Freitag, 27. Mai 2022

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 5 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(zur Vorbereitung)*

(a) Bestimmen Sie die Rotation der Vektorfelder $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(x, y, z) = \|(x, y, z)\|_2 \cdot e_1$ und $G(x, y, z) = (-y, x, z)$.

(b) Durch welche Eigenschaften ist das äußere Einheitsnormalenfeld einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert?

(c) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}_+$ eine nichtnegative $\mathcal{C}^1$-Funktion und $p \in U$. Sei $A = \Lambda(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ die Ordinatenmenge von f. Geben Sie einen äußeren Einheitsnormalenvektor von A im Randpunkt $(p, f(p))$ der Menge A an.

(d) Geben Sie eine unbeschränkte, Lebesgue-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, und begründen Sie die Lebesgue-Integrierbarkeit.

Aufgabe 1

Wir betrachten für gegebene $r, s \in \mathbb{R}^+$ mit $r < s$ die Kugelschale

$$K \quad = \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; r \leq \|(x, y, z)\|_2 \leq s\}.$$

(a) Bestimmen Sie ∂K (mit Nachweis).

(a) Geben Sie ein äußeres Einheitsnormalenfeld der Menge K auf ∂K ein, und weisen Sie diese Eigenschaft nach.

(c) Zeigen Sie, dass der Gauß'sche Integralsatz für K und beliebige $\mathcal{C}^1$-Vektorfelder $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gültig ist, indem Sie ihn auf den Gauß'schen Integralsatz für die Kugel zurückführen.

Aufgabe 2

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (y, z, x)$ und $S = \{(0, y, z) \mid y, z \geq 0\ ,\ y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(a) Finden Sie eine parameterisierte $\mathcal{C}^1$-Fläche (B, ϕ) mit $\phi(B) = S$ (kein Nachweis erforderlich).

(b) Bestimmen Sie eine positiv orientierte Randkurve τ für B (ebenfalls ohne Nachweis).

(c) Sei $\gamma = \phi \circ \tau$. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \langle F, ds\rangle$ sowohl direkt anhand der Definition als auch mit Hilfe des Stokes'schen Integralsatzes. (Die Voraussetzungen des Satzes brauchen nicht überprüft werden.)

Aufgabe 3

Sei $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man bezeichnet f als *uneigentlich Riemann-integrierbar*, wenn $f|_{[a,c]}$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ Riemann-integrierbar ist und $\lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\, dx$ als Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert. Zeigen Sie: Ist f eine stetige, auf $[a, b[$ Lebesgue-integrierbare Funktion, dann ist f auch uneigentlich Riemann-integrierbar. (Aus Zeitgründen darf verwendet werden, dass mit f auch die Funktionen $f^+ = f \vee 0$ und $f^- = -(f \wedge 0)$ stetig sind.)

Dieses Blatt wird vom 30. Mai bis zum 2. Juni 2022 im Tutorium bearbeitet.

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— **Blatt 5** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (2+8 Punkte)

Das *Faradaysche Gesetz* besagt, dass zwischen dem elektrischen Feld E und dem magnetischen Feld B die Beziehung $\mathrm{rot}(E) = -\frac{\partial}{\partial t} B$ besteht. Dabei wird sowohl E als auch B als stetig differenzierbare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ betrachtet. Durch $E(t, x, y, z)$ wird jeweils das elektrische Feld E im Punkt (x, y, z) zu Zeitpunkt t angegeben; entsprechendes gelte auch für das magnetische Feld.

(a) Sei (A, ϕ) eine parametrisierte $\mathcal{C}^2$-Fläche und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine Raumkurve, durch die die Voraussetzungen des Stokes'schen Integralsatzes erfüllt sind. Geben Sie eine Beziehung zwischen dem elektrische Feld E entlang des Weges γ und dem magnetischen Feld B durch die Fläche $\phi(A)$ an.

(b) Nehmen wir nun an, $\phi(A)$ ist ein Vollkreis vom Radius $r \in \mathbb{R}^+$ in der xy-Ebene, und das Magnetfeld B hat die Form $B = B_0 \sin(\omega t) v$, wobei $v \in \mathbb{R}^3$ einen Vektor der Länge 1 und $B_0 \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}^+$ Konstanten bezeichnen. Dann ist $U = \int_\gamma \langle E, ds \rangle$ die vom Magnetfeld B in der Leiterschleife γ induzierte Spannung. Berechnen Sie U in Abhängigkeit von B_0, ω und v.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader. Wir nennen eine Funktion $g : Q \to \mathbb{R}$ eine *Treppenfunktion*, wenn eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q existiert, so dass $g|_{K^\circ}$ für alle $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ konstant ist (wobei K° wie üblich das Innere von K bezeichnet).

(a) Beweisen Sie, dass jede Treppenfunktion auf Q sowohl Riemann-integrierbar als auch Lebesgue-integrierbar ist.

(b) Beweisen Sie, dass eine Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen $g_n : Q \to \mathbb{R}$ mit $\lim_n \|g_n - f\|_1 = 0$ existiert.

Aufgabe 3 (3+3+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\, dx$ als Lebesgue-Integral existiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\int_{]0,1]} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ als Lebesgue-Integral existiert.

(c) Zeigen Sie, dass $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ zwar als uneigentliches Riemann-Integral existiert (vgl. Tutoriumsaufgabe 3), aber nicht als Lebesgue-Integral.

Abgabe: Mittwoch, 8. Juni 2022, 14:15 Uhr (auf Grund des vorlesungsfreien Dienstags ein Tag später) Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.