

Ralf Gerkmann

Mathematisches Institut

Ludwig-Maximilians-Universität München

Vorlesung im Sommersemester 2022

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Teil I: Mehrdimensionale Integralrechnung

Zusammenfassung

Die Definition des mehrdimensionalen Riemann-Integrals und einige Grundlagen haben wir schon im vergangenen Wintersemester behandelt. Die entsprechenden Kapitel wurden hier der Vollständigkeit halber noch einmal aufgenommen. Im aktuellen Semester werden wir uns nun vor allem mit weiterführenden Techniken und geometrischen Anwendungen der mehrdimensionalen Integration befassen.

So werden wir beispielsweise den Bezug des Riemann-Integrals zum Längen-, Flächen- und Volumenbegriff näher beleuchten. Während wir bisher nur über achsenparallele kompakte Quader integrieren konnten, werden wir nun den Integralbegriff auf Funktionen mit allgemeineren Definitionsbereichen ausdehnen. Wir werden mit der Transformationsformel einer sehr weitgehende Verallgemeinerung der eindimensionalen Substitutionsregel aus dem 1. Semester kennenlernen.

Darüber hinaus werden wir spezielle Integrale einführen, die zur Integration von Funktionen auf Kurven und Flächen geeignet sind, und mit denen sich insbesondere Kurvenlängen und die Oberflächen von dreidimensionalen Körpern berechnen lassen. Die zu diesen Integralen gehörenden Integralsätze spielen in der Physik, beispielsweise in der Elektro- und Hydrodynamik, eine wichtige Rolle.

Inhaltsverzeichnis

§ 1.	<i>Das mehrdimensionale Riemann-Integral</i>	<i>3</i>
§ 2.	<i>Nullmengen und Lebesguesches Integrabilitätskriterium</i>	<i>14</i>
§ 3.	<i>Integration über Jordan-messbare Mengen</i>	<i>20</i>
§ 4.	<i>Der Transformationssatz</i>	<i>36</i>
§ 5.	<i>Wegintegrale und Flächenintegrale, Integralsätze</i>	<i>54</i>
§ 6.	<i>Einführung in die Lebesguesche Integrationstheorie</i>	<i>84</i>
	<i>Literaturverzeichnis</i>	<i>106</i>

§ 1. Das mehrdimensionale Riemann-Integral

Zusammenfassung. In diesem Kapitel soll die aus dem ersten Semester bekannte Definition des Riemann-Integrals auf den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinert werden. Im Eindimensionalen hatten wir die Riemann-Integrierbarkeit einer beschränkten Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert: Zunächst hatten wir jeder Zerlegung $\mathcal{Z}$ des Intervalls $[a, b]$ eine Untersumme $S_f^-(\mathcal{Z})$ und eine Obersumme $S_f^+(\mathcal{Z})$ zugeordnet. Das *Unterintegral* war dann nach Definition das Supremum der Menge der Untersummen bezüglich beliebiger Zerlegungen, das *Oberintegral* entsprechend das Infimum der Menge sämtlicher Obersummen. Die Funktion wurde als *Riemann-integrierbar* bezeichnet, wenn Unter- und Oberintegral übereinstimmten, und dieser gemeinsamen Wert wurde dann das *Riemann-Integral* von f genannt.

Im $\mathbb{R}^n$ betrachten wir als Definitionsbereich unserer Funktionen $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ an Stelle eines Intervalls $[a, b]$ achsenparallele kompakte Quader der Form $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Jede Zerlegung der Intervalle $[a_j, b_j]$ liefert eine Zerlegung des Quaders in Teilquader. Mit Hilfe dieser Teilquader lassen sich wie im Eindimensionalen Unter- und Obersummen und damit auch Unter- und Oberintegrale definieren. Die Definitionen der Riemann-Integrierbarkeit und des Riemann-Integrals lassen sich dann analog zum eindimensionalen Fall formulieren. Neben diesen Definitionen ist das wichtigste Ergebnis dieses Kapitels die Riemann-Integrierbarkeit jeder stetigen Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Bereich Q der angegebenen Form. Der *Satz von Fubini* ermöglicht es uns, die Berechnung mehrdimensionaler Integrale auf den eindimensionalen Fall zurückzuführen.

Wichtige Grundbegriffe

- (achsenparalleler, kompakter) Quader
- Zerlegung $\mathcal{Z}$ mehrdimensionaler Quader
- Menge $Q(\mathcal{Z})$ der Teilquader einer Zerlegung
- Verfeinerung einer Zerlegung
- Untersumme $S_f^-(\mathcal{Z})$ und Obersumme $S_f^+(\mathcal{Z})$ einer beschränkten Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich einer Zerlegung $\mathcal{Z}$
- Unter- und Oberintegral, Riemann-Integrierbarkeit und Riemann-Integral

Zentrale Sätze

- Rechenregeln für das mehrdimensionale Riemann-Integral
- Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen
- Satz von Fubini

Bevor wir die mehrdimensionalen Riemann-Integrale definieren, wiederholen wir zunächst die Definition im eindimensionalen Fall aus dem ersten Semester. Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein endliches, abgeschlossenes Intervall und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Eine **Zerlegung** von $[a, b]$ ist eine endliche Teilmenge $\mathcal{Z} = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ von $]a, b[$. Für jede solche Zerlegung hatten wir die **Unter-** und **Obersumme** von f definiert durch

$$S_f^-(\mathcal{Z}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k) \quad \text{und} \quad S_f^+(\mathcal{Z}) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k (x_{k+1} - x_k)$$

wobei $c_k, d_k \in \mathbb{R}$ für $0 \leq k < n$ durch $c_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ und $d_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ gegeben sind und $x_0 = a$, $x_n = b$ gesetzt wird. Das **Unterintegral** ist dann das Supremum aller Untersummen und das **Oberintegral** das Infimum aller Obersummen, gebildet jeweils über sämtliche Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$. Stimmen beide überein, dann wird die Funktion f als **Riemann-integrierbar** bezeichnet, und der gemeinsamen Wert der Integrale ist das **Riemann-Integral** von f .

Diese Definitionen lassen sich problemlos auf höhere Dimension übertragen, indem man lediglich Intervalle durch **achsenparallele kompakte Quader** ersetzt, also Teilmengen von $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ der Form $I_1 \times \dots \times I_n$ mit $I_k = [a_k, b_k]$ und $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$ für $1 \leq k \leq n$. Der Einfachheit halber sprechen wir im Folgenden meist nur von **Quadern**. Die Zahl

$$v(Q) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

bezeichnen wir als das (n -dimensionale) **Volumen** von Q . Der Begriff der Zerlegung muss ebenfalls geeignet angepasst werden.

Definition 1.1 Sei $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ ein Quader im $\mathbb{R}^n$.

- (i) Eine **Zerlegung** von Q ist ein Tupel $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_n)$, wobei $\mathcal{Z}_k$ für $1 \leq k \leq n$ jeweils eine Zerlegung des Intervalls I_k bezeichnet.
- (ii) Ist $\mathcal{Z}$ eine solche Zerlegung, $I_k = [a_k, b_k]$ und $\mathcal{Z}_k = \{x_{k,1}, \dots, x_{k,m_k-1}\}$ für $1 \leq k \leq n$ mit jeweils $a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < \dots < x_{k,m_k-1} < x_{k,m_k} = b_k$, dann bezeichnen wir eine Teilmenge $K \subseteq Q$ der Form

$$K = [x_{1,\ell_1-1}, x_{1,\ell_1}] \times \dots \times [x_{n,\ell_n-1}, x_{n,\ell_n}]$$

mit $1 \leq \ell_k \leq m_k$ für $1 \leq k \leq n$ als **Teilquader** von Q bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}$. Die Menge all dieser Teilquader bezeichnen wir mit $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$.

- (iii) Ist $\mathcal{Z}' = (\mathcal{Z}'_1, \dots, \mathcal{Z}'_n)$ eine weitere Zerlegung von Q , so bezeichnen wir $\mathcal{Z}'$ als **Verfeinerung** von $\mathcal{Z}$, wenn $\mathcal{Z}'_k \supseteq \mathcal{Z}_k$ für $1 \leq k \leq n$ erfüllt ist.

Je zwei Zerlegungen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ kann eine gemeinsame Verfeinerung zugeordnet werden, nämlich die Verfeinerung mit den Komponenten $\mathcal{Z}_k \cup \mathcal{Z}'_k$, die wir der Einfachheit halber mit $\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}'$ bezeichnen.

Lemma 1.2 Sei Q ein Quader und $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q . Dann addieren sich Volumina der Teilquader von Q bezüglich $\mathcal{Z}$ zum Volumen des Quaders Q , es gilt also $\sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} v(K) = v(Q)$.

Beweis: Dies ergibt sich aus der Rechnung

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} v(K) &= \sum_{\ell_1=1}^{m_1} \dots \sum_{\ell_n=1}^{m_n} v([x_{1,\ell_1-1}, x_{1,\ell_1}] \times \dots \times [x_{n,\ell_n-1}, x_{n,\ell_n}]) = \\ &= \sum_{\ell_1=1}^{m_1} \dots \sum_{\ell_n=1}^{m_n} \prod_{k=1}^n (x_{k,\ell_k} - x_{k,\ell_k-1}) = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{\ell_k=1}^{m_k} (x_{k,\ell_k} - x_{k,\ell_k-1}) \right) = \prod_{k=1}^n (x_{k,m_k} - x_{k,0}) \\ &= \prod_{k=1}^n (b_k - a_k) = v(Q). \end{aligned} \quad \square$$

Von der Anschauung her unmittelbar einleuchtend ist auch die folgende Aussage.

Lemma 1.3 Seien $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ zwei Zerlegungen eines Quaders Q , wobei $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$ sei. Dann definiert $\mathcal{Z}'$ für jeden Teilquader $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ auf natürliche Weise eine Zerlegung $\mathcal{Z}_K$ von K . Es gilt dann

$$\mathcal{Q}(\mathcal{Z}') = \bigcup_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_K) ,$$

wobei es sich um eine disjunkte Vereinigung handelt, und außerdem $v(K) = \sum_{K' \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_K)} v(K')$ für alle $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$.

Beweis: Sei $K = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n]$ ein beliebiges Element der Quadermenge $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$. Die zweite Gleichung ergibt sich unmittelbar aus Lemma 1.2. Wir geben nun die Definition von $\mathcal{Z}_K$ an. Dazu bemerken wir vorweg, dass c_k, d_k für $1 \leq k \leq n$ jeweils benachbarte Punkte der Menge $\mathcal{Z}_k \cup \{a_k, b_k\}$ sind, falls $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ist, und dass umgekehrt jeder Quader in $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ auf diese Weise durch benachbarte Punkte der Mengen $\mathcal{Z}_k \cup \{a_k, b_k\}$ definiert ist. Dabei bezeichnen wir allgemein zwei Punkte x, y einer endlichen Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}$ als **benachbart**, wenn kein $z \in S$ mit $x < z < y$ existiert. Entsprechendes gilt natürlich auch für die Quader der Zerlegung $\mathcal{Z}'$. Wir definieren nun eine Zerlegung $\mathcal{Z}_K = (\mathcal{Z}_{K,1}, \dots, \mathcal{Z}_{K,n})$ von K durch

$$\mathcal{Z}_{K,k} = \mathcal{Z}'_k \cap]c_k, d_k[\quad \text{für } 1 \leq k \leq n.$$

Jeder Quader $K' \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_K)$ ist in $\mathcal{Q}(\mathcal{Z}')$ enthalten. Denn ein solcher Quader hat die Form $K' = [c'_1, d'_1] \times \dots \times [c'_n, d'_n]$, wobei c'_k, d'_k für $1 \leq k \leq n$ jeweils benachbarte Punkte von $\mathcal{Z}_{K,k} \cup \{c_k, d_k\}$ sind. Wegen $c_k, d_k \in \mathcal{Z}_k \cup \{a_k, b_k\}$ gilt auch $\mathcal{Z}_{K,k} \cup \{c_k, d_k\} = (\mathcal{Z}'_k \cup \{a_k, b_k\}) \cap [c_k, d_k]$, und dies zeigt, dass c'_k, d'_k zugleich auch benachbarte Punkte der Menge $\mathcal{Z}'_k \cup \{a_k, b_k\}$ sind. Damit ist $K' \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}')$ nachgewiesen.

Es ist auch klar, dass K der einzige Quader in $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ mit $K' \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_K)$ ist. Sind nämlich K und K' wie oben definiert, dann folgt aus $K' \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_K)$, dass $c'_k, d'_k \in \mathcal{Z}_{K,k} \cup \{c_k, d_k\}$ für $1 \leq k \leq n$ gilt, mit $\mathcal{Z}_{K,k} = \mathcal{Z}'_k \cap]c_k, d_k[$, also insbesondere $c'_k, d'_k \in [c_k, d_k]$. Da sich die verschiedenen abgeschlossenen Intervalle $[c, d]$ gegeben durch benachbarte Punkte $c, d \in \mathcal{Z}_k \cup \{a_k, b_k\}$ sich in höchstens einem Punkt schneiden, ist $\{c_k, d_k\}$ durch diese Bedingung jeweils eindeutig festgelegt, und somit auch der Quader K . Dies zeigt, dass die Vereinigung $\bigcup_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_K)$ tatsächlich disjunkt ist.

Setzen wir nun umgekehrt $K' \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}')$ voraus, mit $K' = [c'_1, d'_1] \times \dots \times [c'_n, d'_n]$. Dann sind c'_k, d'_k jeweils benachbarte Punkte von $\mathcal{Z}'_k \cup \{a_k, b_k\}$, für $1 \leq k \leq n$. Sei $c_k = \max\{x \in \mathcal{Z}_k \cup \{a_k\} \mid x \leq c'_k\}$ und $d_k = \min\{x \in \mathcal{Z}_k \cup \{b_k\} \mid x \geq d'_k\}$. Wegen $\mathcal{Z}_k \subseteq \mathcal{Z}'_k$, und weil c'_k, d'_k in $\mathcal{Z}'_k \cup \{a_k, b_k\}$ benachbart sind, gibt es keinen Punkt $x \in \mathcal{Z}_k$ mit $c'_k < x < d'_k$, d.h. c_k und d_k sind benachbarte Punkte in $\mathcal{Z}_k \cup \{a_k, b_k\}$. Definieren wir nun $K = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n]$, dann gilt jeweils $\mathcal{Z}_{K,k} = \mathcal{Z}'_k \cap]c_k, d_k[$, also $\mathcal{Z}_{K,k} \cup \{c_k, d_k\} = (\mathcal{Z}'_k \cup \{a_k, b_k\}) \cap [c_k, d_k]$, und somit sind c'_k, d'_k benachbarte Punkte von $\mathcal{Z}_{K,k} \cup \{c_k, d_k\}$. Es gilt also $K' \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_K)$. $\square$

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für jeden Quader $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ definieren wir die beiden Werte $c_{K,f}^- = \inf f(K)$ und $c_{K,f}^+ = \sup f(K)$.

Definition 1.4 Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q wie angegeben bezeichnet man die Werte

$$S_f^-(\mathcal{Z}) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_{K,f}^- v(K) \quad \text{bzw.} \quad S_f^+(\mathcal{Z}) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_{K,f}^+ v(K)$$

als **Unter-** bzw. **Obersumme** von f bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}$.

Vor dem Beweis des folgenden Lemmas erinnern wir an eine elementare Aussage der Analysis einer Variablen zum Infimum und Supremum: Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A \subseteq B$, dann gilt $\inf(A) \geq \inf(B)$ und $\sup(A) \leq \sup(B)$. Denn wegen $A \subseteq B$ ist jede untere Schranke von B zugleich eine untere Schranke von A , die *größte* untere Schranke von A also mindestens so groß wie die größte untere Schranke von A . Der Beweis der zweiten Ungleichung läuft analog.

Lemma 1.5 Sind $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ Zerlegungen von Q , und ist $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$, dann gilt $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) \leq \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}')$ und $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}') \leq \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z})$.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Nachweis der ersten Ungleichung. Ist $K' \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}')$ ein Teilquader von $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$, dann gilt jeweils $c_{K,f}^- = \inf f(K) \leq \inf f(K') = c_{K',f}^-$. Zusammen mit Lemma 1.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) &= \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_{K,f}^- v(K) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} \sum_{K' \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_K)} c_{K',f}^- v(K') = \sum_{K' \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}')} c_{K',f}^- v(K') \\ &\leq \sum_{K' \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}')} c_{K',f}^- v(K') = \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}'). \end{aligned} \quad \square$$

Folgerung 1.6 Für zwei beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ von Q gilt $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) \leq \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}')$.

