Samstag, 9. Juli 2022

# Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

## — Blatt 11 —

(Tutoriumsblatt)

**Aufgabe 0** *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Welche Typen von isolierten Singularitäten gibt es, und wie sind diese definiert? Wie kann man den Typ an der Laurentreihenentwicklung der Funktion erkennen?

(b) Geben Sie die Residuen der Funktionen $\mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z$, $z \mapsto \frac{1}{z}$, $z \mapsto \frac{1}{z^2}$ und $z \mapsto \frac{1}{z(1-z)}$ in den Punkten 0 und 1 an.

(c) Wie hängen Null- und Polstellenordnungen von Funktionen zusammen?

(d) Sei $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität im Nullpunkt. Zeigen Sie, dass das Residuum von $f'$ im Punkt 0 gleich null ist. Ist es möglich, dass $f'$ im Nullpunkt eine Polstelle erster bzw. zweiter Ordnung besitzt?

**Aufgabe 1**

Wir betrachten die holomorphe Funktion gegeben durch

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1, 1+i\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \mapsto \frac{1}{(z-1)(z-1-i)^3}.$$

Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von $f$ um die Punkte $1+i$ und 1, und geben Sie jeweils den maximalen Kreisring an, auf dem die Laurentreihe konvergiert.

**Aufgabe 2**

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f$ im Punkt $a$ den jeweiligen Typ der isolierten Singularität. Geben Sie bei hebbaren Singularitäten den Wert der holomorphen Fortsetzung im Punkt $a$ an, bei Polstellen die Ordnung und bei wesentlichen Singularitäten das Residuum im Punkt $a$.

(a) $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{z^3 - 5z + 6i}{z^2+1}$, $\quad a = i$

(b) $\mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{1}{\exp(z) - 1}$, $\quad a = 0$

(c) $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$, $\quad a = 0$

**Aufgabe 3**

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in \mathbb{C} \setminus U$ eine Polstelle $n$-ter Ordnung von $f$ (mit $n \in \mathbb{N}$) und $g : U \to \mathbb{C}$ gegeben durch $g(z) = (z-a)^n f(z)$. Beweisen Sie die Gleichung

$$\operatorname{res}_a(f) \quad = \quad \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(a).$$

**Dieses Blatt wird vom 11. bis zum 14. Juli 2022 im Tutorium bearbeitet.**

# Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

**— Blatt 11 —**

(Globalübungsblatt)

**Aufgabe 1** (5+5 Punkte)

Geben Sie die Laurentreihenentwicklung von $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ auf den folgenden beiden Kreisringen an.

(a) $R_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-i| < 2\}$ (b) $R_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

**Aufgabe 2** (3+3+2+2 Punkte)

Wir betrachten auf dem Gebiet $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| < \pi\}$ die meromorphe Funkion

$$f(z) = \frac{1}{(z+\frac{1}{2}\pi)\cos(z)}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Singularitäten von $f$ in $U$ und geben Sie jeweils den Typ an.

(b) Berechnen Sie die Residuen von $f$ in allen Polstellen.

(c) Besitzt die Funktion $f$ auf ihrem Definitionsbereich eine komplexe Stammfunktion?

(d) Bestimmen Sie ein $c \in \mathbb{C}$, so dass die Funktion $f(z) + c(z - \frac{1}{2}\pi)^{-1}$ auf $U$ eine komplexe Stammfunktion besitzt.

**Aufgabe 3** (3+3+4 Punkte)

Gegeben seien die beiden Kurven $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 2e^{it}$ und $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto i + e^{-it}$. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz^2}-1}{z^2}\,dz$ (b) $\displaystyle\int_\eta \frac{e^z}{(z-i)^3}\,dz$ (c) $\displaystyle\int_\gamma e^{\frac{1}{z}}\,dz$

**Abgabe:** Dienstag, 19. Juli 2022, 14:15 Uhr