdimensionale Substitutionsregel auf die Substitutionsfunktion F anwenden. Dazu berechnen wir die Funktionaldeterminante, also die Determinante der Substitutionsfunktion, in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} \cos(y+x^3) - 3x^2\sin(y+x^3) & -\sin(y+x^3) \\ \sin(y+x^3) + 3x^2\cos(y+x^3) & \cos(y+x^3) \end{pmatrix} \quad =$$

$$(\cos(y+x^3) - 3x^2\sin(y+x^3))\cos(y+x^3) + \sin(y+x^3)(\sin(y+x^3) + 3x^2\cos(y+x^3)) \quad =$$

$$\cos(y+x^3)^2 - 3x^2\sin(y+x^3)\cos(y+x^3) + 3x^2\sin(y+x^3)\cos(y+x^3) + \sin(y+x^3)^2$$

$$= \quad \cos(y+x^3)^2 + \sin(y+x^3)^2 \quad = \quad 1$$

und somit

$$\det F'(x,y) \quad = \quad (e^x)^2 \det \begin{pmatrix} \cos(y+x^3) - 3x^2\sin(y+x^3) & -\sin(y+x^3) \\ \sin(y+x^3) + 3x^2\cos(y+x^3) & \cos(y+x^3) \end{pmatrix}$$

$$= \quad e^{2x} \cdot 1 \quad = \quad e^{2x}.$$

Durch Anwendung der Substitutionsregel auf die konstante Funktion 1 und die Substitutionsfunktion F erhalten wir nun

$$v_2(M) \quad = \quad v_2(F(D)) \quad = \quad \int_{F(D)} 1 \; d(x,y) \quad = \quad \int_D 1 \cdot |\det F'(x,y)| \; d(x,y) \quad =$$

$$\int_D e^{2x} \; dx \quad = \quad \int_0^1 \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} e^{2x} \; dy \right) dx \quad = \quad \int_0^1 \left(\int_0^x e^{2x} y \; dy \right) dx \quad = \quad \int_0^1 \left[e^{2x} y \right]_0^x \; dx \quad =$$

$$\int_0^1 x e^{2x} \; dx \quad = \quad \left[\tfrac{1}{2} x e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \tfrac{1}{2} e^{2x} \; dx \quad = \quad \left[\tfrac{1}{2} x e^{2x} - \tfrac{1}{4} e^{2x} \right]_0^1$$

$$= \quad \left[\tfrac{1}{4}(2x-1)e^{2x} \right]_0^1 \quad = \quad \tfrac{1}{4}(e^2+1).$$

Dabei wurde am Ende der Rechnung, im neunten Schritt, partielle Integration angewendet.

Aufgabe 2

zu (a) Wir zeigen, dass die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ auf ganz $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt auf Grund der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(y)| \quad = \quad ||x| - |y|| \quad \le \quad |x-y| \quad = \quad L|x-y|.$$

zu (b) Nach Voraussetzung existiert eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f'(x)\| \le \gamma$ für alle $x \in U$, wobei $\|\cdot\|$ die Operatornorm bezeichnet. Seien nun $x, y \in U$ vorgegeben. Weil U konvex ist, ist die Verbindungsstrecke $[x, y]$ ganz in U enthalten. Nach dem Mittelwertsatz für Richtungsableitungen gibt es ein $z \in \,]x, y[$ mit $\partial_v f(z) = f(y) - f(x)$, wobei $v = y - x$ ist. Da die Richtungsableitung durch $\partial_v f(z) = f'(z)(v)$ mit der partiellen Ableitung zusammenhäng, erhalten wir nach Definition der Operatornorm die Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| \quad = \quad |\partial_v f(z)| \quad = \quad |f'(z)(v)| \quad \le \quad \|f'(z)\|\|v\| \quad \le \quad \gamma\|x-y\|.$$

Dies zeigt, dass f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = \gamma$ ist.