Beweis: Es ist $\mathcal{Z}'' = \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}'$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$. Mit Lemma 1.5 erhalten wir somit die Abschätzungen $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) \leq \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}'') \leq \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}'') \leq \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}')$. $\square$

Wie im eindimensionalen Fall definieren wir nun

Definition 1.7 Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann nennt man

$$\int_{Q^\star} f(x) dx = \sup_{\mathcal{Z}} \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) \quad \text{bzw.} \quad \int_Q^\star f(x) dx = \inf_{\mathcal{Z}} \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z})$$

das **Unter-** bzw. **Oberintegral** von f , wobei $\mathcal{Z}$ bei der Bildung von Supremum und Infimum jeweils alle Zerlegungen des Quaders Q durchläuft. Man bezeichnet f als **Riemann-integrierbar**, wenn Unter- und Oberintegral übereinstimmen. In diesem Fall nennt man

$$\int_Q f(x) dx = \int_{Q^\star} f(x) dx \quad \text{Riemann-Integral von } f.$$

Mit Folgerung 1.6 erhält man für jede beschränkte Funktion f die Ungleichung

$$\int_{Q^\star} f(x) dx = \sup_{\mathcal{Z}} \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) \leq \inf_{\mathcal{Z}} \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}) = \int_Q^\star f(x) dx.$$

Jede konstante Funktion auf einem Quader Q ist Riemann-integrierbar. Sei nämlich $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) = c$ für alle $x \in Q$ und $\mathcal{Z}$ eine beliebige Zerlegung. Dann gilt $c_{K,f}^- = c$ für alle $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$. Es folgt

$$S_f^-(\mathcal{Z}) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_{K,f}^- v(K) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c v(K) = c \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} v(K) = c v(Q)$$

und somit

$$\int_{\star Q} f(x) dx = \sup_{\mathcal{Z}} S_f^-(\mathcal{Z}) = c v(Q).$$

Genauso beweist man, dass auch das Oberintegral den Wert $c v(Q)$ hat.

Als ein etwas weniger triviales Beispiel betrachten wir die Funktion $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegung $\mathcal{Z}_1^{(n)} = \mathcal{Z}_2^{(n)} = \{\frac{k}{n} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$ des Intervalls $[0, 1]$ und die Zerlegung $\mathcal{Z}^{(n)} = (\mathcal{Z}_1^{(n)}, \mathcal{Z}_2^{(n)})$ des Quaders $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. Die Quader dieser Zerlegung sind offenbar gegeben durch $\mathcal{Q}(\mathcal{Z}^{(n)}) = \{Q_{k\ell} \mid 1 \leq k, \ell \leq n\}$ mit $Q_{k\ell} = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \times [\frac{\ell-1}{n}, \frac{\ell}{n}]$, und es gilt $v(Q_{k\ell}) = \frac{1}{n^2}$ für alle k, ℓ . Nach Definition der Funktion f gilt

$$c_{k\ell}^- = c_{Q_{k\ell}}^- = \frac{(k-1)(\ell-1)}{n^2} \quad \text{und} \quad c_{k\ell}^+ = c_{Q_{k\ell}}^+ = \frac{k\ell}{n^2}$$

für $1 \leq k, \ell \leq n$. Als Untersumme erhalten wir

$$\begin{aligned} S_f^-(\mathcal{Z}^{(n)}) &= \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}^{(n)})} c_{K,f}^- v(K) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \frac{c_{k\ell}^-}{n^2} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \frac{(k-1)(\ell-1)}{n^4} = \\ &= \frac{1}{n^4} \left(\sum_{k=1}^n (k-1) \right) \left(\sum_{\ell=1}^n (\ell-1) \right) = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{2}(n-1)n \cdot \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

und für die Obersumme ebenso

$$\begin{aligned} S_f^+(\mathcal{Z}^{(n)}) &= \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}^{(n)})} c_{K,f}^+ v(K) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \frac{c_{k\ell}^+}{n^2} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \frac{k\ell}{n^4} = \\ &= \frac{1}{n^4} \left(\sum_{k=1}^n k \right) \left(\sum_{\ell=1}^n \ell \right) = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungskette

$$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 = S_f^-(\mathcal{Z}^{(n)}) \leq \int_{Q\star} f(x) dx \leq \int_Q^\star f(x) dx \leq S_f^+(\mathcal{Z}^{(n)}) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2.$$

Durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ folgt daraus schließlich $\int_Q f(x) dx = \frac{1}{4}$.

Proposition 1.8 Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Eine beschränkte Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q gibt mit

$$S_f^+(\mathcal{Z}) - S_f^-(\mathcal{Z}) < \varepsilon.$$

Beweis: „ $\Rightarrow$ “ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und s der Wert des Riemann-Integrals. Nach Definition des Unter- und Oberintegrals als Supremum und Infimum gibt es Zerlegungen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ mit

$$S_f^-(\mathcal{Z}) > \int_{Q^\star} f(x) dx - \frac{1}{2}\varepsilon = s - \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{und} \quad S_f^+(\mathcal{Z}') < \int_Q^\star f(x) dx + \frac{1}{2}\varepsilon = s + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Ist $\mathcal{Z}''$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$, dann erhalten wir die Abschätzung $S_f^+(\mathcal{Z}'') - S_f^-(\mathcal{Z}'') \leq S_f^+(\mathcal{Z}') - S_f^-(\mathcal{Z}) < (s + \frac{1}{2}\varepsilon) - (s - \frac{1}{2}\varepsilon) = \varepsilon$.

„ $\Leftarrow$ “ Für beliebig vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung mit der angegebenen Eigenschaft. Dann gilt

$$S_f^-(\mathcal{Z}) \leq \int_{Q^\star} f(x) dx \leq \int_Q^\star f(x) dx \leq S_f^+(\mathcal{Z}).$$

Nach Voraussetzung ist die Differenz von Ober- und Untersumme kleiner als ε , also gilt diese Abschätzung erst recht für die Differenz von $\int_Q^\star f(x) dx$ und $\int_{Q^\star} f(x) dx$. Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt $\int_Q^\star f(x) dx = \int_{Q^\star} f(x) dx$, und damit ist f Riemann-integrierbar. $\square$

Proposition 1.9 (*Rechenregeln für das Riemann-Integral*)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, seien $f, g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g$ und λf Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_Q (f + g)(x) dx = \int_Q f(x) dx + \int_Q g(x) dx \quad \text{und} \quad \int_Q (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_Q f(x) dx.$$

$$\text{Aus } f \leq g \text{ folgt } \int_Q f(x) dx \leq \int_Q g(x) dx.$$

Beweis: Wir beschränken uns auf den Beweis der ersten Gleichung. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der Integrierbarkeit von f und g gibt es nach Prop. 1.8 Zerlegungen $\mathcal{Z}', \mathcal{Z}''$ von Q mit $S_f^+(\mathcal{Z}') - S_f^-(\mathcal{Z}') < \varepsilon$ und ebenso $S_g^+(\mathcal{Z}'') - S_g^-(\mathcal{Z}'') < \varepsilon$. Ist $\mathcal{Z}$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{Z}'$ und $\mathcal{Z}''$, dann sind die beiden Ungleichungen nach Lemma 1.5 auch für $\mathcal{Z}$ an Stelle von $\mathcal{Z}'$ bzw. $\mathcal{Z}''$ gültig. Für alle $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ gilt

$$c_{K,f+g}^- = \inf (f + g)(K) \geq \inf f(K) + \inf g(K) = c_{K,f}^- + c_{K,g}^-,$$

denn wegen $\inf f(K) + \inf g(K) \leq f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ für alle $x \in K$ ist $\inf f(K) + \inf g(K)$ eine untere Schranke von $(f + g)(K)$, und nach Definition ist $\inf (f + g)(K)$ die größte untere Schranke. Genauso beweist man $c_{K,f+g}^+ \leq c_{K,f}^+ + c_{K,g}^+$ für alle $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$. Durch Summation über alle Teilquader $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ erhält man

$$S_{f+g}^-(\mathcal{Z}) \geq S_f^-(\mathcal{Z}) + S_g^-(\mathcal{Z}) \quad \text{und} \quad S_{f+g}^+(\mathcal{Z}) \leq S_f^+(\mathcal{Z}) + S_g^+(\mathcal{Z}).$$

Es folgt

$$S_f^-(\mathcal{Z}) + S_g^-(\mathcal{Z}) \leq S_{f+g}^-(\mathcal{Z}) \leq S_{f+g}^+(\mathcal{Z}) \leq S_f^+(\mathcal{Z}) + S_g^+(\mathcal{Z})$$

Da die Differenz von rechter und linker Seite kleiner als 2ε ist, gilt dasselbe erst recht für die Differenz $S_{f+g}^+(\mathcal{Z}) - S_{f+g}^-(\mathcal{Z})$. Nach Prop. 1.8 zeigt dies, dass $f + g$ Riemann-integrierbar ist. Was den Wert des Integrals angeht, gilt sowohl

$$S_f^-(\mathcal{Z}) + S_g^-(\mathcal{Z}) \leq S_{f+g}^-(\mathcal{Z}) \leq \int_Q (f+g)(x) dx \leq S_{f+g}^+(\mathcal{Z}) \leq S_f^+(\mathcal{Z}) + S_g^+(\mathcal{Z})$$

als auch

$$S_f^-(\mathcal{Z}) + S_g^-(\mathcal{Z}) \leq \int_Q f(x) dx + \int_Q g(x) dx \leq S_f^+(\mathcal{Z}) + S_g^+(\mathcal{Z}).$$

Da rechte und linke Seite der beiden Ungleichungsketten eine Differenz $< 2\varepsilon$ haben, erhalten wir für die Differenz der Integrale der Mitte den Abstand $|\int_Q f(x) dx + \int_Q g(x) dx - \int_Q (f+g)(x) dx| < 2\varepsilon$. Weil $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig klein gewählt werden kann, erhalten wir $\int_Q f(x) dx + \int_Q g(x) dx = \int_Q (f+g)(x) dx$.

Für den Beweis der „ $\leq$ “-Aussage genügt es zu bemerken, dass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q und jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ aus $f \leq g$ auch $c_{K,f}^- \leq c_{K,g}^-$ folgt. Dies wiederum bedeutet $S_f^-(\mathcal{Z}) \leq S_g^-(\mathcal{Z})$ für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$, und aus der Definition des Riemann-Integrals folgt

$$\int_Q f(x) dx = \int_{Q\star} f(x) dx = \sup_{\mathcal{Z}} S_f^-(\mathcal{Z}) \leq \sup_{\mathcal{Z}} S_g^-(\mathcal{Z}) = \int_{Q\star} g(x) dx = \int_Q g(x) dx. \quad \square$$

Proposition 1.10 Jede stetige Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Quader Q ist Riemann-integrierbar.

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben und $\|\cdot\|_\infty$ die Maximums-Norm auf $\mathbb{R}^n$. Aus der Analysis mehrerer Variablen ist bekannt, dass jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge gleichmäßig stetig ist. Es gibt also ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $x, y \in Q$ aus $\|x - y\|_\infty < \delta$ jeweils $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ folgt. Sei nun $\mathcal{Z}$ eine so feine Zerlegung von Q , dass der Durchmesser von jedem Quader $K \in \mathcal{Z}$ jeweils kleiner als δ ist. Dann gilt für jeden Quader $K \in \mathcal{Z}$ und alle $x, y \in K$ jeweils $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Daraus folgt jeweils $c_{K,f}^+ - c_{K,f}^- \leq \varepsilon$. Denn wegen $f(x) < \varepsilon + f(y)$ für alle $x, y \in K$ ist $\varepsilon + f(y)$ für jedes $y \in K$ eine obere Schranke von $f(K)$, es gilt also $\sup f(K) \leq \varepsilon + f(y)$ für alle $y \in K$. Aus $f(y) \geq \sup f(K) - \varepsilon$ für alle $y \in K$ wiederum folgt, dass $\sup f(K) - \varepsilon$ eine untere Schranke von $f(K)$ ist. Daraus folgt $\sup f(K) - \varepsilon \leq \inf f(K)$, was zu $c_{K,f}^+ - c_{K,f}^- = \sup f(K) - \inf f(K) \leq \varepsilon$ umgeformt werden kann. Diese Abschätzung wiederum liefert

$$\begin{aligned} S_f^+(\mathcal{Z}) - S_f^-(\mathcal{Z}) &= \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_{K,f}^+ v(K) - \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_{K,f}^- v(K) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} (c_{K,f}^+ - c_{K,f}^-) v(K) \\ &\leq \varepsilon \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} v(K) \leq \varepsilon v(Q). \end{aligned}$$

Weil ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt mit Prop. 1.8 daraus die Behauptung. $\square$

Andererseits gibt es wie im Eindimensionalen auch in jeder höheren Dimension Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind. Sei zum Beispiel $Q = [0, 1]^n$ und die Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $\mathcal{Z}$ eine beliebige Zerlegung von Q und $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$. Wir schreiben K in der Form $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ mit $a_k < b_k$ für $1 \leq k \leq n$. Weil die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen, gibt es für jedes k ein $x_k \in [a_k, b_k] \cap \mathbb{Q}$. Es folgt $f(x) = 1$ für den Punkt $x = (x_1, \dots, x_n)$ in K und somit $c_{K,f}^+ \geq 1$. Weil auch die irrationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen, finden wir ebenso ein $x \in K$ mit $f(x) = 0$. Daraus folgt $c_{K,f}^- \leq 0$. Insgesamt erhalten wir für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ also

$$\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_{K,f}^- v(K) \leq 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_{K,f}^+ v(K) \geq \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} 1 \cdot v(K) = v(Q) = 1.$$

Daraus folgt $\int_{Q^\star} f(x) dx \leq 0$ und $\int_Q^\star f(x) dx \geq 1$. Die Funktion ist also nicht Riemann-integrierbar.

Mit Hilfe des folgenden Satzes kann die höherdimensionale Integration letztlich auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt werden.

Satz 1.11 (Satz von Fubini)

Seien $P \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader, und sei $f : P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion auf dem Quader $P \times Q \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Für jedes $x \in P$ sei die Funktion $f_x : Q \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_x(y) = f(x, y)$. Dann sind die Funktionen

$$f_\star : P \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{Q^\star} f_x(y) dy \quad \text{und} \quad f^\star : P \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_Q^\star f_x(y) dy$$

beide Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{P \times Q} f(x, y) d(x, y) = \int_P \left(\int_{Q^\star} f_x(y) dy \right) dx = \int_P \left(\int_Q^\star f_x(y) dy \right) dx.$$

Beweis: Zunächst geben wir einen Überblick zur Vorgehensweise. Wir erläutern als erstes, wie Zerlegungen der Quader P und Q mit den Zerlegungen des Quaders $P \times Q$ zusammenhängen. Darauf aufbauend folgern wir aus der Riemann-Integrierbarkeit von f die Riemann-Integrierbarkeit der Funktionen $f_\star$ und $f^\star$. Zuletzt beweisen wir die angegebenen Integralgleichungen.

Sei $\mathcal{Z}_P = (\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_m)$ eine Zerlegung von P und $\mathcal{Z}_Q = (\mathcal{Z}_{m+1}, \dots, \mathcal{Z}_{m+n})$ eine Zerlegung von Q . Dann ist durch $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_{m+n})$ eine Zerlegung von $P \times Q$ gegeben, und jede Zerlegung von $P \times Q$ kann auf diese Weise aus Zerlegungen von P und Q zusammengesetzt werden. Außerdem gilt

$$\mathcal{Q}(\mathcal{Z}) = \{ K_P \times K_Q \mid K_P \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_P) \text{ und } K_Q \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_Q) \}.$$

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Weil f Riemann-integrierbar ist, können wir durch Wahl einer geeigneten Zerlegung $\mathcal{Z}$ erreichen, dass die Differenz $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}) - \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z})$ kleiner als ε wird. Wenn wir nun zeigen können, dass $\mathcal{S}_{f_\star}^-(\mathcal{Z}_P) \geq \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z})$ und $\mathcal{S}_{f_\star}^+(\mathcal{Z}_P) \leq \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z})$ gilt, dann erhalten wir auch $\mathcal{S}_{f_\star}^+(\mathcal{Z}_P) - \mathcal{S}_{f_\star}^-(\mathcal{Z}_P) < \varepsilon$, und daraus ergibt sich die Riemann-Integrierbarkeit von $f_\star$. Durch eine vollkommen analoge Überlegung (die wir hier nicht ausführen), ergibt sich auch die Riemann-Integrierbarkeit der Funktion $f^\star$.

