Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 13 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 (Vorbereitung auf das Tutorium)

- (a) Wie sind homogene bzw. inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung definiert?
- (b) Welche besonderen Eigenschaften hat die Lösungsmenge solcher DGLs?
- (c) Welche Schritte müssen bei der Lösung einer inhomogenen linearen DGL durch Variation der Konstanten im Einzelnen ausgeführt werden?
- (d) Wir betrachten die DGL $y'' = y^2$. Begründen Sie mit einem geeigneten Satz aus der Vorlesung, dass die beiden Funktionen $\psi_1(t) = \cosh(t)$ und $\psi_2(t) = \sinh(t)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen bilden. (zur Erinnerung: Der *Kosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* sind definiert durch $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ und $\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$).

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für jeden Punkt (a, b) im Definitionsbereich D der folgenden linearen Differentialgleichungen durch Variation der Konstanten eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) = b$.

- (a) $y' = \frac{x}{x^2-1}y - \sqrt{x^2-1}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1\}$
- (b) $y' = (-2)y + 3e^{5x} + x - 1$, $D = \mathbb{R}^2$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen der folgenden DGL vierter Ordnung

$$y^{(4)} = -6y + 9y' - 5y'' + 3y'''$$

durch Ausführung der folgenden Schritte:

- (a) Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen des Polynoms $p = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6 \in \mathbb{R}[x]$.
- (b) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Überprüfen Sie, dass die Funktion $\varphi_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $\varphi_\lambda(t) = e^{\lambda t}$ genau dann eine Lösung der DGL ist, wenn λ eine Nullstelle von p ist.
- (c) Sei $\lambda = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\varphi_\lambda, \varphi_{\bar{\lambda}}$ genau dann Lösungen der DGL sind, wenn $\psi_\lambda, \psi_{\bar{\lambda}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\psi_\lambda(t) = e^{ut} \cos(vt)$, $\psi_{\bar{\lambda}}(t) = e^{ut} \sin(vt)$ Lösungen sind.
- (d) Geben Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL an, und überprüfen Sie diese Eigenschaft durch Berechnung der Wronski-Determinante im Nullpunkt.

Dieses Blatt wird vom 25. bis zum 28. Juli 2022 im Tutorium bearbeitet.