

$$\in \rho_{\text{Kug}}([0, s] \times [-h, h] \times [0, 2\pi])$$

Globalübungsblatt 2

Aufgabe 1

$B \subseteq \mathbb{R}^3$ Jordan-messbar Trägheitsmoment von B
 bzgl. der z -Achse $I(B) = \int_B (x^2 + y^2) d(h, y, z)$

Seien $h, s \in \mathbb{R}^+$

zu (a) gesucht: $I(B)$ für $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid$
 $-h \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq s^2\}$ (Zylinder der Länge $2h$,
 Randflächen von Radius s)

Zylinderkoord. $\text{A}_{\text{Zyl}}: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(r, l, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), l)$

Beh. $\text{A}_{\text{Zyl}}([0, s] \times [-h, h] \times [0, 2\pi]) = B$

" $\subseteq$ " Sei $(r, l, \varphi) \in [0, s] \times [-h, h] \times [0, 2\pi]$

$D \subseteq \mathbb{R}^3$ Jordan-messbar Trägheitsmoment von B
bzgl der z -Achse $I(B) = \int_B (x^2 + y^2) d(x,y,z)$
Sei $h \in \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow \rho_{\text{zyl}}(r, l, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), l) \quad r \in [0, s]$$

$$\text{und } -h \leq l \leq h, (r \cos(\varphi))^2 + (r \sin(\varphi))^2 = r^2 \leq s^2$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{zyl}}(r, l, \varphi) \in B$$

$$, \exists' \text{ Sei } (x, y, z) \in B \Rightarrow x^2 + y^2 \leq s^2, -h \leq z \leq h$$

$$\text{Setze } r := \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \Rightarrow \exists \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\text{mit } x = r \cos(\varphi), y = r \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{Kug}}(r, z, \varphi) = (x, y, z) \text{ und}$$

$$(r, z, \varphi) \in [0, s] \times [-h, h] \times [0, 2\pi] \text{ wegen}$$

$$-h \leq z \leq h, \varphi \in [0, 2\pi], x^2 + y^2 \leq s^2 \Rightarrow r \leq s$$

$$\Rightarrow r \in [0, s] \text{ also: } (x, y, z) = \rho_{\text{Kug}}(r, z, \varphi)$$

$$\in \rho_{\text{Kug}}([0, s] \times [-h, h] \times [0, 2\pi])$$

Sei $T = [0, s] \times [-h, h] \times [0, 2\pi]$.

Transformationsrate $\Rightarrow$

$$\int_B (x^2 + y^2) d(x, y, z) = \int_T ((r \cos(\varphi))^2 + (r \sin(\varphi))^2)$$

$$\cdot r d(r, l, \varphi) =$$

$$\int_0^s \left(\int_{-h}^h \left(\int_0^{2\pi} r^3 d\varphi \right) dl \right) dr =$$

$$2\pi \int_0^s \left(\int_{-h}^h r^3 dl \right) dr = 4\pi h \int_0^s r^3 dr =$$

$$4\pi h \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^s = 4\pi h \cdot \frac{1}{4} s^4 = \pi h s^4$$

unbes

$$\int_T r^3$$

$$= \int_0^s$$

$$\int_0^s \left(\int_{-h}^h$$

$$\pi \int_0^s \left(\int_{-h}^h$$

$$= 2\pi h$$

$$\rightarrow \int_B (x^2 + y^2)$$

zu (b) ges.: $I(B)$ für $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid$
 $-h \leq y \leq h, x^2 + z^2 \leq s^2\}$

Vorgehensweise die „modifizierten Zylinderkoordinat“

$$\tilde{\rho}: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, l, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), l, r \sin(\varphi))$$

$$\tilde{\rho}'(r, l, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -r \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \tilde{\rho}'(r, l, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= r \quad \forall (r, l, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$$

↑
Laplace 2. Zeile

$$\text{Setze } T = [0, s] \times [-h, h] \times [0, 2\pi] \Rightarrow \tilde{\rho}(T) = B$$

Transformationsatz $\Rightarrow$

$$\int_B (x^2 + y^2) d(x, y, z) = \int_T (r^2 \cos(\varphi)^2 + l^2) \cdot r d(r, l, \varphi)$$

$$= \int_T r^3 \cos(\varphi)^2 d(r, l, \varphi) + \int_T r l^2 d(r, l, \varphi)$$

$$\int_T r l^2 d(r, l, \varphi) = \int_0^S \left(\int_{-h}^h \left(\int_0^{2\pi} r l^2 d\varphi \right) dl \right) dr$$

$$(*) = 2\pi \int_0^S r \left(\int_{-h}^h l^2 dl \right) dr =$$

$$2\pi \int_0^S r \left[\frac{1}{3} l^3 \right]_{-h}^h dr = 2\pi \frac{2}{3} h^3 \int_0^S r dr$$