Um die Abschätzung $\mathcal{S}_{f_\star}^-(\mathcal{Z}_p) \geq \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z})$ herzuleiten, bemerken wir zunächst, dass

$$\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) = \sum_{K_p \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_p)} \sum_{K_Q \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_Q)} c_{K_p \times K_Q, f}^- v(K_p \times K_Q) = \sum_{K_p \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_p)} \left(\sum_{K_Q \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_Q)} c_{K_p \times K_Q, f}^- v(K_Q) \right) v(K_p)$$

und $\mathcal{S}_{f_\star}^-(\mathcal{Z}_p) = \sum_{K_p \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_p)} c_{K_p, f_\star}^- v(K_p)$ gilt. Wir müssen also für jedes $K_p \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_p)$ die Ungleichung

$$\sum_{K_Q \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_Q)} c_{K_p \times K_Q, f}^- v(K_Q) \leq c_{K_p, f_\star}^- \quad (1.1)$$

beweisen. Nach Definition ist $c_{K_p, f_\star}^- = \inf f_\star(K_p)$, und für jedes $x_0 \in K_p$ ist $f_\star(x_0) = \int_{Q_\star} f_{x_0}(y) dy$. Das Unterintegral wiederum kann nach unten abgeschätzt werden durch die Untersumme $\mathcal{S}_{f_{x_0}}^-(\mathcal{Z}_Q) = \sum_{K_Q \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_Q)} c_{K_Q, f_{x_0}}^- v(K_Q)$. Weiter gilt

$$c_{K_p \times K_Q}^- = \inf\{f(x, y) \mid x \in K_p, y \in K_Q\} \leq \inf\{f(x_0, y) \mid y \in K_Q\} = c_{K_Q, f_{x_0}}^-.$$

Insgesamt erhalten wir damit für jedes $x_0 \in K_p$ die Ungleichung

$$\sum_{K_Q \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_Q)} c_{K_p \times K_Q, f}^- v(K_Q) \leq \sum_{K_Q \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_Q)} c_{K_Q, f_{x_0}}^- v(K_Q) \leq \int_{Q_\star} f_{x_0}(y) dy = f_\star(x_0)$$

Die Summe $\sum_{K_Q \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}_Q)} c_{K_p \times K_Q, f}^- v(K_Q)$ ist also eine untere Schranke für $f_\star(K_p)$, und wegen $c_{K_p, f_\star}^- = \inf f_\star(K_p)$ erhalten wir (1.1), wie gewünscht. Wie weiter oben erläutert, ist die Riemann-Integrierbarkeit von $f_\star$ damit bewiesen.

In einem letzten Schritt beweisen wir nun die im Satz angegebenen Integralgleichungen. Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $P \times Q$ gilt einerseits

$$\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) \leq \mathcal{S}_{f_\star}^-(\mathcal{Z}_p) \leq \int_P f_\star(x) dx \leq \int_P f^\star(x) dx \leq \mathcal{S}_{f^\star}^+(\mathcal{Z}_p) \leq \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}),$$

andererseits aber auch

$$\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) \leq \int_{P \times Q} f(x, y) d(x, y) \leq \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}).$$

Ist nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $\mathcal{Z}$ so gewählt, dass die Differenz $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}) - \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z})$ kleiner als ε wird, so folgt sowohl $|\int_{P \times Q} f(x, y) d(x, y) - \int_P f_\star(x) dx| < \varepsilon$ als auch $|\int_{P \times Q} f(x, y) d(x, y) - \int_P f^\star(x) dx| < \varepsilon$. Da ε beliebig klein gewählt werden kann, stimmen alle drei Integrale überein. $\square$

Häufig ist f in Anwendungsfällen eine stetige Funktion auf $P \times Q$. In diesem Fall ist auch f_x für alle $x \in P$ jeweils auf ganz Q stetig und somit nach Satz 1.10 Riemann-integrierbar. Dies bedeutet, dass die Funktionen $f_\star$ und $f^\star$ zusammenfallen und wir den Satz von Fubini einfach in der Form

$$\int_{P \times Q} f(x, y) d(x, y) = \int_P \left(\int_Q f_x(y) dy \right) dx = \int_P \left(\int_Q f(x, y) dy \right) dx \quad \text{schreiben können.}$$

Beispiel 1:

Betrachten wir noch einmal die Funktion $f(x, y) = xy$ auf $P \times Q = [0, 1]^2$. Offenbar ist f auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig. Deshalb ist der Satz von Fubini anwendbar, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{P \times Q} f(x, y) d(x, y) &= \int_P \left(\int_Q xy dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x dx = \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 2: *Volumen des Simplex*

Als **Simplex** bezeichnen wir die Menge gegeben durch

$$S = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 \mid x + y + z \leq 1\}.$$

Definieren wir die Funktion $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x - y & \text{falls } x + y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann ist das Volumen von S das Integral der Funktion f über $[0, 1]^2$. Für jedes $x \in [0, 1]$ ist die Funktion $f_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_x(y) = \begin{cases} 1 - x - y & \text{für } 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Integral dieser Funktion über $[0, 1]$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_x(y) dy &= \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \left[y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} = (1-x) - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 \\ &= (1-x) + (-x + x^2) + \left((-\frac{1}{2}) + x - \frac{1}{2}x^2 \right) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Setzen wir die Stetigkeit von f als bekannt voraus, dann liefert der Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} f(x, y) d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 3: *Volumen der Einheitskugel*

Zur Vorbereitung berechnen wir das Integral $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ für beliebiges $r \in \mathbb{R}^+$. In der Analysis einer Variablen wurde die Gleichung für den Flächeninhalt des Halbkreises

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2}\pi$$

bewiesen. Mit Hilfe der Substitutionsregel folgt daraus für $r \in \mathbb{R}^+$ jeweils

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = r \int_{-r}^r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} dx = r^2 \int_{-r}^r \frac{1}{r} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} dx = r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2}\pi r^2.$$

Das Volumen der *Halbkugel* ist nun offenbar das Integral der Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{falls } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

über den Bereich $Q = [-1, 1]^2$. In diesem Fall ist $f_x(y)$ für jedes $x \in [-1, 1]$ gegeben durch $f_x(y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ für $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ und $f_x(y) = 0$ für alle $y \notin [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$. Mit Hilfe des soeben berechneten Integrals $\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy$ erhalten wir nun

$$\int_{-1}^1 f_x(y) dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy = \frac{1}{2} \pi (1-x^2)$$

für alle $x \in [-1, 1]$. Weil die Funktion f stetig ist, können wir den Satz von Fubini anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]^2} f(x,y) d(x,y) &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f_x(y) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \pi (1-x^2) dx = \frac{1}{2} \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \pi \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \pi. \end{aligned}$$

Dies ist das Volumen der Halbkugel. Das Volumen der (Voll-)Kugel vom Radius 1 beträgt also $2 \cdot \frac{2}{3} \pi = \frac{4}{3} \pi$.

§ 2. Nullmengen und Lebesguesches Integritätskriterium

Zusammenfassung. Wie wir im ersten Kapitel gezeigt haben, sind stetige Funktionen auf einem Quader stets integrierbar. Andererseits wissen wir bereits aus dem ersten Semester, dass auch unstetige Funktionen integrierbar sein können; zum Beispiel ist auch die *stückweise* Stetigkeit hinreichend für die Integrierbarkeit. In diesem Kapitel werden wir ein Kriterium angeben, das für die Integrierbarkeit sowohl hinreichend als auch notwendig ist: dass die Unstetigkeitsstellen der Funktion eine sog. *Nullmenge* bilden.

Bei den Nullmengen handelt es sich um Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, denen man von der Anschauung her das n -dimensionale Volumen Null zuordnen würde. Um das Kriterium beweisen zu können, benötigen wir den Begriff der *Oszillation* einer Funktion, die als Maß für die Unstetigkeit angesehen werden kann. Die hier entwickelten Konzepte werden wir auch in den nächsten Kapiteln benötigen, wenn wir das Jordan-Volumen einführen und die Integrationstheorie auf Funktionen erweitern, deren Definitionsbereiche keine Quader sind.

Wichtige Grundbegriffe

- Nullmengen, Jordansche Nullmengen
- Oszillation $\omega(f, x)$ der Funktion f in x

Zentrale Sätze

- Lebesguesches Integritätskriterium

Zur Erinnerung: Eine Menge I wird (höchstens) **abzählbar** genannt, wenn sie endlich oder gleichmächtig mit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist. Letzteres bedeutet, dass eine bijektive Abbildung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{N}$ existiert. Eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Mengen bezeichnen wir als abzählbar, wenn die Indexmenge I abzählbar ist.

In diesem Abschnitt werden wir neben den kompakten auch offene Quader im $\mathbb{R}^n$ betrachten. Dabei handelt es sich um kartesische Produkte der Form $]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$. Das Volumen eines solchen Quaders sei weiterhin das Produkt $\prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$ der Intervalllängen $b_k - a_k$. Ist $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein kompakter Quader, so bezeichnen wir mit $Q^\circ =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[$ den offenen Quader, der mit den entsprechenden offenen Intervallen gebildet wird. Umgekehrt können wir jedem offenen Quader Q der oben angegebenen Form durch $\bar{Q} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ einen kompakten Quader zuordnen. Bei Q° handelt es sich um das Innere und bei $\bar{Q}$ um den Abschluss der Menge Q , wie es in der Analysis mehrerer Variablen definiert wurde.

Für die spätere Verwendung bemerken wir noch, dass zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und jedem kompakten Quader Q ein offener Quader $K \supseteq Q$ mit $v(K) < v(Q) + \varepsilon$ gebildet werden kann. Ist Q nämlich ein kartesisches Produkt der Intervalle $[a_k, b_k]$, dann ist für jedes $\delta \in \mathbb{R}^+$ der Quader

$$K_\delta =]a_1 - \delta, b_1 + \delta[\times \dots \times]a_n - \delta, b_n + \delta[$$

eine Obermenge von Q . Für $\delta \rightarrow 0$ gilt offenbar $v(K_\delta) \rightarrow v(Q)$, denn das Volumen eines Quaders ist eine stetige Funktion der Kantenlängen $b_k - a_k$. Für hinreichend kleines $\delta \in \mathbb{R}^+$ kann also $v(K_\delta) < v(Q) + \varepsilon$ erreicht werden.

Definition 2.1 Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Nullmenge**, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine abzählbare Familie $(K_i)_{i \in I}$ von offenen Quadern mit $A \subseteq \bigcup_{i \in I} K_i$ und $\sum_{i \in I} v(K_i) < \varepsilon$ existiert. Findet man für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sogar eine endliche Familie von offenen Quadern mit diesen Eigenschaften, dann sprechen wir von einer **Jordanschen Nullmenge**.

Offenbar ist jede Jordansche Nullmenge eine Nullmenge, denn jede endliche Familie von Quadern ist insbesondere auch eine abzählbare Familie.

Proposition 2.2

- (i) Gilt $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ und ist B eine Nullmenge, dann ist auch A eine Nullmenge. Ist B sogar eine Jordansche Nullmenge, dann ist auch A eine Jordansche Nullmenge.
- (ii) Jede abzählbare Menge ist eine Nullmenge, und jede endliche Menge ist eine Jordansche Nullmenge.
- (iii) Endliche Vereinigungen von Jordanschen Nullmengen sind Jordansche Nullmengen. Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.
- (iv) Eine kompakte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn sie eine Jordansche Nullmenge ist.

Beweis: zu (i) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Weil B eine Nullmenge ist, gibt es eine abzählbare Familie $(K_i)_{i \in I}$ offener Quadern mit $\sum_{i \in I} v(K_i) < \varepsilon$ und $\bigcup_{i \in I} K_i \supseteq B \supseteq A$. Daraus folgt, dass auch A eine Nullmenge ist. Für Jordansche Nullmengen läuft das Argument genauso, die abzählbare Familie muss lediglich durch eine endliche ersetzt werden.

zu (ii) Sei $X = \{x_m \mid m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann können wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen Quader K_m mit $x_m \in K_m$ und $v(K_m) < 2^{-m} \varepsilon$ wählen. Es gilt dann $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m \supseteq X$ und

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} v(K_m) < \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = \varepsilon.$$

Somit ist X eine Nullmenge. Sei nun X endlich, $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und wieder $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben. Dann wählen wir für jedes $\ell \in \{1, \dots, m\}$ einen Quader K_ℓ mit $x_\ell \in K_\ell$ und $v(K_\ell) < \frac{1}{m} \varepsilon$. Dann ist $\bigcup_{\ell=1}^m K_\ell \supseteq X$ und

$$\sum_{\ell=1}^m v(K_\ell) < \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{m} \varepsilon = \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass X eine Jordansche Nullmenge ist.

zu (iii) Wir beschränken uns auf den Beweis der Aussage für Nullmengen. Sei $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Nullmengen $X_m \subseteq \mathbb{R}^n$ und $X = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Familie $(K_{m\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ von Quadern mit $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_{m\ell} \supseteq X_m$ und $\sum_{\ell=1}^{\infty} v(K_{m\ell}) < 2^{-m} \varepsilon$. Da jede abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist, handelt es sich bei $(K_{m\ell})_{m, \ell \in \mathbb{N}}$ um eine abzählbare Familie von Quadern. Außerdem gilt

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_{m\ell} \right) \supseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m = X$$

und

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} v(K_{m\ell}) \right) < \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \varepsilon = \varepsilon.$$

zu (iv) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Die Implikation „ $\Rightarrow$ “ ist gültig, weil jede (und nicht nur jede kompakte) Jordansche Nullmenge auch eine Nullmenge ist. Zum Beweis von „ $\Leftarrow$ “ setzen wir nun voraus, dass A eine Nullmenge ist. Für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ finden wir eine abzählbare Familie $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ offener Quader mit $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m \supseteq A$ und $\sum_{m=1}^{\infty} v(K_m) < \varepsilon$. Weil A kompakt und die Quader K_m offen sind, können wir in $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine endliche Teilüberdeckung $K_{\ell_1}, \dots, K_{\ell_r}$ wählen. Es gilt dann $\bigcup_{i=1}^r K_{\ell_i} \supseteq A$ und $\sum_{i=1}^r v(K_{\ell_i}) \leq \sum_{m=1}^{\infty} v(K_m) < \varepsilon$. Dies zeigt, dass A eine Jordansche Nullmenge ist. $\square$

Wir bemerken noch, dass in der Definition der Nullmengen und der Jordanschen Nullmengen die offenen Quader durch kompakte Quader ersetzt werden können, ohne dass sich an der Definition etwas ändert. Ist nämlich $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von offenen Quadern mit $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m \supseteq A$ und $\sum_{m=1}^{\infty} v(K_m) < \varepsilon$, dann ist durch $(\tilde{K}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Familie abgeschlossener Quader mit $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{K}_m \supseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m \supseteq A$ gegeben. Wegen $v(\tilde{K}_m) = v(K_m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt auch $\sum_{m=1}^{\infty} v(\tilde{K}_m) < \varepsilon$.

Setzen wir nun umgekehrt voraus, dass $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Familie abgeschlossener Quader mit den beiden Eigenschaften $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m \supseteq A$ und $\sum_{m=1}^{\infty} v(K_m) < \varepsilon$ ist. Sei $\delta = \varepsilon - \sum_{m=1}^{\infty} v(K_m)$. Auf Grund der Bemerkung zu Beginn dieses Abschnitts finden wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen offenen Quader $\tilde{K}_m \supseteq K_m$ mit $v(\tilde{K}_m) < v(K_m) + 2^{-m} \delta$. Es gilt dann $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{K}_m \supseteq A$ und

$$\sum_{m=1}^{\infty} v(\tilde{K}_m) < \sum_{m=1}^{\infty} v(K_m) + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \delta \leq \sum_{m=1}^{\infty} v(K_m) + \delta = \varepsilon.$$

Nicht jede Nullmenge ist eine Jordansche Nullmenge. Setzen wir beispielsweise $A = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, dann gibt es keine endliche Familie $\{K_1, \dots, K_m\}$ von Quadern (in diesem Fall Intervalle) mit $\bigcup_{\ell=1}^m K_{\ell} \supseteq A$, erst recht keine Familie mit der Eigenschaft $\sum_{\ell=1}^m v(K_{\ell}) < \varepsilon$ für ein vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Denn jedes Intervall K_{ℓ} hat endliche Länge und enthält deshalb auch nur endlich viele Punkte der unendlichen Menge A . Also ist A keine Jordansche Nullmenge. Andererseits ist A abzählbar und damit nach Prop. 2.2 (ii) eine Nullmenge.

Unser Ziel in diesem Abschnitt besteht darin, mit Hilfe der Nullmengen ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion anzugeben. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einem beliebigen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Für jedes $\delta \in \mathbb{R}^+$ und jedes $a \in D$ definieren wir

$$f_{\delta}^{-}(a) = \inf \{f(x) \mid x \in D, \|x - a\| < \delta\} \quad \text{und} \quad f_{\delta}^{+}(a) = \sup \{f(x) \mid x \in D, \|x - a\| < \delta\},$$

wobei $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Dann nennt man

$$\omega(f, a) = \inf \{f_{\delta}^{+}(a) - f_{\delta}^{-}(a) \mid \delta \in \mathbb{R}^+\}$$

die **Oszillation** von f im Punkt a . Sie ist ein Maß für die „Sprungweite“ der Funktion f in unmittelbarer Nähe des Punktes a . Wir bemerken noch, dass für $0 < \delta_1 < \delta_2$ jeweils $f_{\delta_1}^{-}(a) \geq f_{\delta_2}^{-}(a)$ und $f_{\delta_1}^{+}(a) \leq f_{\delta_2}^{+}(a)$ gilt. Insbesondere ist also $f_{\delta_1}^{+}(a) - f_{\delta_1}^{-}(a) \leq f_{\delta_2}^{+}(a) - f_{\delta_2}^{-}(a)$.