Aufgabe 3

zu (a) Auf Grund des Transformationssatzes gilt für jede kompakte Jordan-messbare Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und jeden Diffeomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$\int_{\varphi(B)} f(x)\,dx \quad = \quad \int_B (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)|\,dt.$$

Dies wenden wir auf $B = \phi_A^{-1}(Q)$ und $\varphi = \phi_A$ an. Da ϕ_A linear ist, gilt $\phi_A'(t) = \phi_A$ für alle $t \in \mathbb{R}^n$. Es folgt $\det \phi_A'(t) = \det \phi_A = \det(A)$ für alle $t \in \mathbb{R}^n$. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\int_Q f(x)\,dx \quad = \quad \int_B (f \circ \phi_A)(t) |\det \phi_A'(t)|\,dt \quad = \quad |\det A| \int_{\phi_A^{-1}(Q)} (f \circ \phi_A)(t)\,dt$$

und somit $\int_{\phi_A^{-1}(Q)} (f \circ \phi_A)(t)\,dt = |\det(A)|^{-1} \int_Q f(x)\,dx$.

zu (b) Die Ableitung der Substitutionsfunktion $\varphi(t) = \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ ist

$$\varphi'(t) \quad = \quad \frac{\cos(t)^2 - \sin(t)(-\sin(t))}{\cos(t)^2} \quad = \quad \frac{\cos(t)^2 + \sin(t)^2}{\cos(t)^2} \quad = \quad \frac{1}{\cos(t)^2}.$$

Die eindimensionale Substitutionsregel liefert für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ jeweils

$$\int_a^b \frac{dx}{1 + x^2} \quad = \quad \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \frac{\varphi'(t)}{1 + \varphi(t)}\,dt \quad = \quad \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \frac{1}{\cos(t)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin(t)^2}{\cos(t)^2}}\,dt \quad =$$

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} 1\,dt \quad = \quad \varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a) \quad = \quad \arctan(b) - \arctan(a).$$

zu (c) Auf Grund der Form des Integrals und des Definitionsbereichs betrachten wir die Substitutionsfunktion

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \quad = \quad \begin{pmatrix} 2x + 5y \\ -x + 3y \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich also um die Abbildung ϕ_A mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Es ist $M = \phi^{-1}([0,1]^2)$, denn für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$(x, y) \in \phi^{-1}([0,1]^2) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x, y) \in [0,1]^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 2x + 5y \leq 1 \text{ und } 0 \leq -x + 3y \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in M.$$

Definieren wir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = (1 + x^2)^{-1}(1 + y^2)^{-1}$, dann gilt

$$(f \circ \phi)(x, y) \quad = \quad \frac{1}{(1 + (2x + 5y)^2)(1 + (-x + 3y)^2)}.$$

Nach Teil (a) und (b) gilt also

$$\int_M \frac{d(x,y)}{(1+(2x+5y)^2)(1+(-x+3y)^2)} \quad = \quad \int_{\phi^{-1}([0,1]^2)} (f\circ\phi)(x,y)\,d(x,y) \quad =$$

$$\frac{1}{|\det(A)|}\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,d(x,y) \quad = \quad \tfrac{1}{11}\int_{[0,1]^2}(1+x^2)^{-1}(1+y^2)^{-1}\,d(x,y) \quad =$$

$$\tfrac{1}{11}\int_0^1 (1+x^2)^{-1}\left(\int_0^1 (1+y^2)^{-1}\,dy\right)\,dx \quad = \quad \tfrac{1}{11}\int_0^1 (1+x^2)^{-1}\,(\arctan(1)-\arctan(0))\,dx \quad =$$

$$\tfrac{1}{11}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\int_0^1 (1+x^2)^{-1}\,dx \quad = \quad \tfrac{1}{11}\cdot\frac{\pi^2}{16} \quad = \quad \frac{\pi^2}{176}.$$