$$= 2\pi \frac{2}{3} h^3 \frac{1}{2} r^2 = \frac{2}{3} \pi r^2 h^3$$

$\in B$

$0 \leq z \leq f(x, y)$

unbestimmtes Integral: $\int \cos(x)^2 dx = \frac{1}{2} \sin(x) \cos(x) + \frac{1}{2} x$

$$\int_T r^3 \cos(\varphi)^2 d(r, l, \varphi)$$

$$= \int_0^s \left(\int_{-h}^h \left(\int_0^{2\pi} r^3 \cos(\varphi)^2 d\varphi \right) dl \right) dr =$$

$$\int_0^s \left(\int_{-h}^h r^3 \left[\frac{1}{2} \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \frac{1}{2} \varphi \right]_0^{2\pi} dl \right) dr =$$

$$\pi \int_0^s \left(\int_{-h}^h r^3 dl \right) dr = 2\pi h \int_0^s r^3 dr$$

$$= 2\pi h \frac{1}{4} s^4 = \frac{1}{2} \pi h s^4$$

$$\Rightarrow \int_B (x^2 + y^2) d(x, y, z) = \frac{2}{3} \pi r^3 h^3 + \frac{1}{2} \pi h s^4$$

$$\sqrt{s^2 - (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2}$$

Aufgabe 2 Rekursionsformeln für unbestimmte Integrale

$$(i) \quad \int \sin(x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int \sin(x)^{n-2} dx - \frac{1}{n} \cos(x) \sin(x)^{n-1}$$

$$(ii) \quad \int \cos(x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int \cos(x)^{n-2} dx + \frac{1}{n} \sin(x) \cos(x)^{n-1}$$

$$(ii), \text{ angewendet auf } n=3 \Rightarrow \int \cos(x)^3 dx = \\ \frac{2}{3} \int \cos(x) dx + \frac{1}{3} \sin(x) \cos(x)^2 = \\ \frac{1}{3} \sin(x) \cos(x)^2 + \frac{2}{3} \sin(x)$$

$$\text{Beweis von (ii)} \quad \int \cos(x)^n dx = \int \overset{\uparrow}{\cos(x)} \cdot \overset{\downarrow}{\cos(x)^{n-1}} dx \\ = -\sin(x) \cos(x)^{n-1} - \int \sin(x) (n-1) (-\sin(x)) \cdot \cos(x)^{n-2} dx$$

(Dieselbe Rechnung in den üblichen Kugelkoordinaten finden Sie auf den hinten angehängten Latex-Seiten.)

Beweis von iii) $\int \cos(x)^n dx = \int \cos(x) \cdot \cos(x)^{n-1} dx$

$$= \sin(x) \cos(x)^{n-1} + (n-1) \int \sin(x)^2 \cos(x)^{n-2} dx$$

$$= \sin(x) \cos(x)^{n-1} + (n-1) \int (1 - \cos(x)^2) \cos(x)^{n-2} dx$$

$$= \sin(x) \cos(x)^{n-1} + (n-1) \int \cos(x)^{n-2} dx$$

$$- (n-1) \int \cos(x)^n dx \xrightarrow{\text{umformen}}$$

$$n \int \cos(x)^n dx = \sin(x) \cos(x)^{n-1} + (n-1) \int \cos(x)^{n-2} dx$$

$$\Rightarrow \int \cos(x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int \cos(x)^{n-2} dx + \frac{1}{n} \sin(x) \cos(x)^{n-1}$$

geg. Einheitskugel $K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2, \quad \rho(r, \vartheta, \varphi) =$$

$$(r \cos(\vartheta) \cos(\varphi), r \cos(\vartheta) \sin(\varphi), r \sin(\vartheta))$$

$$\det \rho'(r, \vartheta, \varphi) = -r^2 \cos(\vartheta)$$

$$\text{Setze } T = [0, 1] \times [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \times [0, 2\pi] \Rightarrow \rho(T) = K$$

$$\text{Transformationsatz} \Rightarrow \int_K f(x, y, z) d(x, y, z) =$$

$$\int_T (f \circ \rho)(r, \vartheta, \varphi) \cdot r^2 \cos(\vartheta) d(r, \vartheta, \varphi) =$$

$$\int_T r^2 \cos(\vartheta)^2 \cdot r^2 \cos(\vartheta) d(r, \vartheta, \varphi) \stackrel{=}{=}$$

$$\int_T r^4 \cos(\vartheta)^3 d(r, \vartheta, \varphi) = \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^4 \cos(\vartheta)^3 d\varphi d\vartheta \right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^4 \cdot \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\vartheta)^3 d\vartheta \right) dr =$$

$$2\pi \int_0^1 r^4 \left[\frac{1}{3} \sin(x) \cos(x)^2 + \frac{2}{3} \sin(x) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} dr =$$

$$2\pi \cdot \frac{4}{3} \int_0^1 r^4 dr = 2\pi \frac{4}{3} \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \pi$$