Proposition 2.3 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

- (i) In jedem Punkt $a \in D$ ist f genau dann stetig, wenn $\omega(f, a) = 0$ ist.
- (ii) Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ist $D_{\varepsilon} = \{x \in D \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$ relativ abgeschlossen in D .

Beweis: zu (i) „ $\Rightarrow$ “ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und nehmen wir an, dass f im Punkt a stetig ist. Dann gibt es nach dem ε - δ -Kriterium ein $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, so dass $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $\|x - a\| < \delta_1$ erfüllt ist. Durch Bildung des Infimums bzw. Supremums über all diese x folgt $f_{\delta_1}^-(a) \geq f(a) - \varepsilon$ und $f_{\delta_1}^+(a) \leq f(a) + \varepsilon$, also $f_{\delta_1}^+(a) - f_{\delta_1}^-(a) \leq 2\varepsilon$ und damit erst recht $\omega(f, a) \leq 2\varepsilon$. Weil ε beliebig vorgegeben war, erhalten wir $\omega(f, a) = 0$.

„ $\Leftarrow$ “ Setzen wir $\omega(f, a) = 0$ voraus, dann gibt es für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ mit $f_{\delta_1}^+(a) - f_{\delta_1}^-(a) < \varepsilon$. Für alle $x \in D$ mit $\|x - a\| < \delta_1$ gilt

$$f_{\delta_1}^-(a) \leq f(x), f(a) \leq f_{\delta_1}^+(a) ,$$

und daraus folgt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Damit ist das ε - δ -Kriterium erfüllt, also ist f im Punkt a stetig.

zu (ii) Wir zeigen, dass $U_\varepsilon = D \setminus D_\varepsilon$ eine in D relativ offene Teilmenge ist. Sei $a \in U_\varepsilon$ vorgegeben. Dann gilt $\omega(f, a) < \varepsilon$ nach Definition von U_ε , insbesondere finden wir ein $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ mit $f_{\delta_1}^+(a) - f_{\delta_1}^-(a) < \varepsilon$. Sei nun z ein beliebiger Punkt in $B_{\delta_1}(a) \cap D$. Wir müssen zeigen, dass auch $\omega(f, z) < \varepsilon$ gilt, die Differenz $f_{\delta_2}^+(z) - f_{\delta_2}^-(z)$ also für ein hinreichend kleines δ_2 unterhalb des Wertes ε bleibt. Sei dazu $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $B_{\delta_2}(z) \subseteq B_{\delta_1}(a)$ für die offenen Bälle bezüglich $\|\cdot\|$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned} \inf \{f(x) \mid x \in D \cap B_{\delta_1}(a)\} &\leq \inf \{f(x) \mid x \in D \cap B_{\delta_2}(z)\} \leq \sup \{f(x) \mid x \in D \cap B_{\delta_2}(z)\} \\ &\leq \sup \{f(x) \mid x \in D \cap B_{\delta_1}(a)\} \end{aligned}$$

folgt dann $f_{\delta_2}^+(z) - f_{\delta_2}^-(z) \leq f_{\delta_1}^+(a) - f_{\delta_1}^-(a)$ und somit $\omega(f, z) \leq f_{\delta_1}^+(a) - f_{\delta_1}^-(a) < \varepsilon$. Dies zeigt, dass die Menge $B_{\delta_1}(a) \cap D$ in U_ε enthalten ist, und damit ist die relative Offenheit von U_ε in D bewiesen. $\square$

Unser nächstes Ziel besteht darin, die Differenz zwischen Ober- und Untersumme einer Funktion anhand der Oszillation abzuschätzen. Als Vorbereitung benötigen wir eine weitere technische Aussage über Zerlegungen.

Lemma 2.4 Seien $r \in \mathbb{N}$ und $Q, K_1, \dots, K_r \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte Quader, wobei $K_i \subseteq Q$ für $1 \leq i \leq r$ gilt. Dann gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q mit der Eigenschaft, dass $K_1, \dots, K_r$ als Vereinigung von Quadern aus $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ dargestellt werden können.

Beweis: Seien die Quader Q und $K_1, \dots, K_r$ gegeben durch $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ und $K_i = [a_{i1}, b_{i1}] \times \dots \times [a_{in}, b_{in}]$ für $1 \leq i \leq r$. Wegen $K_i \subseteq Q$ gilt jeweils $a_k \leq a_{ik} < b_{ik} \leq b_k$, für $1 \leq k \leq n$. Wir können also durch $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_n)$ mit

$$\mathcal{Z}_k = \{a_{1k}, b_{1k}, \dots, a_{rk}, b_{rk}\} \setminus \{a_k, b_k\} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n$$

eine Zerlegung von Q definieren. Für $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq k \leq n$ gilt dann jeweils $\{a_{ik}, b_{ik}\} \subseteq \mathcal{Z}_k \cup \{a_k, b_k\}$. Die Intervallgrenzen a_{ik}, b_{ik} sind also jeweils in der Menge der Zerlegungspunkte $\mathcal{Z}_k$ unter Hinzunahme von a_k, b_k enthalten, so dass $[a_{ik}, b_{ik}]$ als Vereinigung der Teilintervalle dargestellt werden kann, die durch die Zerlegung $\mathcal{Z}_k$ gegeben sind. Somit ist K_i eine Vereinigung der in $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ enthaltenen Teilquader von Q . $\square$

Lemma 2.5 Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\omega(f, x) < \varepsilon$ für alle $x \in Q$. Dann gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q mit der Eigenschaft, dass $c_{K,f}^+ - c_{K,f}^- \leq \varepsilon$ für alle $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ erfüllt ist.

Beweis: Auf Grund der Voraussetzung gibt es für jeden Punkt $a \in Q$ ein $\delta_a \in \mathbb{R}^+$ mit $f_{\delta_a}^+(a) - f_{\delta_a}^-(a) \leq \varepsilon$. Für jedes a sei K_a ein kompakter Quader mit $a \in K_a$ und $K_a \subseteq B_{\delta_a}(a)$, wobei $B_{\delta_a}(a)$ den offenen Ball vom Radius δ_a bezüglich

der euklidischen Norm bezeichnet. Dann bilden die offenen Quader K_a° eine offene Überdeckung von Q , aus der wir auf Grund der Kompaktheit von Q eine endliche Teilüberdeckung $K_{a_1}^\circ, \dots, K_{a_r}^\circ$ wählen können. Nach Konstruktion gilt $c_{K_{a_i},f}^+ - c_{K_{a_i},f}^- \leq \varepsilon$ für $1 \leq i \leq r$. Wird nun die Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit Lemma 2.4 so fein gewählt, dass jeder Quader K_{a_i} als Vereinigung von Quadern aus $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ dargestellt werden kann, dann ist $c_{K,f}^+ - c_{K,f}^- \leq \varepsilon$ für alle $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ erfüllt. $\square$

Wir können nun das Hauptergebnis dieses Kapitels formulieren und beweisen.

Satz 2.6 (Lebesguesches Integrierbarkeitskriterium)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader, $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $U \subseteq Q$ die Teilmenge der Punkte, in denen f unstetig ist. Dann sind äquivalent

- (i) Die Funktion f ist Riemann-integrierbar.
- (ii) Die Menge U ist eine Nullmenge.

Beweis: „ $\Rightarrow$ “ Nach Voraussetzung ist f Riemann-integrierbar, und wir müssen zeigen, dass U eine Nullmenge ist. Definieren wir für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils $U_\varepsilon = \{x \in Q \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$, dann gilt $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{1/n}$ nach Prop. 2.3 (i). Wegen Prop. 2.2 (iii) genügt es zu zeigen, dass $U_{1/n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge ist. Seien also $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der Riemann-Integrierbarkeit von f gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q mit $S_f^+(\mathcal{Z}) - S_f^-(\mathcal{Z}) < \frac{\varepsilon}{n}$. Dann ist durch

$$\mathcal{Q} = \{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}) \mid K^\circ \cap U_{1/n} \neq \emptyset\}$$

eine endliche Menge von Quadern mit $U_{1/n} \subseteq \bigcup_{K \in \mathcal{Q}} K$ definiert. Für jedes $K \in \mathcal{Q}$ gibt es wegen $K^\circ \cap U_{1/n} \neq \emptyset$ einen Punkt $a \in K^\circ$ mit $\omega(f, a) \geq \frac{1}{n}$ und ein zugehöriges $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\delta(a) \subseteq K^\circ$. Nach Definition der Oszillation gilt

$$\sup\{f(x) \mid x \in B_\delta(a)\} - \inf\{f(x) \mid x \in B_\delta(a)\} \geq \frac{1}{n}$$

und damit insbesondere $c_{K,f}^+ - c_{K,f}^- \geq \frac{1}{n}$ für alle $K \in \mathcal{Q}$. Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{K \in \mathcal{Q}} v(K) &\leq \sum_{K \in \mathcal{Q}} (c_{K,f}^+ - c_{K,f}^-) v(K) \leq \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} (c_{K,f}^+ - c_{K,f}^-) v(K) \\ &= S_f^+(\mathcal{Z}) - S_f^-(\mathcal{Z}) < \frac{\varepsilon}{n} \end{aligned}$$

und $\sum_{K \in \mathcal{Q}} v(K) < \varepsilon$. Damit ist gezeigt, dass es sich bei $U_{1/n}$ um eine Nullmenge handelt.

„ $\Leftarrow$ “ Nach Voraussetzung ist die Teilmenge $U \subseteq Q$ der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Für den Nachweis der Riemann-Integrierbarkeit von f genügt es zu zeigen, dass eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $S_f^+(\mathcal{Z}) - S_f^-(\mathcal{Z}) < (2\|f\|_\infty + v(Q))\varepsilon$ existiert, wobei $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in Q\}$ gesetzt wird. Wegen $U_\varepsilon \subseteq U$ ist auch U_ε eine Nullmenge (siehe Prop. 2.2) (i)). Die Menge U_ε ist nach Prop. 2.3 (ii) abgeschlossen, und als abgeschlossene Teilmenge U_ε der kompakten Menge Q ist auch U_ε kompakt. Aus Prop. 2.2 (iv) folgt, dass U_ε sogar eine Jordansche Nullmenge ist. Es gibt also offene Teilquader $K_1, \dots, K_p$ von Q mit $U_\varepsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^p K_i$ und $\sum_{i=1}^p v(K_i) < \varepsilon$.

Wir wählen nun mit Lemma 2.4 eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q so, dass jeder der kompakten Quader $\bar{K}_i$ als Vereinigung von Quadern aus $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ dargestellt werden kann. Für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ gilt dann entweder $K \subseteq \bar{K}_i$ für ein $i \in \{1, \dots, p\}$, oder K und $\bar{K}_i$ haben für alle i nur Randpunkte gemeinsam, so dass $K \cap U_\varepsilon = \emptyset$ gilt. Die Quader in der ersten Kategorie

fassen wir zur Menge $\mathcal{Q}_1$, die der zweiten zur Menge $\mathcal{Q}_2$ zusammen, so dass $\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ und $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 = \emptyset$ gilt. Nach Lemma 2.5, angewendet auf die einzelnen Teilquader $K \in \mathcal{Q}_2$ und die Einschränkungen $f|_K$, können wir durch eine weitere Verfeinerung von $\mathcal{Z}$ erreichen, dass $c_{K,f}^+ - c_{K,f}^- \leq \varepsilon$ für alle $K \in \mathcal{Q}_2$ gilt. Weil zudem $|c_{K,f}^-|, |c_{K,f}^+| \leq \|f\|_\infty$ für alle $K \in \mathcal{Q}_1$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} S_f^+(\mathcal{Z}) - S_f^-(\mathcal{Z}) &= \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} (c_{K,f}^+ - c_{K,f}^-) v(K) = \sum_{K \in \mathcal{Q}_1} (c_{K,f}^+ - c_{K,f}^-) v(K) + \sum_{K \in \mathcal{Q}_2} (c_{K,f}^+ - c_{K,f}^-) v(K) \\ &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{K \in \mathcal{Q}_1} v(K) + \varepsilon \sum_{K \in \mathcal{Q}_2} v(K) \leq 2\|f\|_\infty \varepsilon + \varepsilon v(Q) = (2\|f\|_\infty + v(Q)) \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Wir illustrieren den soeben bewiesenen Satz an einem Beispiel. Die Funktion auf $Q = [0, 1]^2$ gegeben durch

$$f : Q \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 3 & \text{falls } x + y < 1 \\ 5 & \text{falls } x + y \geq 1 \end{cases}$$

ist offenbar unstetig, aber die Menge der Unstetigkeitsstellen ist in der Menge $U = \{(x, y) \in Q \mid x + y = 1\}$ enthalten. Ist nämlich $(x, y) \in Q$ mit $x + y > 1$ vorgegeben und $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n (x_n, y_n) = (x, y)$, dann gibt es für $\varepsilon = \frac{1}{2}(x + y - 1)$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|(x_n, y_n) - (x, y)\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen $|x_n - x| < \varepsilon$ und $|y_n - y| < \varepsilon$ gilt insbesondere $x_n > x - \varepsilon$, $y_n > y - \varepsilon$ und damit $x_n + y_n > x + y - 2\varepsilon = x + y - (x + y - 1) = 1$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt $f(x_n, y_n) = 5 = f(x, y)$ für alle $n \geq N$ und somit $\lim_n f(x_n, y_n) = f(x, y)$. Ebenso beweist man die Stetigkeit von f in jedem Punkt $(x, y) \in Q$ mit $x + y < 1$. Also kann f nur an den Punkten (x, y) mit $x + y = 1$ unstetig sein.

Die Menge U (und damit die Menge der Unstetigkeitsstellen von f) ist eine Nullmenge. Definieren wir nämlich für beliebig vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$ die Quader $Q_k^{(n)} = [\frac{n-k}{n}, \frac{n+1-k}{n}] \times [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, dann gilt jeweils

$$U \subseteq \bigcup_{k=1}^n Q_k^{(n)}.$$

Sei nämlich $(x, y) \in U$ vorgegeben (mit $0 \leq x, y \leq 1$ und $x + y = 1$) und $k = \lceil ny \rceil$. Nach Definition der oberen Gaußklammer gilt dann $k - 1 < ny \leq k \Leftrightarrow \frac{k-1}{n} < y \leq \frac{k}{n}$ und

$$\frac{k-1}{n} < 1 - x \leq \frac{k}{n} \Leftrightarrow \frac{k-1-n}{n} < -x \leq \frac{k-n}{n} \Leftrightarrow \frac{n-k}{n} \leq x < \frac{n+1-k}{n},$$

also $(x, y) \in Q_k^{(n)}$. Das Volumen der Quader beträgt jeweils $v(Q_k^{(n)}) = \frac{1}{n^2}$, also ist

$$\sum_{k=1}^n v(Q_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Ist nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ erfüllt ist, dann gilt $U \subseteq \bigcup_{k=1}^n Q_k^{(n)}$ und $\sum_{k=1}^n v(Q_k^{(n)}) < \varepsilon$. Damit haben wir gezeigt, dass U sogar eine Jordansche Nullmenge ist.

Nach Satz 2.6 ist die Funktion f also Riemann-integrierbar. Das Integral können wir wie zuvor mit dem Satz von Fubini ausrechnen. Für jedes $x \in [0, 1]$ gilt $f_x(y) = 3 \Leftrightarrow x + y < 1 \Leftrightarrow y < 1 - x$ und $f_x(y) = 5 \Leftrightarrow x + y \geq 1 \Leftrightarrow y \geq 1 - x$, somit

$$\int_0^1 f_x(y) dy = \int_0^{1-x} 3 dy + \int_{1-x}^1 5 dy = 3(1-x) + 5x = 2x + 3$$

und

$$\int_Q f(x, y) d(x, y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(y) dy \right) dx = \int_0^1 (2x + 3) dx = [x^2 + 3x]_{x=0}^{x=1} = 4.$$

§ 3. Integration über Jordan-messbare Mengen

Zusammenfassung. Mit den Grundlagen, die im letzten Kapitel geschaffen wurden, sind wir nun endlich in der Lage, den Volumenbegriff für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ präzise zu definieren. Nicht jeder Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ kann auf sinnvolle Weise ein Volumen zugeordnet werden; durch das Konzept des *inneren* und *äußeren* Volumens, das wir hier einführen, lassen sich die Mengen, bei denen dies möglich ist, aber auf anschauliche Weise charakterisieren. Solche Mengen bezeichnen wir als *Jordan-messbar*. Wir betrachten eine Reihe von Mengenoperationen, unter denen die Jordan-Messbarkeit erhalten bleibt.

