Samstag, 11. Juni 2022

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 7 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(zur Vorbereitung)*

(a) Geben Sie die eindeutig bestimmte Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $\arg(z) = \frac{1}{4}\pi$ an.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{1}{z}$. Geben Sie die entsprechende Funktion $f_{\mathbb{R}}$ zusammen mit ihrem Definitionsbereich an.

(c) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von $f_{\mathbb{R}}$ an jedem Punkt des Definitionsbereichs. Wie lässt sich an der Matrix erkennen, dass f eine holomorphe Funktion ist?

(d) Wie lässt sich die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ von f an der Jacobi-Matrix ablesen?

Aufgabe 1

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn die Funktionen $f^+, f^- : A \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f^+ = f \vee 0$ und $f^- = (-f) \vee 0$ beide Lebesgue-integrierbar sind. (Dabei bezeichnet 0 die Nullfunktion.)

(b) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^4}}$ keine Lebesgue-integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2

(a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ bedeutet die Schreibweise $a \equiv b \mod 2\pi\mathbb{Z}$, dass $b - a$ ein gannzahliges Vielfaches von 2π ist. Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus für das Argument komplexer Zahlen $z, w \in \mathbb{C}^\times$ die Rechenregel

$$\arg(zw) \equiv \arg(z) + \arg(w) \mod 2\pi\mathbb{Z}.$$

(b) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten der komplexen Zahlen $1 + i$, $1 - i$ und $\frac{1+i}{1-i}$.

(c) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten der beiden komplexen Zahlen w_1, w_2 mit $w_1^2 = w_2^2 = 1 + i$.

Aufgabe 3

Eine reell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist *holomorph*, wenn auf ganz $\mathbb{C}$ die Gleichung $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ gilt, und *antiholomorph*, wenn auf ganz $\mathbb{C}$ die Gleichung $\partial f / \partial z = 0$ erfüllt ist. Sei $\iota : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ die komplexe Konjugation. Zeigen Sie:

(a) Ist f sowohl holomorph als auch antiholomorph, dann ist f konstant.

(a) Die Funktion f ist genau dann antiholomorph, wenn $f \circ \iota$ holomorph ist.

Dieses Blatt wird vom 13. bis zum 15. Juni 2022 im Tutorium bearbeitet.

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 7 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (2+2+2+4 Punkte)

(a) Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind.

(i) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z\mathrm{Re}(z)$

(ii) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto |z|^2$

(iii) $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$

(b) Weisen Sie nach, dass die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sqrt{|\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z)|}$ im Punkt 0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, dort aber nicht komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 2 (3+3+4 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und gilt eine der folgenden Bedingungen

(a) Der Realteil von f ist konstant.

(b) Der Imaginärteil von f ist konstant.

(c) Der Absolutbetrag $|f|$ ist konstant.

so ist die Funktion f selbst bereits konstant.

Aufgabe 3 (2+2+3+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n e^{-x}\,dx$ Lebesgue-integrierbar ist, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $s \in \mathbb{R}^+$ das Lebesgue-Integral $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx$ existiert. Die auf diese Weise definierte Funktion $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ wird die *Gammafunktion* genannt.

(c) Beweisen Sie für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung $t^{-s}\Gamma(s) = \int_{\mathbb{R}^+} x^{s-1}e^{-tx}\,dx$.

(d) Beweisen Sie die Gleichung $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für jedes $s \in \mathbb{R}^+$, indem Sie die Gleichung aus Teil (c) nach t ableiten und Satz 6.25 anwenden. Folgern Sie daraus die Gleichung $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Abgabe: Dienstag, 21. Juni 2022, 14:15 Uhr