Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 9 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(zur Vorbereitung)*

(a) Welche Beziehung besteht zwischen geschlossenenen Kurvenintegralen und der Existenz komplexer Stammfunktionen? Existiert diese Beziehung nur für einfach zusammenhängende oder für beliebige Gebiete? Ist es möglich, dass eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ eine komplexe Stammfunktion besitzt, obwohl G nicht einfach zusammenhängend ist? Ist die Teilmenge $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ von $\mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet?

(b) Geben Sie die Cauchysche Integralformel an.

(c) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf $\partial B_1(0)$ konstant gleich 1 ist. Bestimmen Sie $f(z)$ für alle $z \in B_1(0)$.

(d) Halten Sie es für plausibel, dass die Cauchysche Integralformel auch für Randkurven von Quadraten oder Rechtecken gültig ist?

Aufgabe 1

Berechnen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes oder der Cauchyschen Integralformel die folgenden beiden Kurvenintegrale.

$$\text{(a)} \quad \int_{\partial B_1(i)} \frac{e^z}{z^2+1}\, dz \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_{\partial B_1(2)} \frac{z^7}{z^2(z^4+1)}\, dz$$

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die im Nullpunkt keine Nullstelle besitzt.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{f(z)}{z}$ keine komplexe Stammfunktion besitzt.

(b) Setzen wir nun voraus, dass $f(0) \neq 0$, aber $f'(0) = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass die Funktion $h : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{f(z)}{z^2}$ eine komplexe Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 3

Sei $\zeta = e^{2\pi i/3}$. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{\zeta, \zeta^2\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$.

(a) Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ sei $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma_r(t) = re^{it}$. Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_{\gamma_r} f(z)\, dz$ für alle $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

(b) Sei nun $r > 1$, und seien der Integrationsweg δ_r und die Teilmenge $H_r^- \subseteq \mathbb{C}$ definiert durch $\delta_r = [-r, r] + \gamma_r|_{[0,\pi]}$ und $H_r^- = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r, \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$. Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_{\delta_r} f(z)\, dz$. Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass $\int_{\gamma_r} g(z)\, dz = \int_{\delta_r} g(z)\, dz$ gilt, falls $g : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion bezeichnet, die auf einer offenen Menge $U \supseteq H_r^- \cup \mathrm{sp}(\gamma_r)$ definiert ist. (Begründen lässt sich das mit Proposition 2.12, der Homotopieinvarianz der komplexen Kurvenintegrale.)

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (b) das uneigentliche Riemann-Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

Dieses Blatt wird vom 27. bis zum 30. Juni 2022 im Tutorium bearbeitet.

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 9 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (3+4+3 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale, wobei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ jeweils durch $\gamma(t) = 2e^{it}$ definiert ist.

$$\text{(a)} \quad \int_\gamma \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\, dz \qquad \text{(b)} \quad \int_\gamma \frac{5z-2}{z(z-1)}\, dz \qquad \text{(c)} \quad \int_\gamma \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\, dz$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei $U_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \mathrm{Re}(z) < b\}$. Beweisen Sie, dass die Einschränkung von f auf $U_{a,b} \setminus \{-1, 1\}$ genau dann eine eindeutig bestimmte Stammfunktion F mit $F(0) = 0$ besitzt, wenn $a \geq -1$ und $b \leq 1$ gilt.

Aufgabe 3

(a) Sei $R \in \mathbb{R}^+$ und der Weg $\beta_R : [0, \frac{1}{4}\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\beta_R(t) = Re^{it}$. Beweisen Sie die Abschätzung

$$\left| \int_{\beta_R} e^{iz^2}\, dz \right| \quad \leq \quad \frac{4}{\pi R}.$$

Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass $\sin(2t) \geq \frac{1}{4}\pi t$ für $0 \leq t \leq \frac{1}{4}\pi$ gilt.

(b) Sei $\gamma_R : [0, R] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma_R(t) = te^{\frac{1}{4}\pi i}$. Beweisen Sie mit Hilfe der Gleichung $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, dass

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} e^{iz^2}\, dz \quad = \quad (1+i)\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \qquad \text{gilt.}$$

(c) Sei $\alpha_R : [0, R] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\alpha_R(t) = t$. Zeigen Sie mit Teil (a) und der Cauchyschen Integralformel, dass

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\alpha_R} e^{iz^2}\, dz \quad = \quad (1+i)\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \qquad \text{erfüllt ist,}$$

und beweisen Sie damit die Gleichungen $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

Abgabe: Dienstag, 5. Juli 2022, 14:15 Uhr