Im nächsten Teil des vorliegenden Kapitels erweitern wir den Begriff des Riemann-Integrals auf Funktionen, deren Definitionsbereich eine Jordan-messbare Menge ist. Die aus der Schulmathematik bekannte Tatsache, dass das Integral einer nicht-negativen Funktion als Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen interpretiert werden kann, lässt sich auf höhere Dimension verallgemeinern. Auf diese Weise erhält der Satz von Fubini aus dem ersten Kapitel über das *Cavalierische Prinzip* eine anschauliche Interpretation: Man kann beispielsweise das Volumen eines Körpers berechnen, indem man die Flächeninhalte der Querschnitte entlang einer Koordinatenachse bestimmt und diese aufintegriert. Am Ende des Kapitels beschäftigen wir uns noch mit Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die der Integralrechnung besonders leicht zugänglich sind, die sogenannten *Normalbereiche*.

Wichtige Grundbegriffe

- charakteristische Funktion einer Menge
- Jordan-Messbarkeit, inneres und äußeres Volumen, Jordan-Volumen
- Riemann-Integral über Jordan-messbare Mengen
- Graph und Ordinatenmenge einer Funktion
- Querschnitt einer Menge bezüglich einer Koordinatenachse
- Normalbereich bezüglich einer Koordinatenachse

Zentrale Sätze

- Kriterien für die Jordan-Messbarkeit (Gleichheit von innerem und äußerem Volumen, Rand ist Nullmenge)
- Eigenschaften des Jordan-Volumens (Translationsinvarianz, Skalierungseigenschaft)
- Mittelwertsatz der Integralrechnung
- Rechenregeln für das Riemann-Integral
- allgemeiner Satz von Fubini, Cavalierisches Prinzip

Definition 3.1 Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ wird **Jordan-messbar** genannt, wenn sie beschränkt und die *charakteristische Funktion* von A gegeben durch

$$\chi_A : Q \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist. Dabei bezeichnet Q einen beliebigen kompakten Quader mit $Q^\circ \supseteq A$. Das Integral $v(A) = \int_Q \chi_A(x) dx$ wird in diesem Fall das **Jordan-Volumen** von A genannt.

Durch die Bedingung, dass A beschränkt ist, wird sichergestellt, dass tatsächlich ein kompakter Quader Q mit $Q^\circ \supseteq A$ existiert. Darüber hinaus gilt

Proposition 3.2 Sowohl die Definition der Jordan-Messbarkeit als auch das Jordan-Volumen sind unabhängig von der Wahl des Quaders Q .

Beweis: Sei Q' ein weiterer Quader mit $(Q')^\circ \supseteq A$ und χ'_A die charakteristische Funktion von A auf Q' . Wir können $Q' \supseteq Q$ annehmen, weil sich die allgemeine Aussage aus dieser speziellen Situation unmittelbar ergibt: Sind nämlich Q, Q' beliebig vorgegeben, dann wählen wir einen Quader Q'' mit $Q'' \supseteq Q, Q'$ und bezeichnen die zugehörige charakteristische Funktion mit χ''_A . Nach dem als bewiesen vorausgesetzten Fall ist die Integrierbarkeit von χ''_A sowohl zur Integrierbarkeit von χ_A als auch zur Integrierbarkeit von χ'_A äquivalent, und die Integrale über alle drei Funktionen stimmen überein.

Setzen wir von nun an also $Q' \supseteq Q$ voraus. Zu jeder Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q können wir durch Lemma 2.4 eine Zerlegung $\mathcal{Z}'$ von Q' mit $\mathcal{Q}(\mathcal{Z}') \supseteq \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ wählen und setzen $\mathcal{Q}'' = \mathcal{Q}(\mathcal{Z}') \setminus \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$. Für alle $K \in \mathcal{Q}''$ gilt $K \subseteq Q' \setminus Q^\circ$ und wegen $K \subseteq Q^\circ$ somit $A \cap K = \emptyset$. Es folgt $\chi'_A(x) = 0$ für alle $x \in K$ und somit $c_{K, \chi'_A}^+ = c_{K, \chi'_A}^- = 0$. Liegt K dagegen in $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$, dann gilt $K \subseteq Q$, also $\chi'_A|_K = \chi_A|_K$ und damit $c_{K, \chi'_A}^+ = c_{K, \chi_A}^+$ und $c_{K, \chi'_A}^- = c_{K, \chi_A}^-$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} S_{\chi'_A}^+(\mathcal{Z}) &= \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}')} c_{K, \chi'_A}^+ v(K) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_{K, \chi'_A}^+ v(K) + \sum_{K \in \mathcal{Q}''} c_{K, \chi'_A}^+ v(K) = \\ &= \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_{K, \chi_A}^+ v(K) + 0 = S_{\chi_A}^+(\mathcal{Z}) \end{aligned}$$

und ebenso $S_{\chi'_A}^-(\mathcal{Z}) = S_{\chi_A}^-(\mathcal{Z})$.

Wir beweisen nun die behauptete Äquivalenz. Ist die Funktion $\chi_A : Q \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann existiert für jedes vorgegebene $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q mit $S_{\chi_A}^+(\mathcal{Z}) - S_{\chi_A}^-(\mathcal{Z}) < \varepsilon$. Wählen wir die Zerlegung $\mathcal{Z}'$ von Q' wie im letzten Absatz angegeben, dann gilt auch auf Grund der Gleichheit der Ober- und der Untersummen auch $S_{\chi'_A}^+(\mathcal{Z}') - S_{\chi'_A}^-(\mathcal{Z}') < \varepsilon$, und daraus folgt die Riemann-Integrierbarkeit von χ'_A . Wegen

$$S_{\chi_A}^-(\mathcal{Z}) < \int_Q \chi_A(x) dx, \quad \int_{Q'} \chi'_A(x) dx < S_{\chi'_A}^+(\mathcal{Z})$$

gilt außerdem $\left| \int_{Q'} \chi'_A(x) dx - \int_Q \chi_A(x) dx \right| < \varepsilon$. Weil $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben war, stimmen die Integrale somit überein. Setzen wir umgekehrt voraus, dass χ'_A Riemann-integrierbar ist. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}'$ von Q' mit $S_{\chi'_A}^+(\mathcal{Z}') - S_{\chi'_A}^-(\mathcal{Z}') < \varepsilon$. Durch Verfeinerung von $\mathcal{Z}'$ können wir wiederum mit Lemma 2.4 erreichen, dass Q als Vereinigung von Quadern aus $\mathcal{Q}(\mathcal{Z}')$ darstellbar ist, ohne dass sich an der Ungleichung etwas ändert. Es existiert dann eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q mit $\mathcal{Q}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{Z}')$. Wie zuvor folgt daraus $S_{\chi'_A}^-(\mathcal{Z}') = S_{\chi_A}^-(\mathcal{Z})$, $S_{\chi'_A}^+(\mathcal{Z}') = S_{\chi_A}^+(\mathcal{Z})$ und damit die Integrierbarkeit von χ_A . $\square$

Dass die soeben angegebene Definition des Volumens einer Menge sinnvoll ist, wird durch die folgende Betrachtungsweise bestätigt. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge. Dann bezeichnet man

$$v^-(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^p v(K_i) \mid K_1, \dots, K_p \text{ disjunkte kompakte Quader mit } \bigcup_{i=1}^n K_i \subseteq A \right\}$$

als das **innere Volumen** von A , und

$$v^+(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^p v(K_i) \mid K_1, \dots, K_p \text{ kompakte Quader mit } \bigcup_{i=1}^p K_i \supseteq A \right\}$$

wird das **äußere Volumen** von A genannt. Es gilt nun

Proposition 3.3 Eine beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn inneres und äußeres Volumen übereinstimmen, und dann gilt $v(A) = v_-(A) = v^+(A)$.

Beweis: Sei Q ein kompakter Quader mit $Q^\circ \supseteq A$. Wir zeigen, dass $v^+(A)$ mit dem Oberintegral von χ_A übereinstimmt und beweisen dafür zunächst die Ungleichung $\int_Q^\star \chi_A(x) dx \leq v^+(A)$. Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben, dann gibt es nach Definition von $v^+(A)$ eine endliche Anzahl kompakter Quader $K_1, \dots, K_p$ mit $\bigcup_{i=1}^p K_i^\circ \supseteq A$ und $\sum_{i=1}^p v(K_i) < v^+(A) + \varepsilon$. Wir können diese Quader K_i durch $K_i \cap Q$ ersetzen und somit $K_i \subseteq Q$ annehmen, ohne an der Inklusion oder der Ungleichung etwas zu ändern. Nun wählen wir eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q so, dass jedes K_i als Vereinigung von Quadern aus $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ dargestellt werden kann. Für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ gibt es dann ein $i \in \{1, \dots, p\}$ mit $K \subseteq K_i$, oder es ist $K \cap A = \emptyset$. Wir bezeichnen die Teilmenge der Quader mit der ersten Eigenschaft mit $\mathcal{Q}_i$ und die Menge der zu A disjunkten Quader mit $\mathcal{Q}_0$. Für die Obersumme gilt dann

$$\begin{aligned} S_{\chi_A}^+(\mathcal{Z}) &= \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_{K, \chi_A}^+ v(K) = \sum_{K \in \mathcal{Q}_0} c_{K, \chi_A}^+ v(K) + \sum_{i=1}^p \sum_{K \in \mathcal{Q}_i} c_{K, \chi_A}^+ v(K) \leq \\ &0 + \sum_{i=1}^p \sum_{K \in \mathcal{Q}_i} v(K) = \sum_{i=1}^p v(K_i) < v^+(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Weil das Oberintegral das Infimum über alle Obersummen ist, folgt daraus die Ungleichung $\int_Q^\star \chi_A(x) dx \leq v^+(A) + \varepsilon$. Weil $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig klein gewählt werden kann, erhalten wir insgesamt das gewünschte Resultat.

Beweisen wir nun die Ungleichung $v^+(A) \leq \int_Q^\star \chi_A(x) dx$. Für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es nach Definition des Oberintegrals eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q mit

$$S_{\chi_A}^+(\mathcal{Z}) \leq \int_Q^\star \chi_A(x) dx + \varepsilon.$$

Seien $K_1, \dots, K_p \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ die endlich vielen Quader mit der Eigenschaft $K_i \cap A \neq \emptyset$. Dann gilt $\bigcup_{i=1}^p K_i \supseteq A$ und wegen $c_{K_i, \chi_A}^+ = 1$ außerdem

$$\sum_{i=1}^p v(K_i) = \sum_{i=1}^p c_{K_i, \chi_A}^+ v(K_i) \leq \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_{K, \chi_A}^+ v(K) = S_{\chi_A}^+(\mathcal{Z}) \leq \int_Q^\star \chi_A(x) dx + \varepsilon.$$

Weil das äußere Volumen nach Definition das Infimum über all diese Summen $\sum_{i=1}^p v(K_i)$ ist, erhalten wir somit auch die zweite Ungleichung. Also stimmt das äußere Volumen von A tatsächlich mit dem Oberintegral von χ_A überein. Auf ähnliche Weise kann gezeigt werden, dass $v^-(A)$ mit dem Unterintegral von χ_A übereinstimmt.

Ist nun A Jordan-messbar, dann ist die Funktion $\chi_A : Q \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dies bedeutet, dass Ober- und Unterintegral von χ_A übereinstimmen, wir erhalten

$$v(A) = \int_Q \chi_A(x) dx = \int_{Q^\star} \chi_A(x) dx = v^-(A)$$

und ebenso $v(A) = v^+(A)$. Setzen wir umgekehrt $v^+(A) = v_-(A)$ voraus, dann stimmen Ober- und Unterintegral von χ_A überein. Daraus folgt die Riemann-Integrierbarkeit von χ_A und die Jordan-Messbarkeit von A . $\square$

Wir werden nun ein Kriterium herleiten, mit dem sich anhand des Randes die Jordan-Messbarkeit einer Menge testen lässt. Zur Vorbereitung zeigen wir

Proposition 3.4 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge, Q ein Quader mit $Q^\circ \supseteq A$ und χ_A die zugehörige charakteristische Funktion. Dann sind die Randpunkte von A genau die Unstetigkeitsstellen von χ_A .

Beweis: Sei $a \in \partial A$ vorgegeben, und nehmen wir zunächst an, dass a in A enthalten ist. Nach Definition der Randpunkte gibt es in jeder Umgebung von a einen Punkt der Menge $Q \setminus A$. Es existiert also eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $Q \setminus A$ mit $\lim_n x_n = a$. Wegen $x_n \in Q \setminus A$ gilt $\chi_A(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit auch $\lim_n \chi_A(x_n) = 0$. Andererseits ist $\chi_A(a) = 1$ wegen $a \in A$, also ist die Funktion χ_A an der Stelle a unstetig. Liegt der Randpunkt A statt dessen in $Q \setminus A$, dann kann dasselbe Argument mit einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A wiederholt werden.

Setzen wir nun umgekehrt voraus, dass $a \in Q$ eine Unstetigkeitsstelle von χ_A ist. Sei U eine beliebige Umgebung von a . Würde $U \subseteq A$ oder $U \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus A)$ gelten, dann wäre χ_A auf $U \cap Q$ konstant gleich 1 oder 0 und χ_A damit in a stetig. So aber gibt es in U sowohl Punkte aus A als auch Punkte aus $\mathbb{R}^n \setminus A$. Daraus folgt, dass a ein Randpunkt von A ist. $\square$

Folgerung 3.5 Eine beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ∂A eine Nullmenge ist.

Beweis: Sei Q ein kompakter Quader im $\mathbb{R}^n$ mit $Q^\circ \supseteq A$. Nach Definition ist A genau dann Jordan-messbar, wenn $\chi_A : Q \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. Nach Satz 2.6 ist dies genau dann der Fall, wenn die Unstetigkeitsstellen von χ_A eine Nullmenge bilden. Aber nach Prop. 3.4 sind die Unstetigkeitsstellen genau die Randpunkte von A . $\square$

Mit Hilfe des soeben bewiesenen Kriteriums lässt sich die Erhaltung der Jordan-Messbarkeit unter den üblichen Mengenoperationen leicht herleiten.

Lemma 3.6 Seien (X, d) ein metrischer Raum, und seien $A, B \subseteq X$ beliebige Teilmengen. Dann sind die Ränder $\partial(A \cap B)$, $\partial(A \cup B)$ und $\partial(A \setminus B)$ jeweils in $(\partial A) \cup (\partial B)$ enthalten.

Beweis: Beweisen wir zunächst die Inklusion $\partial(A \cap B) \subseteq (\partial A) \cup (\partial B)$. Ist $a \in \partial(A \cap B)$ vorgegeben, dann gibt es Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $A \cap B$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $X \setminus (A \cap B)$ mit $\lim_n x_n = \lim_n y_n = a$. Wegen $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ gibt es eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die entweder vollständig in $X \setminus A$ oder vollständig in $X \setminus B$ enthalten ist. Im ersten Fall folgt daraus, dass jede Umgebung von a sowohl Punkte von A als auch Punkte von $X \setminus A$ enthält, und damit ist a ein Randpunkt von A . Im zweiten Fall liegt a in ∂B .

Für die Inklusion $\partial(A \cup B) \subseteq (\partial A) \cup (\partial B)$ läuft das Argument ähnlich. Für jeden Punkt $a \in \partial(A \cup B)$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $A \cup B$ und eine weitere Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$, wobei $\lim_n x_n = \lim_n y_n = a$ gilt. Wegen $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowohl in $X \setminus A$ als auch in $X \setminus B$ enthalten. Außerdem gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die entweder vollständig in A oder vollständig in B enthalten ist. Im ersten Fall folgt $a \in \partial A$, im zweiten $a \in \partial B$.

Beweisen wir nun noch $\partial(A \setminus B) \subseteq (\partial A) \cup (\partial B)$. Hier existiert für jedes $a \in \partial(A \setminus B)$ eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $A \setminus B$ und eine weitere Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $X \setminus (A \setminus B) = (X \setminus A) \cup B$, wobei wieder $\lim_n x_n = \lim_n y_n = a$ gilt. Auf Grund der Mengengleichung existiert eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die entweder ganz in $X \setminus A$ oder ganz in B liegt. Im ersten Fall gilt $a \in \partial A$, im zweiten $a \in \partial B$. $\square$

Folgerung 3.7 Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei Jordan-messbare Teilmengen.