Aufgabe 3

geg: $R, s \in \mathbb{R}^+, s < R$,

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq s, R - \sqrt{s^2 - z^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + \sqrt{s^2 - z^2}\}$$

zu (a) z. zsg:



$$T = \Lambda(f) \text{ für } f: B \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{s^2 - (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2}$$

$$\text{wobei } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |R - \sqrt{x^2 + y^2}| \leq s\}$$

$$\text{Sei } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad z, z \geq 0.$$

$$(x, y, z) \in \Lambda(f) \Leftrightarrow (x, y, z) \in T$$

Es gilt:

$$(x, y, z) \in \Lambda(f) \Leftrightarrow (x, y) \in B \\ \text{mit } 0 \leq z \leq f(x, y)$$

Für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $(x, y) \in B$
gilt die Äquivalenz

$$0 \leq z \leq f(x, y) \Leftrightarrow 0 \leq z \leq \sqrt{s^2 - (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2}$$

$$\Leftrightarrow z^2 \leq s^2 - (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2$$

$$\Leftrightarrow (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 \leq s^2 - z^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq z \leq s \wedge |R - \sqrt{x^2 + y^2}| \leq \sqrt{s^2 - z^2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq z \leq s \wedge R - \sqrt{s^2 - z^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + \sqrt{s^2 - z^2}$$

Damit ist " $\Rightarrow$ " gezeigt.

" $\Leftarrow$ " Vor. $(x, y, z) \in T \Rightarrow$

$$(0 \leq z \leq s, R - \sqrt{s^2 - z^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + \sqrt{s^2 - z^2}) \quad (*)$$

$$\rightarrow R - s \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + s$$

$$\rightarrow |R - \sqrt{x^2 + y^2}| \leq s \Rightarrow (x, y) \in B$$

Auf Grund des Äquiv. folgt aus $(*)$ auch $0 \leq z \leq s \Leftrightarrow (x, y, z) \in \Lambda(P)$

(Teil (b) befindet sich im nachfolgenden Latex-Teil.)

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Lösung Blatt 2 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 2

Auf dem Globalübungsblatt war eine andere Kugelkoordinaten-Abbildung angegeben worden also die bisher verwendete. Wir rechnen dieselbe Aufgabe hier noch einmal mit den „herkömmlichen“ Kugelkoordinaten durch. Diese ist gegeben durch $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(r, \vartheta, \varphi) \mapsto (r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), r \cos(\vartheta))$, mit dem Funktionaldeterminantenbetrag $|\det \rho'(r, \vartheta, \varphi)| = r^2 \sin(\vartheta)$. Setzen wir $T = [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, dann gilt $\rho(T) = K$. Wir benötigen für die Rechnung noch das unbestimmte Integral der Funktion $x \mapsto \sin(x)^3$; auf Grund der Rekursionsformel aus der Angabe gilt

$$\int \sin(x)^3 dx = \frac{2}{3} \int \sin(x) dx - \frac{1}{3} \cos(x) \sin(x)^2 = -\frac{1}{3} \cos(x) \sin(x)^2 - \frac{2}{3} \cos(x).$$

Mit dem Transformationssatz erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_K f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_T (f \circ \rho)(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin(\vartheta) d(r, \vartheta, \varphi) = \\ \int_T (r^2 \sin(\vartheta)^2 \cos(\varphi)^2 + r^2 \sin(\vartheta)^2 \sin(\varphi)^2) \cdot r^2 \sin(\vartheta) d(r, \vartheta, \varphi) &= \int_T r^2 \sin(\vartheta)^2 \cdot r^2 \sin(\vartheta) d(r, \vartheta, \varphi) = \\ \int_T r^4 \sin(\vartheta)^3 d(r, \vartheta, \varphi) &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} r^4 \sin(\vartheta)^3 d\varphi \right) d\vartheta \right) dr = \\ 2\pi \int_0^1 r^4 \left(\int_0^\pi \sin(\vartheta)^3 d\vartheta \right) dr &= 2\pi \int_0^1 r^4 \left[-\frac{1}{3} \cos(x) \sin(x)^2 - \frac{2}{3} \cos(x) \right]_0^\pi dr = \\ 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \int_0^1 r^4 dr &= 2\pi \cdot \frac{4}{3} \left[\frac{1}{5} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

