Samstag, 18. Juni 2022

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 8 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(zur Vorbereitung)*

(a) Welche allgemeine Form hat eine komplexe Potenzreihe mit Entwicklungspunkt -1?

(b) Kann die komplexe Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ als Potenzreihe dargestellt werden? Besitzt die Funktion $z \mapsto z^2$ eine Entwicklung als Potenzreihe um den Punkt i? Falls ja, wie sieht diese aus?

(c) Wenn die Koeffizienten $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Bedingung $\lim_n a_n = i + 1$ erfüllen, auf welcher Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist die Potenzreihe dann mit Sicherheit konvergent bzw. divergent?

(d) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{B_1(0)} (2z^3 - 5)(\sin(z)\cos(z)^2)^3 \, dz$.

(e) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Kurvenintegral $\int_{\partial \bar{B}_1(0)} \frac{dz}{z}$ den Wert $2\pi i$ hat. Müsste der Wert nach dem Cauchyschen Integralsatz nicht null sein?

Aufgabe 1

(a) Sei $w \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ und $B_r(w)$ die offene Kreisscheibe vom Radius r um den Punkt w und $f : B_r(w) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie: Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - w)^n$ eine Potenzreihenentwicklung von f auf $\mathbb{C}$, dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar, und es gilt $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(w)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Zeigen Sie, dass für den komplexen Logarithmus $\ln : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ auf dem gesamten Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ eine komplexe Stammfunktion f existiert.

(c) Bestimmen Sie Potenzreihenentwicklungen von ln und f auf der offenen Kreisscheibe $B_1(1)$. Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass solche Potenzreihenentwicklungen existieren.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der folgenden Funktionen um den Nullpunkt sowie deren Konvergenzradien.

(a) $f : \mathbb{C} \setminus \{3\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{z+2}{z-3}$

(b) $g : \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{1}{(z-2)^2}$

Hinweis: Für Teil (a) darf ohne Beweis verwendet werden, dass $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gültig ist. In Teil (b) ist die Beobachtung hilfreich, dass es sich bei g um die Ableitung der Funktion $G(z) = -\frac{1}{z-2}$ handelt.

Aufgabe 3

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ wird *Zweig des Logarithmus* von f genannt, wenn die Gleichung $f(z) = e^{g(z)}$ für alle $z \in G$ erfüllt ist.

(a) Zeigen Sie: Gilt $f(G) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, dann ist $g = \ln \circ f$ ein Zweig des Logarithmus von f.

(b) Beweisen Sie, dass auch ohne die Voraussetzung $f(G) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ für die Funktion f stets ein Zweig des Logarithmus existiert.

Dieses Blatt wird vom 20. bis zum 23. Juni 2022 im Tutorium bearbeitet.

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— **Blatt 8** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ gegeben durch

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{z^2+1} \quad = \quad \frac{i}{2(z+i)} - \frac{i}{2(z-i)}$$

(a) Weisen Sie nach, dass f auf $B_1(0)$ eine komplexe Stammfunktion hat.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes, dass f auf $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ keine komplexe Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der folgenden Funktionen um den Nullpunkt sowie deren Konvergenzradien.

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2} \qquad , \qquad g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

(b) Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(z) = \frac{1}{z^3}$ um den Punkt $w = 1$. Bestimmen Sie auch hier den Konvergenzradius.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$.

(a) Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion $h : G \to \mathbb{C}$ mit $h(z)^n = f(z)$ für alle $z \in G$ existiert. Man nennt h einen *Zweig der n-ten Wurzel* von f.

(b) Wie aus Teil (b) der Tutoriumsaufgabe folgt, existiert auf $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ eine holomorphe Funktion g mit $z = e^{g(z)}$ für alle $z \in G$. Geben Sie für jeden Punkt $z \in G$ an, wie $g(z)$ mit dem komplexen Logarithmus $\ln(z)$ zusammenhängt.

Abgabe: Dienstag, 28. Juni 2022, 14:15 Uhr