- (i) Dann sind auch die Mengen $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \setminus B$ Jordan-messbar.
- (ii) Aus $A \subseteq B$ folgt $v(A) \leq v(B)$ und $v(B \setminus A) = v(B) - v(A)$.
- (iii) In jedem Fall gilt $v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$.

Beweis: Die Aussage (i) folgt direkt aus Lemma 3.7 und Prop. 3.5, weil mit ∂A und ∂B auch die Vereinigung $(\partial A) \cup (\partial B)$ eine Nullmenge ist. Sei nun Q ein Quader mit $Q^\circ \supseteq A \cup B$. Aus $A \subseteq B$ folgt $\chi_A \leq \chi_B$ und damit

$$v(A) = \int_Q \chi_A(x) dx \leq \int_Q \chi_B(x) dx = v(B).$$

Die Gleichung $v(B \setminus A) = v(B) - v(A)$ ergibt sich aus $\chi_{B \setminus A}(x) = \chi_B(x) - \chi_A(x)$ für alle $x \in Q$, und ebenso leitet man $v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$ aus $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$ ab. $\square$

Wir illustrieren die Berechnung des Jordan-Volumens, indem wir für beliebige $\ell, r \in \mathbb{R}^+$ das Volumen des **Zylinders**

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq \ell, y^2 + z^2 \leq r^2\} \quad \text{berechnen.}$$

Den Nachweis, dass ∂A eine Nullmenge und A somit Jordan-messbar ist, lassen wir aus Zeitgründen zunächst weg; wir kommen später darauf zurück. Offenbar ist A im Inneren des Quaders $Q = [-1, \ell + 1] \times [-r - 1, r + 1]^2$ enthalten, denn für alle $(x, y, z) \in A$ gilt $-1 < x < \ell + 1$ und $-r - 1 < y, z < r + 1$. Die charakteristische Funktion $\chi_A : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\chi_A(x, y, z) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \ell \text{ und } y^2 + z^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $f = \chi_A$. Nach dem Satz von Fubini gilt

$$v(A) = \int_Q f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{-1}^{\ell+1} \left(\int_{-r-1}^{r+1} \left(\int_{-r-1}^{r+1} f_{(x,y)}(z) dz \right) dy \right) dx$$

mit $f_{(x,y)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_{(x,y)}(z) = f(x, y, z)$ für alle $(x, y, z) \in Q$. Diese Funktion ist konstant Null, falls $x < 0$, $x > \ell$ oder $|y| > r$ ist, ansonsten gilt

$$f_{(x,y)}(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -\sqrt{r^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{r^2 - y^2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Integral $g(x, y) = \int_{-r-1}^{r+1} f_{(x,y)}(z) dz$ ist also gleich Null für $x < 0$, $x > \ell$, $y < -r$ oder $y > r$, in den anderen Fällen gilt

$$g(x, y) = \int_{-r-1}^{r+1} f_{(x,y)}(z) dz = \int_{-\sqrt{r^2 - y^2}}^{\sqrt{r^2 - y^2}} 1 dz = 2\sqrt{r^2 - y^2}.$$

Sei nun $h(x) = \int_{-r-1}^{r+1} g(x, y) dy$. Durch Einsetzen erhalten wir für $0 \leq x \leq \ell$ jeweils

$$h(x) = \int_{-r-1}^{r+1} g(x, y) dy = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - y^2} dy = \pi r^2 ;$$

die Formel $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{1}{2} \pi r^2$ hatten wir bereits früher hergeleitet. Für $x > \ell$ gilt $h(x) = 0$, weil die Funktion $y \mapsto g(x, y)$ in diesem Fall auf $[-r-1, r+1]$ konstant Null ist. Setzen wir dies wiederum ein, so erhalten wir schließlich

$$v(A) = \int_Q f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{-1}^{\ell+1} h(x) dx = \int_0^{\ell} \pi r^2 dx = \ell \pi r^2.$$

Wir ergänzen noch einige Sätze und Rechenregeln, die sich im weiteren Verlauf als nützlich erweisen werden. Zunächst geben wir eine neue Charakterisierung der Jordanschen Nullmengen an.

Satz 3.8 Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Jordansche Nullmenge, wenn A Jordan-messbar ist und $v(A) = 0$ gilt.

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass A unter beiden Voraussetzungen eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Diese Voraussetzung braucht also beim Beweis beider Implikationsrichtungen nicht mehr überprüft werden.

„ $\Rightarrow$ “ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Weil A Jordansche Nullmenge ist, gibt es eine endliche Familie $Q_1, \dots, Q_m$ von kompakten Quadern mit $\sum_{i=1}^m v(Q_i) < \varepsilon$ und $\bigcup_{i=1}^m Q_i \supseteq A$. Weil $\bigcup_{i=1}^m Q_i$ abgeschlossen ist, gilt $\bigcup_{i=1}^m Q_i \supseteq \partial A$. Da ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus, dass es sich bei ∂A um eine Jordansche Nullmenge, erst recht also um eine Nullmenge handelt. Daraus wiederum folgt, dass A Jordan-messbar ist. Die Inklusion $\bigcup_{i=1}^m Q_i \supseteq A$ und die Ungleichung $\sum_{i=1}^m v(Q_i) < \varepsilon$ zeigen auch, dass $v(A) = v^+(A) < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt. Daraus folgt $v(A) = 0$.

„ $\Leftarrow$ “ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der Jordan-Messbarkeit von A und wegen $v^+(A) = v(A) = 0$ gibt es nach Definition des äußeren Volumens eine endliche Familie $Q_1, \dots, Q_m$ von Quadern mit $\sum_{i=1}^m v(Q_i) < \varepsilon$ und $\bigcup_{i=1}^m Q_i \supseteq A$. Daraus folgt direkt, dass es sich bei A um eine Jordansche Nullmenge handelt. $\square$

Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge, $u \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}^+$, dann setzen wir

$$u + A = \{u + x \mid x \in A\} \quad \text{und} \quad rA = \{rx \mid x \in A\}.$$

Man sagt, dass die Menge $u + A$ aus der Menge A durch **Translation** hervorgeht. Den Übergang von A zu rA bezeichnet man als **Skalierung**. Im Fall $r > 1$ handelt es sich genauer um eine **Streckung**, im Fall $0 < r < 1$ um eine **Stauchung**.

Satz 3.9 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge.

- (i) (Translationsinvarianz)
Für jedes $u \in \mathbb{R}^n$ ist auch $u + A$ Jordan-messbar, und es gilt $v(u + A) = v(A)$.
- (ii) (Skalierungseigenschaft)
Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ ist auch rA Jordan-messbar, und es gilt $v(rA) = r^n v(A)$.

Beweis: Für den Beweis von (i) genügt es zu zeigen, dass inneres und äußeres Volumen von A und $u + A$ übereinstimmen. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Definition des inneren Volumens gibt es eine endliche Familie disjunkter, kompakter Quader $Q_1, \dots, Q_p$ mit den Eigenschaften $\sum_{i=1}^p v(Q_i) > v^-(A) - \varepsilon$ und $\bigcup_{i=1}^p Q_i \subseteq A$. Definieren wir nun $\tilde{Q}_i = u + Q_i$ für $1 \leq i \leq p$, dann gilt jeweils $v(Q_i) = v(\tilde{Q}_i)$. Es folgt $\bigcup_{i=1}^p \tilde{Q}_i \subseteq (u + A)$ und $\sum_{i=1}^p v(\tilde{Q}_i) > v^-(A) - \varepsilon$. Wir erhalten $v^-(u + A) \geq v^-(A) - \varepsilon$, und weil $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben war, folgt daraus $v^-(u + A) \geq v^-(A)$. Durch Vertauschung der Rollen von A und $u + A$ erhält man $v^-(A) \geq v^-(u + A)$, insgesamt also Gleichheit. Die Übereinstimmung $v^+(A) = v^+(u + A)$ beweist man nach demselben Schema. Ebenso kann die Aussage (ii) auf die Gleichung $v(rQ) = r^n v(Q)$ für kompakte Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ zurückgeführt werden. $\square$

Die charakteristische Funktion kann auch verwendet werden, um den Begriff der Riemann-Integrierbarkeit auf Funktionen zu verallgemeinern, deren Definitionsbereiche keine Quader sind.

Definition 3.10 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine (beschränkte) Jordan-messbare Menge und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader mit $Q^\circ \supseteq A$. Eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ wird **Riemann-integrierbar** genannt, wenn durch

$$f_Q : Q \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \in Q \setminus A \end{cases}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion auf Q definiert ist. In diesem Fall ist das **Riemann-Integral** von f auf A definiert durch

$$\int_A f(x) \, dx = \int_Q f_Q(x) \, dx.$$

Wie im Beweis von Prop. 3.2 zeigt man, dass sowohl die Integrierbareitseigenschaft als auch das Integral unabhängig von der Wahl des Quaders Q sind; man braucht lediglich die Funktion χ_A durch f zu ersetzen. Ebenso wie im vorherigen Abschnitt gilt

Proposition 3.11 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Eine beschränkte Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge in A bilden.

Beweis: Sei Q ein kompakter Quader im $\mathbb{R}^n$ mit $Q^\circ \supseteq A$, und sei f_Q wie in Definition 3.10 definiert. Nach Definition ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Unstetigkeitsstellen von f_Q eine Nullmenge in Q bilden. Sei $U_A \subseteq A$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f und $U_Q \subseteq Q$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f_Q . Wir müssen zeigen, dass U_A genau dann eine Nullmenge ist, wenn dies für U_Q zutrifft.

Offenbar gilt $U_A \subseteq U_Q$, außerdem kann $U_Q \subseteq U_A \cup (\partial A)$ gezeigt werden. Nehmen wir dazu an, dass a eine Unstetigkeitsstelle von f_Q ist, der Punkt a aber andererseits nicht in U_A liegt. Dann gilt entweder $a \notin A$, oder es gilt $a \in A$ und die Funktion f ist in A stetig. Im ersten Fall ist a ein Randpunkt von A , denn ansonsten wäre f_Q in einer Umgebung von A konstant 0 und damit in a stetig. Auch im zweiten Fall muss a ein Randpunkt sein, denn sonst würden f_Q und f_A in einer Umgebung von a übereinstimmen, und auch daraus würde sich die Stetigkeit von f_Q in a ergeben.

Nun beweisen wir die im ersten Absatz formulierte Äquivalenz. Auf Grund der Jordan-Messbarkeit von A ist ∂A nach Folgerung 3.5 eine Nullmenge. Ist nun U_A eine Nullmenge, dann gilt dasselbe für $U_A \cup (\partial A)$ und somit auch für U_Q . Ist umgekehrt U_Q eine Nullmenge, dann muss dies wegen $U_A \subseteq U_Q$ auch für U_A gelten. $\square$

Wie für Integrale über Quader gelten auch für Integrale über beliebige Jordan-messbare Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ die Rechenregeln

$$\int_A (f+g)(x) \, dx = \int_A f(x) \, dx + \int_A g(x) \, dx \quad \text{und} \quad \int_A (\lambda f)(x) \, dx = \lambda \int_A f(x) \, dx$$

falls $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar sind und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist. Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in A$ (was wir zukünftig durch die Schreibweise $f \leq g$ abkürzen), dann folgt $\int_A f(x) \, dx \leq \int_A g(x) \, dx$.

Jede dieser Rechenregeln ergibt sich direkt aus der entsprechenden Rechenregel für Quader. Sind beispielsweise $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen auf der Jordan-messbaren Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $Q^\circ \supseteq A$, dann ist die Nullfortsetzung von $f+g : A \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $(f+g)_Q = f_Q + g_Q$. Denn für alle $x \in A$ gilt $f_Q(x) + g_Q(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x) = (f+g)_Q(x)$, und für alle $x \in Q \setminus A$ erhalten wir ebenso $f_Q(x) + g_Q(x) = 0+0 = 0 = (f+g)_Q(x)$ nach Definition der Nullfortsetzung. Mit der Definition der Riemann-Integrale über A erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \int_A (f+g)(x) \, dx &= \int_Q (f+g)_Q(x) \, dx = \int_Q (f_Q + g_Q)(x) \, dx = \\ &= \int_Q f_Q(x) \, dx + \int_Q g_Q(x) \, dx = \int_A f(x) \, dx + \int_A g(x) \, dx. \end{aligned}$$

Der folgende Satz ist aus der Analysis einer Variablen für das eindimensionale Riemann-Integral bereits bekannt. Sein mehrdimensionales Analogon lautet

Satz 3.12 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, Jordan-messbare Menge, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, außerdem $m_- = \inf\{f(x) \mid x \in A\}$ und $m_+ = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$. Dann gilt

$$m_- v(A) \leq \int_A f(x) \, dx \leq m_+ v(A).$$

Beweis: Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader mit $Q^\circ \supseteq A$. Wegen $m_- \leq f(x) \leq m_+$ für alle $x \in A$ gilt auch $m_- \chi_A(x) \leq f_Q(x) \leq m_+ \chi_A(x)$ für alle $x \in A$. Nach Definition des Jordan-Volumens folgt daraus

$$m_- v(A) = m_- \int_Q \chi_A(x) \, dx = \int_Q m_- \chi_A(x) \, dx \leq \int_Q f_Q(x) \, dx \leq \int_Q m_+ \chi_A(x) \, dx = m_+ v(A).$$

Wegen $\int_A f(x) \, dx = \int_Q f_Q(x) \, dx$ folgt daraus unmittelbar die Behauptung. $\square$

Ist $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion und $A \subseteq B$ eine Jordan-messbare Teilmenge, dann schreiben wir an Stelle von $\int_A (f|_A)(x) \, dx$ auch einfach $\int_A f(x) \, dx$. Dies setzt natürlich voraus, dass das Riemann-Integral von $f|_A$ über A tatsächlich definiert ist. Wie der folgende Satz zeigt, ist dies tatsächlich immer der Fall.

Satz 3.13 Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbare Teilmengen.

- (i) Ist $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $A \subseteq B$, dann ist $f|_A$ Riemann-integrierbar.
- (ii) Sei $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $f|_A$ und $f|_B$ auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen A und B Riemann-integrierbar sind. Dann ist f Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{A \cup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx - \int_{A \cap B} f(x) dx.$$

- (iii) Ist $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge und $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, dann ist f Riemann-integrierbar, und es gilt $\int_N f(x) dx = 0$.

Beweis: zu (i) Seien U_B, U_A die Mengen der Unstetigkeitsstellen von f bzw. $f|_A$. Dann gilt $U_A \subseteq U_B$, und mit U_B ist auch U_A eine Jordansche Nullmenge. Die Riemann-Integrierbarkeit von $f|_A$ folgt somit Prop. 3.11.

zu (ii) Seien $U_A, U_B, U_C \subseteq A \cup B$ die Unstetigkeitsstellen von $f|_A, f|_B$ und f . Dann gilt $U_C \subseteq U_A \cup U_B \cup (\partial A) \cup (\partial B)$. Sei nämlich $x \in U_C$ vorgegeben, und nehmen wir o.B.d.A. an, dass x in A liegt. Ist x kein Randpunkt von A , dann liegt eine Umgebung von x vollständig von A . Aus der Unstetigkeit von f in x folgt somit auch die Unstetigkeit von $f|_A$ in diesem Punkt, und wir erhalten $x \in U_A$. Die soeben bewiesene Inklusion zeigt, dass U_C eine Nullmenge ist, und damit ist f nach Prop. 3.11 eine Riemann-integrierbare Funktion.

Für den Beweis der Integralgleichung wählen wir einen kompakten Quader Q mit $Q^\circ \supseteq A \cup B$ und betrachten zunächst den Fall $A \cap B = \emptyset$. Es gilt dann $f_Q = f_Q \chi_A + f_Q \chi_B$, und daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx &= \int_Q f_Q(x) \chi_A(x) dx + \int_Q f_Q(x) \chi_B(x) dx = \\ &= \int_Q (f_Q(x) \chi_A(x) + f_Q(x) \chi_B(x)) dx = \int_Q f_Q(x) dx = \int_{A \cup B} f(x) dx. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Fall $A \cap B \neq \emptyset$. In diesem Fall können wir $A \cup B$ disjunkt zerlegen in die Jordan-messbaren Mengen $A \setminus B, B \setminus A$ und $A \cap B$. Der bereits bewiesene Fall liefert

$$\int_{A \cup B} f(x) dx = \int_{A \setminus B} f(x) dx + \int_{B \setminus A} f(x) dx + \int_{A \cap B} f(x) dx.$$

Durch die Zerlegungen $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ und $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ erhalten wir aber auch

$$\int_A f(x) dx = \int_{A \setminus B} f(x) dx + \int_{A \cap B} f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_B f(x) dx = \int_{B \setminus A} f(x) dx + \int_{A \cap B} f(x) dx.$$

Durch Einsetzen ergibt sich damit insgesamt

$$\begin{aligned} \int_{A \cup B} f(x) dx &= \left(\int_A f(x) dx - \int_{A \cap B} f(x) dx \right) + \left(\int_B f(x) dx - \int_{A \cap B} f(x) dx \right) + \int_{A \cap B} f(x) dx \\ &= \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx - \int_{A \cap B} f(x) dx. \end{aligned}$$

zu (iii) Die Riemann-Integrierbarkeit von f folgt direkt aus Prop. 3.11, denn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f ist in N enthalten und damit eine Nullmenge. Die Aussage über das Integral erhält man durch Satz 3.8 und Satz 3.12. Ersterer liefert nämlich $v(N) = 0$, und definiert man nämlich m_- und m_+ wie im Mittelwertsatz angegeben, dann erhält man

$$0 = m_- v(N) \leq \int_N f(x) dx \leq m_+ v(N) = 0. \quad \square$$

Einen wichtiger Spezialfall von Satz 3.13 (ii) ist die Gleichung $\int_{A \cup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx$ für *disjunkte* Jordan-messbare Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Auch aus Teil (iii) des Satzes ziehen wir eine wichtige Konsequenz.