zu (a) In der Aufgabenstellung war der Definitionsbereich der Funktion f fälschlicherweise mit $\mathbb{R}^2$ angegeben worden. Um wirklich die Menge T als Ordinatenmenge zu bekommen (und nicht zusätzlich noch die gesamte xy -Ebene), muss als Definitionsbereich von f die Teilmenge $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |R - \sqrt{x^2 + y^2}| \leq s\}$ gewählt werden. Wir zeigen nun zunächst, dass für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ unter der Voraussetzung $(x, y) \in B$ die Äquivalenz $(x, y, z) \in \Lambda(f) \Leftrightarrow (x, y, z) \in T$ gilt. Aus $(x, y) \in B$ folgt, dass $\sqrt{x^2 + y^2} \leq R + s$ und $s^2 \geq (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2$ gilt, durch $\sqrt{s^2 - (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2}$ also eine reelle Zahl definiert ist. Diese Äquivalenz erhält man nun durch die Umformungen

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \Lambda(f) &\Leftrightarrow 0 \leq z \leq f(x, y) \Leftrightarrow 0 \leq z \leq \sqrt{s^2 - (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2} \Leftrightarrow \\ 0 \leq z \leq s \text{ und } z^2 &\leq s^2 - (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 \Leftrightarrow \\ 0 \leq z \leq s \text{ und } (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 &\leq s^2 - z^2 \Leftrightarrow \\ 0 \leq z \leq s \text{ und } |R - \sqrt{x^2 + y^2}| &\leq \sqrt{s^2 - z^2} \Leftrightarrow \\ 0 \leq z \leq s \text{ und } R - \sqrt{s^2 - z^2} &\leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + \sqrt{s^2 - z^2} \Leftrightarrow (x, y, z) \in T. \end{aligned}$$

Nun können wir die Gleichung $\Lambda(f) = T$ beweisen. Ist $(x, y, z) \in \Lambda(f)$, dann gilt insbesondere $(x, y) \in B$. Die soeben bewiesene Äquivalenz zeigt, dass (x, y, z) dann in T liegt. Setzen wir umgekehrt $(x, y, z) \in T$ voraus, dann gilt $R - \sqrt{s^2 - z^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + \sqrt{s^2 - z^2}$, und insbesondere $R - s \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + s$. Dies ist gleichbedeutend mit $|R - \sqrt{x^2 + y^2}| \leq s$, also mit $(x, y) \in B$. Die bereits bewiesene Äquivalenz zeigt dann, dass (x, y, z) in $\Lambda(f)$ liegt.

zu (b) Wir bemerken vorweg, dass man das angegebene unbestimmte Integral mit Hilfe der Substitutionsregel durch die Rechnung

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{s^2 - x^2} dx &= \left(-\frac{1}{2}\right) \int (-2x) \sqrt{s^2 - x^2} dx = \left(-\frac{1}{2}\right) \int \sqrt{t} dt = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} \\ &= -\frac{1}{3} t^{3/2} = -\frac{1}{3} (s^2 - x^2)^{3/2} \end{aligned}$$

erhält. Wir berechnen nun das gesuchte Volumen mit Hilfe der Transformationsformel, angewendet auf Polarkoordinaten. Hier kommt auch die (eindimensionale) Substitutionsregel nochmals zum Einsatz. Setzen wir $A = [R - s, R + s] \times [0, 2\pi]$, dann gilt $\rho(A) = B$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} v_3(T) &= v_3(\Lambda(f)) = \int_B f(x, y) d(x, y) = \int_A (f \circ \rho_{\text{pol}})(r, \varphi) \cdot r d(r, \varphi) = \\ &= \int_A r \sqrt{s^2 - (R - r)^2} d(r, \varphi) = \int_{R-s}^{R+s} \left(\int_0^{2\pi} r \sqrt{s^2 - (R - r)^2} d\varphi \right) dr = \\ &= 2\pi \int_{R-s}^{R+s} r \sqrt{s^2 - (R - r)^2} dr = (-2\pi) \int_{R-s}^{R+s} r \sqrt{s^2 - (R - r)^2} \cdot (-1) dr = \\ &= (-2\pi) \int_s^{-s} (R - t) \sqrt{s^2 - t^2} dt = 2\pi \int_{-s}^s (R - t) \sqrt{s^2 - t^2} dt = \\ &= 2\pi R \int_{-s}^s \sqrt{s^2 - t^2} dt - 2\pi \int_{-s}^s t \sqrt{s^2 - t^2} dt = 2\pi R \cdot \frac{1}{2} \pi s^2 + 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[(s^2 - t^2)^{3/2} \right]_{-s}^s = 2\pi R \cdot \frac{1}{2} \pi s^2. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis war zu erwarten: Schneidet man den Bagel an einer Seite quer durch, so erhält man eine halbkreisförmige Schnittfläche mit Flächeninhalt $\frac{1}{2} \pi s^2$. Multipliziert man dies mit Bagelumfang $2\pi R$, so erhält man das Volumen.