Freitag, 6. Mai 2022

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 2 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(zur Vorbereitung)*

(a) Ist die Funktion $f(x) = x^2$ auf $[0,1]$ Lipschitz-stetig? Ist sie auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig? Wie sieht das Ganze bei der Funktion $g(x) = 3x + 5$ aus?

(b) Wie kann man sich den Transformationssatz merken? Gehen Sie von der bekannten eindimensionalen Regel aus und versuchen Sie durch schrittweises Ersetzen der einzelnen Elemente die mehrdimensionale Regel zu konstruieren.

(c) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $Q = [0,1]^n$ der Einheitsquader und $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung gegeben durch $\phi_A(v) = Av$. Was für eine geometrische Figur ist die Bildmenge $\phi_A(Q)$? Wie kann die Gleichung $v(\phi_A(Q)) = |\det(A)|$ aus dem Transformationssatz abgeleitet werden?

(d) Wie lässt sich der Transformationssatz anwenden, um das Integral

$$\int_B \frac{1}{\|(x,y,z)\|^3 + 1} \, d(x,y,z)$$

möglichst einfach zu berechnen, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm und $B \subseteq \mathbb{R}^3$ die Einheitskugel bezeichnet? Welche Form hat das Integral nach Anwendung des Transformationssatzes?

Aufgabe 1

Wir betrachten die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x,y) = (e^x \cos(y + x^3), e^x \sin(y + x^3))$.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $F'(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes den Flächeninhalt der Menge $M = \{F(x,y) \mid 0 \le y \le x \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Die Voraussetzungen des Satzes brauchen nicht überprüft werden, es genügt der Rechenweg.

Aufgabe 2

(a) Beweisen Sie, dass die Betragsfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ Lipschitz-stetig ist.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass die totale Ableitung f' beschränkt ist (wobei wir die Operatornorm bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ und bezüglich der Betragsfunktion auf $\mathbb{R}$ zu Grunde legen). Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist.
Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis von Satz 4.2.

Aufgabe 3

(a) Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Jordan-messbare Menge, $f : Q \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine invertierbare Matrix. Sei $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\phi_A(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\phi_A^{-1}(Q)} (f \circ \phi_A)(x) \, dx \quad = \quad \frac{1}{|\det A|} \int_Q f(x) \, dx.$$

– Fortsetzung nächste Seite –

(b) Zeigen Sie mit der eindimensionalen Substitutionsregel und der Substitutionsfunktion $\varphi(t) = \tan(t)$, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ jeweils

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad = \quad \arctan(b) - \arctan(a) \qquad \text{gilt.}$$

(c) Berechnen Sie das zweidimensionale Integral

$$\int_M \frac{1}{(1+(2x+5y)^2)(1+(-x+3y)^2)}\,d(x,y)$$

über der Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 2x+5y \leq 1\ ,\ 0 \leq -x+3y \leq 1\}$.

Dieses Blatt wird vom 9. bis zum 12. Mai 2022 im Tutorium bearbeitet.

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 2 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Jordan-messbare Menge. In der Physik wird das *Trägheitsmoment* von B bezüglich der z-Achse definiert durch

$$I(B) \quad = \quad \int_B (x^2 + y^2)\ d(x, y, z).$$

Bestimmen Sie für $h, s \in \mathbb{R}^+$ jeweils das Trägheitsmoment

(a) des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -h \leq z \leq h\ ,\ x^2 + y^2 \leq s^2\}$

(b) des gedrehten Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -h \leq y \leq h\ ,\ x^2 + z^2 \leq s^2\}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Sei $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\}$ die Einheitskugel und $f : K \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = x^2+y^2$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_K f(x, y, z)\ d(x, y, z)$$

mit Hilfe der Kugelkoordinaten-Abbildung $\rho_{\text{kug}}(r, \vartheta, \varphi) = (r\cos(\vartheta)\cos(\varphi), r\cos(\vartheta)\sin(\varphi), r\sin(\vartheta))$.
Die Funktionaldeterminante dieser Abbildung ist $\det \rho_{\text{kug}}(r, \vartheta, \varphi) = -r^2 \cos(\vartheta)$.

Ohne Beweis darf verwendet werden, dass die Integrale der Funktionen $x \mapsto \sin(x)^n$ und $x \mapsto \cos(x)^n$ für $n \geq 2$ den Rekursionsformeln

$$\int \sin(x)^n\,dx \quad = \quad \frac{n-1}{n}\int \sin(x)^{n-2}\,dx - \frac{1}{n}\cos(x)\sin(x)^{n-1}$$

$$\int \cos(x)^n\,dx \quad = \quad \frac{n-1}{n}\int \cos(x)^{n-2}\,dx + \frac{1}{n}\sin(x)\cos(x)^{n-1}$$

genügen. (Es ist aber eine sinnvolle Übung, sich zu überlegen, wie man diese Gleichungen aus den Integrationsregeln herleiten kann.)

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Seien $R, s \in \mathbb{R}^+$ mit $s < R$. Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die Teilmenge

$$T \quad = \quad \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq z \leq s\ ,\ R - \sqrt{s^2 - z^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R + \sqrt{s^2 - z^2}\right\}$$

und auf dem $\mathbb{R}^2$ die Funktion f gegeben durch

$$f(x, y) \quad = \quad \begin{cases} \sqrt{s^2 - (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2} & \text{falls } |R - \sqrt{x^2 + y^2}| \leq s \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Menge T stellt die obere Hälfte eines Torus (eines längs durchgeschnittenen Bagels) dar.
– Fortsetzung auf der nächten Seite –

(a) Überprüfen Sie durch eine Rechnung, dass T die Ordinatenmenge der Funktion f ist.

(b) Bestimmen Sie das Integral von f (und damit das Volumen von T) mit Hilfe der Polarkoordinaten-Abbildung.

Ohne Beweis darf das unbestimmte Integral

$$\int x\sqrt{s^2 - x^2}\, dx = -\tfrac{1}{3}(s^2 - x^2)^{3/2} \qquad \text{für} \qquad |x| \leq s$$

sowie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_{-s}^{s} \sqrt{s^2 - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\pi s^2$ verwendet werden (aber versuchen Sie auch hier, die Integrale selbstständig nachzurechnen).

Abgabe: Dienstag, 17. Mai 2022, 14:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.