Satz 3.14 (Vernachlässigung Jordanscher Nullmengen)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge, $N \subseteq A$ eine Jordansche Nullmenge, und seien $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen, die auf $A \setminus N$ übereinstimmen. Dann gilt

(i) Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn g Riemann-integrierbar ist.

(ii) Sind f und g Riemann-integrierbar, dann gilt $\int_A f(x) dx = \int_A g(x) dx$.

Beweis: zu (i) Mit A und N ist auch $B = A \setminus N$ Jordan-messbar. Ist f Riemann-integrierbar, dann gilt nach Satz 3.13 (i) dasselbe für $f|_B = g|_B$. Nach Teil (iii) des gleichen Satzes ist $g|_N$ Riemann-integrierbar. Aus der Riemann-Integrierbarkeit von $g|_B$ und $g|_N$ ergibt nach Teil (ii) die Riemann-Integrierbarkeit von g auf $A = B \cup N$. Damit ist insgesamt gezeigt, dass aus der Riemann-Integrierbarkeit von f dieselbe Eigenschaft für g folgt, und genauso beweist man die umgekehrte Implikation.

zu (ii) Aus der disjunkten Zerlegung $A = B \cup N$ folgt mit Teil (ii) von Satz 3.13 sofort

$$\begin{aligned} \int_A f(x) dx &= \int_B f(x) dx + \int_N f(x) dx = \int_B f(x) dx + 0 = \int_B g(x) dx + 0 = \\ &= \int_B g(x) dx + \int_N g(x) dx = \int_A g(x) dx. \end{aligned} \quad \square$$

Definition 3.15 Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dann wird

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

der **Graph** und der Funktion f genannt. Ist f nichtnegativ, also $f(x) \geq 0$ für alle $x \in A$, dann nennt man

$$\Lambda(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

die **Ordinatenmenge** von f .

Mit dem Funktionsgraphen erhalten wir ein weiteres (notwendiges) Kriterium für die Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion.

Proposition 3.16 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist der Graph $\Gamma(f)$ eine Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis: Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader mit $Q^\circ \supseteq A$ und $f_Q : Q \rightarrow \mathbb{R}$ die Fortsetzung von f wie in Definition 3.10. Dann ist f_Q Riemann-integrierbar, und wegen $\Gamma(f) \subseteq \Gamma(f_Q)$ genügt es zu zeigen, dass $\Gamma(f_Q)$ eine Jordansche Nullmenge ist. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der Riemann-Integrierbarkeit von f_Q gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q mit $v = S_f^+(\mathcal{Z}) - S_f^-(\mathcal{Z}) < \varepsilon$. Dabei ist der Graph $\Gamma(f_Q)$ wegen $c_{K,f_Q}^- \leq f_Q(x) \leq c_{K,f_Q}^+$ für alle $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ und $x \in K$ in der Vereinigungsmenge

$$V = \bigcup_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} (K \times [c_{K,f_Q}^-, c_{K,f_Q}^+])$$

vom Volumen v enthalten. Dabei ist es möglich, dass c_{K,f_Q}^- und c_{K,f_Q}^+ zusammenfallen, deshalb ist im allgemeinen V keine Vereinigungsmenge von kompakten Quadern. Wir können aber für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ reelle Zahlen $c_K^- \leq c_{K,f}^-$ und $c_K^+ \geq c_{K,f}^+$ so wählen, dass $c_K^- < c_K^+$ ist und das Volumen von $\tilde{V} = \bigcup_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} (K \times [c_K^-, c_K^+])$ weiterhin kleiner als ε ist. Wegen $\Gamma(f_Q) \subseteq \tilde{V}$ folgt daraus, dass $\Gamma(f_Q)$ eine Jordansche Nullmenge ist. $\square$

Lemma 3.17 Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und seien $A \subseteq \mathbb{R}^m$ und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkte Teilmengen. Ist A eine Nullmenge in $\mathbb{R}^m$ oder B eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$, dann ist $A \times B$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall, dass A eine Nullmenge ist. Sei Q ein kompakter Quader mit $Q \supseteq B$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der Voraussetzung an A gibt es eine Familie $(Q_r)_{r \in \mathbb{N}}$ von kompakten Quadern in $\mathbb{R}^m$ mit $\bigcup_{r \in \mathbb{N}} Q_r \supseteq A$ und $\sum_{r=1}^{\infty} v(Q_r) < \varepsilon$. Offenbar ist dann $(Q_r \times Q)_{r \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Quadern in $\mathbb{R}^{m+n}$ mit $\bigcup_{r=1}^{\infty} (Q_r \times Q) \supseteq A \times Q \supseteq A \times B$ und

$$\sum_{r=1}^{\infty} v(Q_r \times Q) = \sum_{r=1}^{\infty} v(Q_r) v(Q) = v(Q) \sum_{r=1}^{\infty} v(Q_r) = \varepsilon v(Q).$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus, dass $A \times B$ eine Nullmenge ist. $\square$

Wir können nun eine engere Verbindung zwischen dem Riemann-Integral und dem Jordan-Volumen herstellen.

Satz 3.18 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine nicht-negative, Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist die Ordinatenmenge $\Lambda(f)$ Jordan-messbar, und für ihr $(n+1)$ -dimensionales Jordansches Volumen gilt

$$v_{n+1}(\Lambda(f)) = \int_A f(x) dx.$$

Beweis: Beweisen wir zunächst die Jordan-Messbarkeit von $\Lambda(f)$. Dazu müssen wir zeigen, dass $\partial \Lambda(f)$ eine Nullmenge ist. Sei $c = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$ und $\bar{A} = A \cup \partial A$ der topologische Abschluss von A . Offenbar ist $\partial \Lambda(f)$ in $\bar{A} \times [0, c]$ enthalten. Ist nämlich $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $x \notin \bar{A}$, dann ist $U \times \mathbb{R}$ mit $U = \mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$ eine offene Umgebung von (x, y) , die $\bar{A} \times [0, c]$ nicht schneidet. Ist andererseits $y \notin [0, c]$, dann erhalten wir durch $\mathbb{R}^n \times V$ mit $V = \mathbb{R} \setminus [0, c]$ eine solche Umgebung.

Sei U_A die Menge der Unstetigkeitsstellen von f und $A^\circ = A \setminus \partial A$ das Innere von A . Wir zeigen nun weiter, dass der Rand von $\Lambda(f)$ in der Vereinigungsmenge

$$N = \Gamma(f) \cup (\partial A \cup U_A) \times [0, c] \cup A \times \{0, c\}$$

enthalten ist. Liegt (x, y) in $\partial \Lambda(f)$ und somit in $\bar{A} \times [0, c]$, aber nicht in N , dann gilt $x \in A^\circ \setminus U_A$ und $y \neq 0, f(x), c$. Insbesondere ist f in x stetig. Betrachten wir zunächst den Fall $y < f(x)$. Setzen wir $\varepsilon = \frac{1}{2}(f(x) - y)$, dann gilt $f(x) = y + 2\varepsilon$. Auf Grund der Stetigkeit können wir eine Umgebung U_δ von x wählen, so dass $U_\delta \subseteq A$ und $f(x') > y + \varepsilon$ für alle $x' \in U_\delta$ gilt. Die Umgebung $U_\delta \times]0, y + \varepsilon[$ von (x, y) ist dann vollständig in $\Lambda(f)$ enthalten, somit (x, y) kein Randpunkt dieser Menge. Im Fall $y > f(x)$ setzen wir $\varepsilon = \frac{1}{2}(y - f(x))$. Die Stetigkeit liefert uns eine Umgebung U_δ von x mit $U_\delta \subseteq A$ und $f(x') < y - \varepsilon$ für alle $x' \in U_\delta$. In diesem Fall ist $U_\delta \times]y - \varepsilon, c[$ vollständig im Komplement von $\Lambda(f)$ enthalten und (x, y) wiederum kein Randpunkt von $\Lambda(f)$. Damit ist der Beweis von $\partial \Lambda(f) \subseteq N$ abgeschlossen.

Nun ist $\Gamma(f)$ nach Prop. 3.16 eine Nullmenge, sogar eine Jordansche Nullmenge. Auf Grund der Jordan-Messbarkeit von A und der Riemann-Integrierbarkeit von f ist $\partial A \cup U_A$ ebenfalls eine Nullmenge. Somit zeigt Lemma 3.17, dass auch $(\partial A \cup U_A) \times [0, c]$ und $A \times \{0, c\}$ Nullmengen sind. Insgesamt ist also N und damit auch $\partial \Lambda(f)$ eine Nullmenge.

Nun beweisen wir noch die angegebene Übereinstimmung zwischen Volumen und Integral. Sei Q ein kompakter Quader mit $Q^\circ \supseteq A$ und $f_Q : Q \rightarrow \mathbb{R}$ die Nullfortsetzung von f auf Q . Für jedes $(x, y) \in Q \times [0, c]$ gilt $\chi_{\Lambda(f)}(x, y) = 1$ genau dann, wenn $x \in A$ und $0 \leq y \leq f(x)$ gilt, was wiederum zu $y \in [0, f_Q(x)]$ äquivalent ist. Nach Definition des Jordan-Volumens und dem Satz von Fubini gilt also

$$\begin{aligned} v_{n+1}(\Lambda(f)) &= \int_{Q \times [0, c]} \chi_{\Lambda(f)}(x, y) d(x, y) = \int_Q \left(\int_0^c \chi_{\Lambda(f)}(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_Q \left(\int_0^{f_Q(x)} 1 dy \right) dx = \int_Q f_Q(x) dx = \int_A f(x) dx. \end{aligned} \quad \square$$

Am Ende von § 1 hatten wir bereits das Volumen der Halbkugel berechnet. Allerdings hatten wir zu diesem Zeitpunkt noch keine präzise Definition des n -dimensionalen Volumens zur Verfügung. Die Begründung dafür, dass das dort berechnete Integral tatsächlich mit dem Halbkugelvolumen übereinstimmt, können wir nun mit Hilfe von Satz 3.18 nachliefern. Wir betrachten die obere Halbkugel im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ist $(x, y, z) \in H$ äquivalent zu $x^2 + y^2 \leq 1$ und $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Für die Funktion f auf dem Vollkreis $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ gegeben durch $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ gilt also $\Lambda(f) = H$, und somit gilt $v_3(H) = \int_K f(x, y) d(x, y)$ auf Grund von Satz 3.18.

Definition 3.19 Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 \leq j \leq n$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die Teilmenge $A(x)_j \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ durch

$$A(x)_j = \{(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n) \in A\}.$$

Wir bezeichnen die Mengen dieser Form als **Querschnitte** von A mit den affinen Unterräumen orthogonal zur x_j -Achse.

Für $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ist beispielsweise $A(x)_1 = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}$ und $A(y)_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}$, für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$. Für $A \subseteq \mathbb{R}^3$ setzt man entsprechend $A(x)_1 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in A\}$, $A(y)_2 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in A\}$ und $A(z)_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in A\}$.

Die affinen Unterräume, mit denen die Menge A geschnitten wird, verlaufen parallel zum Orthogonalraum der x_j -Achse und sind somit $(n - 1)$ -dimensional. Auch Schnitte mit affinen Unterräumen kleinerer Dimension können gebildet werden. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, dann definieren wir für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ die Teilmenge $A(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ durch

$$A(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in A\}.$$

Wir können nun für den Satz von Fubini die folgende allgemeinere Fassung angeben.

Satz 3.20 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge derart, dass $A(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ ebenfalls Jordan-messbar ist. Sei außerdem $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion und $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Quader mit $Q \times \mathbb{R}^n \supseteq A$. Dann ist für jedes $x \in Q$ die Funktion $f_x : A(x) \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_Q \left(\int_{A(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Beweis: Mit f ist für jedes $x \in Q$ auch die Funktion f_x stetig und beschränkt, und damit auch Riemann-integrierbar. Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ so gewählt, dass A in $Q \times R$ enthalten ist, und sei $\hat{f}$ die Nullfortsetzung von f auf $Q \times R$. Für jedes $x \in Q$ ist $R \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \hat{f}(x, y)$ die Nullfortsetzung von f_x auf R . Mit Hilfe des herkömmlichen Satz von Fubini für Quader erhalten wir

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_{Q \times R} \hat{f}(x, y) d(x, y) = \int_Q \left(\int_R \hat{f}(x, y) dy \right) dx = \int_Q \left(\int_{A(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad \square$$

Wir geben noch eine Fassung des Satzes von Fubini an, die sich direkt für Volumenberechnungen eignet. Der Einfachheit halber formulieren wir sie nur für die erste Koordinate; es ist aber klar, dass sie genauso auch für alle übrigen Koordinaten gilt.

Satz 3.21 (*Cavalierisches Prinzip*)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ so gewählt, dass für jeden Punkt $(x, y) \in A$ jeweils $a \leq x \leq b$ erfüllt ist. Außerdem setzen wir voraus, dass $A(x)_1$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Jordan-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Dann gilt

$$v_{n+1}(A) = \int_a^b v_n(A(x)_1) dx.$$

Beweis: Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ so gewählt, dass $A \subseteq [a, b] \times Q^\circ$ erfüllt ist. Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig gewählt, dann liegt A im Inneren des Quaders $R_\varepsilon = I_\varepsilon \times Q$, mit $I_\varepsilon = [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$. Sei nun $\chi_A : R_\varepsilon \rightarrow \{0, 1\}$ die charakteristische Funktion von A . Für alle $(x, y) \in R_\varepsilon$ gilt $\chi_A(x, y) = \chi_{A(x)_1}(y)$ auf Grund der Äquivalenz

$$\chi_A(x, y) = 1 \iff (x, y) \in A \iff y \in A(x)_1 \iff \chi_{A(x)_1}(y) = 1.$$

Mit dem Satz von Fubini und der Definition des Jordanschen Volumens erhalten wir

$$\begin{aligned} v_{n+1}(A) &= \int_{R_\varepsilon} \chi_A(x, y) d(x, y) = \int_{I_\varepsilon \times Q} \chi_A(x, y) d(x, y) = \int_{I_\varepsilon} \left(\int_Q \chi_A(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \left(\int_Q \chi_{A(x)_1}(y) dy \right) dx = \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} v_n(A(x)_1) dx = \int_a^b v_n(A(x)_1) dx, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass für alle $x \in [a - \varepsilon, b + \varepsilon] \setminus [a, b]$ jeweils $A(x)_1 = \emptyset$ und somit $v_n(A(x)_1) = 0$ gilt. $\square$

Betrachten wir noch einmal die Halbkugel $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Das Cavalierische Prinzip kann auf verschiedene Weise genutzt werden, um das Halbkugelvolumen auszurechnen. Für jedes $x \in [-1, 1]$ gilt beispielsweise $H(x)_1 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1 - x^2\}$. Es handelt sich also um Halbkreise vom Radius $\sqrt{1 - x^2}$, die im Fall $x = \pm 1$ zu einem einzelnen Punkt entarten. Setzen wir als bekannt voraus, dass der Flächeninhalt dieses Halbkreises jeweils gleich $\frac{1}{2}\pi(1 - x^2)$ ist, so erhalten wir für das Halbkugelvolumen

$$v_3(H) = \int_{-1}^1 v_2(H(x)_1) dx = \frac{1}{2}\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{1}{2}\pi \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \right) = \frac{2}{3}\pi.$$

Ebenso können wir aber auch Schnitte der Halbkugel orthogonal zur z -Achse betrachten. Für $z \in [0, 1]$ gilt jeweils $H(z)_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\}$; dies ist ein Kreis vom Radius $\sqrt{1 - z^2}$ (der für $z = 1$ zu einem Punkt wird) mit dem Flächeninhalt $\pi(1 - z^2)$. Die Rechnung

$$v_3(H) = \int_0^1 v_2(H(z)_3) dz = \pi \int_0^1 (1 - z^2) dz = \pi \left[z - \frac{1}{3}z^3 \right]_0^1 = \pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

liefert natürlich dasselbe Ergebnis.

Schnitte orthogonal zur z -Achse eignen sich auch, um das Volumen des Kegels $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [0, h] \mid x^2 + y^2 \leq r^2(1 - \frac{z}{h})^2\}$ der Höhe $h \in \mathbb{R}^+$ auszurechnen, dessen Grundfläche ein Kreis vom Radius $r \in \mathbb{R}^+$ ist. Hier gilt für alle $z \in [0, h]$ offenbar $K(z)_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2(1 - \frac{z}{h})^2\}$; der Schnitt ist also ein Kreis vom Radius $r(1 - \frac{z}{h})$. Für $z = 0$ hat der Kreis den Radius r , an der Kegelspitze bei $z = h$ wird er zu einem Punkt. Für das Volumen erhalten wir

$$\begin{aligned} v_3(K) &= \int_0^h v_2(K(z)_3) dz = \pi r^2 \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz = \pi r^2 h \int_0^1 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz = \\ &= \pi r^2 h \int_0^1 (1 - z)^2 dz = \pi r^2 h \int_0^1 (1 - 2z + z^2) dz = \pi r^2 h \left[z - z^2 + \frac{1}{3}z^3 \right]_0^1 \\ &= \pi r^2 h \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \end{aligned}$$

Die Schulformel „Volumen gleich $\frac{1}{3} \times \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}$ “ ist damit bestätigt.

Das in Satz 3.21 formulierte Prinzip wurde von seinem Namensgeber *Bonaventura Cavalieri* (1598 - 1647) verwendet, um den Rauminhalt einer großen Zahl geometrischer Körper zu bestimmen. Dies waren die ersten Ergebnisse der Geometrie, die über das seit der Antike bekannte Wissen wesentlich hinausgingen. Da die Infinitesimalrechnung zu dieser Zeit noch nicht existierte (diese begann sich mit Newton und Leibniz erst gegen Ende des 17. Jahrhunderts zu entwickeln), konnte Cavalieri den in Satz 3.21 vorhandenen Integralausdruck nicht symbolisch berechnen, sondern musste sich statt dessen mit Vergleichen behelfen.

Beispielsweise leitete er aus dem bereits bekannten Kegel- und Zylindervolumen das Volumen der Kugel ab, in dem er neben eine Halbkugel H vom Radius r einen Zylinder Z mit Radius und Höhe r setzte. In diesem Zylinder wurde ein auf der Spitze stehender Kreisbogen K mit Grundfläche und Höhe r untergebracht. Schneidet man die Halbkugel nun auf Höhe h mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene E_h , dann erhält man nach dem Satz des Pythagoras eine Kreisscheibe vom Radius $\sqrt{r^2 - h^2}$, deren Flächeninhalt $\pi(r^2 - h^2)$ beträgt. Schneidet man den Zylinder auf gleicher Höhe, so ergibt dies eine Kreisscheibe mit Flächeninhalt πr^2 , und der Schnitt von E_h mit der Kugel ergibt einen Kreis vom Flächeninhalt πh^2 . Der Schnitt von E_h mit der Differenzmenge $Z \setminus K$ beträgt also ebenfalls $\pi(r^2 - h^2)$, ist also genauso groß wie der Schnitt zwischen E_h und Halbkugel! Weil dies für *alle* $h \in [0, r]$ der Fall ist, schloss Cavalieri, dass das Halbkugelvolumen gleich dem Volumen von $Z \setminus K$ sein muss. Da $v_3(Z) = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3$ und $v_3(K) = \frac{1}{3} \pi r^3$ bereits bekannt war, erhielt er damit $v_3(H) = v_3(Z \setminus K) = v_3(Z) - v_3(K) = \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$ und schließlich das Volumen $\frac{4}{3} \pi r^3$ für die Vollkugel.

Allerdings waren viele von Cavalieris Kollegen damals nicht bereit, seine Herleitung der Gleichung $v_3(H) = v_3(Z \setminus K)$ zu akzeptieren. Scheinbar erforderte sie, die Körper H , Z und K in unendlich viele, unendlich dünne Scheiben zu zerlegen und deren unendlich kleine Volumina aufzuaddieren, was ihnen (zu Recht) suspekt erschien. Erst durch die Integralrechnung konnte Cavalieris Schluss im Nachhinein gerechtfertigt werden. Einen Einblick in die damalige Auseinandersetzung erhält man durch einen sehr lesenswerten Spektrum-Artikel in der Ausgabe vom Oktober 2015.

Zum Abschluss definieren wir noch einen speziellen Typ Jordan-messbarer Teilmengen, der für die Berechnung von Integralen besonders geeignet ist.

Definition 3.22 Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ wird **Normalbereich** bezüglich der x_j -Achse genannt, wenn eine kompakte, Jordan-messbare Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und stetige Funktionen $\varphi, \psi : B \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq \psi$ existieren, so dass

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \leq x_j \leq \psi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)\}$$

erfüllt ist.

Der Satz von Fubini lässt sich für Normalbereiche auf folgende Weise formulieren.

Folgerung 3.23 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Normalbereich bezüglich der x_j -Achse, und seien $\varphi, \psi : B \rightarrow \mathbb{R}$ wie oben definiert. Dann gilt für jede stetige und beschränkte Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils

$$\int_A f(x) dx = \int_B \left(\int_{\varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)}^{\psi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)} f(x_1, \dots, x_n) dx_j \right) d(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Beweis: Nach eventueller Vertauschung der Koordinaten können wir $j = n$ annehmen. Da B kompakt ist, existiert ein kompakter Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ mit $Q^\circ \supseteq B$. Es gilt dann $Q \times \mathbb{R} \supseteq B \times \mathbb{R} \supseteq A$. Für alle $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in Q$ gilt im Fall $x \notin B$ jeweils $A(x) = \emptyset$, und im Fall $x \in B$ jeweils $A(x) = [\varphi(x), \psi(x)]$, auf Grund der Äquivalenz $x_n \in A(x) \Leftrightarrow (x, x_n) \in A \Leftrightarrow \varphi(x) \leq x_n \leq \psi(x) \Leftrightarrow x_n \in [\varphi(x), \psi(x)]$. Für alle $x \in Q \setminus B$ ist $\int_{A(x)} f(x, x_n) dx_n$ als Integral über die leere Menge gleich null. Mit Satz 3.20 erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \int_A f(x, x_n) d(x, x_n) &= \int_Q \left(\int_{A(x)} f(x, x_n) dx_n \right) dx = \int_B \left(\int_{A(x)} f(x, x_n) dx_n \right) dx \\ &= \int_B \left(\int_{[\varphi(x), \psi(x)]} f(x, x_n) dx_n \right) dx = \int_B \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, x_n) dx_n \right) dx. \quad \square \end{aligned}$$

§ 4. Der Transformationssatz

Zusammenfassung. Unser Ziel in diesem Kapitel besteht darin, die Substitutionsregel aus dem ersten Semester auf höhere Dimension zu verallgemeinern. Dies wird sich vor allem bei der Integration von Funktionen als nützlich erweisen, die anhand krummliniger Koordinatensysteme definiert sind, etwa die häufig in der Physik verwendeten Polar-, Zylinder und Kugelkoordinaten.

Wichtige Grundbegriffe

- Lipschitz-stetige Funktion, Lipschitz-Konstante
- Figur
- Inhaltsfunktion
- Riemannsche Summen

Zentrale Sätze

- Erhaltung Jordanscher Nullmengen unter Lipschitz-stetigen Abbildungen und stetig differenzierbaren Abbildungen
- Transformationssatz
- Eindeutigkeit der Inhaltsfunktion auf den Jordann-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Im letzten Semester war die Stetigkeit und auch die gleichmäßige Stetigkeit für Abbildungen zwischen metrischen Räumen definiert worden. Wir definieren nun einen weiteren, noch stärkeren Stetigkeitsbegriff.

Definition 4.1 Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **Lipschitz-stetig**, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq L d_X(p, q) \quad \text{für alle } p, q \in X \text{ erfüllt ist.}$$

Dabei bezeichnet man L als eine **Lipschitz-Konstante** von f . Gibt es für jeden Punkt $p \in X$ jeweils eine Umgebung U mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung $f|_U$ Lipschitz-stetig ist, dann spricht man von einer **lokal** Lipschitz-stetigen Abbildung.

Jede Lipschitz-stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist auch gleichmäßig stetig, und damit erst recht stetig. Sei nämlich $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $L \in \mathbb{R}^+$ eine Lipschitz-Konstante von f . Setzen wir $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, dann gilt für alle $p, q \in X$ mit $d_X(p, q) < \delta$ jeweils

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq L d_X(p, q) < L \delta = L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

womit die gleichmäßige Stetigkeit nachgewiesen ist.

Satz 4.2 Jede stetig differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist lokal Lipschitz-stetig.

Beweis: Hier ist das wesentliche Hilfsmittel der Mittelwertsatz für Richtungsableitungen, den wir auf die Komponentenfunktionen $f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq k \leq m$) der Abbildung f und ihre totalen Ableitungen $f'_k(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ anwenden. Sei $c \in U$ beliebig vorgegeben und $K \subseteq U$ eine kompakte, konvexe Umgebung von c , zum Beispiel eine abgeschlossene Kreisscheibe. Außerdem sei $\|\cdot\|$ die Operatornorm auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, wobei wir auf $\mathbb{R}^n$ die Maximums-Norm $\|\cdot\|_\infty$ zu Grunde legen. Da die Funktionen $x \mapsto \|f'_k(x)\|$ auf Grund der stetigen Differenzierbarkeit von f auf K stetig sind, existiert nach dem Maximumsprinzip eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f'_k(x)\| \leq \gamma$ für alle $x \in U$ und $1 \leq k \leq m$.

Seien nun $a, b \in K$ vorgegeben. Auf Grund der Konvexität ist die Verbindungsstrecke $[a, b]$ ganz in K enthalten. Nach dem Mittelwertsatz für Richtungsableitungen gibt es für $1 \leq k \leq m$ jeweils ein $p_k \in]a, b[$ mit $f'_k(p_k)(v) = \partial_v f_k(p_k) = f_k(b) - f_k(a)$, wobei $v = b - a$ ist. Es folgt $|f_k(b) - f_k(a)| = |f'_k(p_k)(v)| \leq \|f'_k(p_k)\| \|v\|_\infty \leq \gamma \|b - a\|_\infty$. Nehmen wir das Maximum über $1 \leq k \leq m$, so erhalten wir $\|f(b) - f(a)\|_\infty \leq \gamma \|b - a\|_\infty$. Also ist $L = \gamma$ eine Lipschitz-Konstante von $f|_K$. Damit ist die lokale Lipschitz-Stetigkeit nachgewiesen. $\square$

Wir werden nun zeigen, dass Jordansche Nullmengen unter Lipschitz-stetigen Abbildungen erhalten bleiben. Dazu müssen wir noch einige Vorbereitungen treffen. Einen kompakten Quader $Q = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$ im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir als **Würfel**, wenn sämtliche Kantenlängen gleich sind, also $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \dots = b_n - a_n$ erfüllt ist.

Lemma 4.3 Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine endliche Familie $W_1, \dots, W_m$ von Würfeln, die Q überdecken, mit $\sum_{s=1}^m v(W_s) < v(Q) + \varepsilon$.

Beweis: Sei $Q = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$ und $\ell = \min\{b_k - a_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ die minimale Kantenlänge von Q . Die naheliegende Idee besteht darin, für eine beliebig vorgegebene natürliche Zahl N den Quader Q durch eine möglichst geringe Anzahl von Würfeln der Kantenlänge $\frac{\ell}{N}$ zu überdecken, wobei der „erste“ Quader in den Eckpunkt $(a_1, \dots, a_n)$ von Q gesetzt wird. Für beliebig vorgegebenes $N \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$ definieren wir dazu $r_{k,N} = \lceil \frac{N(b_k - a_k)}{\ell} \rceil$. Wie wir sehen werden, ist dies die Anzahl der Würfel, die in Richtung der k -ten Koordinatenachse aneinandergesetzt werden müssen, um Q vollständig abzudecken. Diese Würfel können dann durch $S_N = \{s \in \mathbb{Z}^n \mid 0 \leq s_k < r_{k,N} \text{ für } 1 \leq k \leq n\}$ indiziert werden, indem wir jedem $s \in S_N$ den Würfel

$$W_s = \left[a_1 + s_1 \frac{\ell}{N}, a_1 + (s_1 + 1) \frac{\ell}{N} \right] \times \dots \times \left[a_n + s_n \frac{\ell}{N}, a_n + (s_n + 1) \frac{\ell}{N} \right] \quad \text{zuordnen.}$$

Zunächst überprüfen wir, dass diese Würfel tatsächlich unseren Quader Q überdecken. Sei dazu ein $x \in Q$ vorgegeben und $s_k = \left\lfloor \frac{N(x_k - a_k)}{\ell} \right\rfloor$ und für $1 \leq k \leq n$. Wegen $x_k \geq a_k$ gilt einerseits $s_k \geq 0$, aus $x_k \leq b_k$ folgt andererseits $s_k \leq \frac{N(b_k - a_k)}{\ell} \leq r_{k,N}$, jeweils für $1 \leq k \leq n$. Dies zeigt, dass s in S_N enthalten ist. Nach Definition der unteren Gaußklammer gilt außerdem

$$s_k \leq \frac{N(x_k - a_k)}{\ell} < s_k + 1 \quad \Rightarrow \quad s_k \frac{\ell}{N} \leq x_k - a_k < (s_k + 1) \frac{\ell}{N} \quad \Rightarrow \quad a_k + s_k \frac{\ell}{N} \leq x_k < a_k + (s_k + 1) \frac{\ell}{N}$$

für $1 \leq k \leq n$. Also ist x im Würfel W_s enthalten. Nun schätzen wir noch das Gesamtvolumen der Würfel nach oben ab. In der k -ten Komponente addieren wir die Kantenlängen der $r_{k,N}$ Würfel zu einer Gesamtlänge von

$$r_{k,N} \cdot \frac{\ell}{N} \leq \left(\frac{N(b_k - a_k)}{\ell} + 1 \right) \cdot \frac{\ell}{N} = b_k - a_k + \frac{\ell}{N}.$$

Für $N \rightarrow \infty$ läuft diese Zahl offenbar gegen den Wert $b_k - a_k$. Der von den $|S_N|$ Würfeln gebildete Quader hat also ein Gesamtvolumen von $\prod_{k=1}^n (b_k - a_k + \frac{\ell}{N})$, das für $N \rightarrow \infty$ gegen $\prod_{k=1}^n (b_k - a_k) = v(Q)$ läuft. Wählen wir für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ unser $N \in \mathbb{N}$ also hinreichend groß, so kann immer erreicht werden, dass $\sum_{s \in S_N} v(W_s) < v(Q) + \varepsilon$ erfüllt ist. $\square$

Satz 4.4 Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge und $g : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Lipschitz-stetige Abbildung, wobei $m \geq n$ ist. Dann ist $g(N)$ eine Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}^m$.

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $L \in \mathbb{R}^+$ eine Lipschitz-Konstante von g bezüglich der Maximumsnormen $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Nach Definition der Jordanschen Nullmengen gibt es eine endliche Familie $Q_1, \dots, Q_r$ von Quadern im $\mathbb{R}^n$ mit $\bigcup_{k=1}^r Q_k \supseteq N$ und $\sum_{k=1}^r v(Q_k) < \varepsilon$. Auf Grund von Lemma 4.3 können die Quader durch eine endliche Familie $W_1, \dots, W_s$ von Würfeln ersetzt werden, so dass $\bigcup_{\ell=1}^s W_\ell \supseteq N$ und $\sum_{\ell=1}^s v(W_\ell) < 2\varepsilon$ erfüllt ist. An diesen Abschätzungen ändert sich auch nichts, wenn wir alle Würfel W_ℓ mit $N \cap W_\ell = \emptyset$ aus der Familie entfernen.

Für jedes $\ell \in \{1, \dots, s\}$ sei nun p_ℓ ein festgewählter Punkt in $N \cap W_\ell$ und s_ℓ die Kantenlänge des Würfels. Nach eventuellem Übergang zu kleineren Würfeln können wir $s_\ell < 1$ voraussetzen. Es gilt jeweils $v(W_\ell) = s_\ell^n$, und für jeden weiteren Punkt $q \in N \cap W_\ell$ ist der Abstand $\|q - p_\ell\|_\infty$ durch den Wert s_ℓ beschränkt. Es folgt $\|g(q) - g(p_\ell)\|_\infty \leq L\|q - p_\ell\|_\infty \leq Ls_\ell$ für alle $q \in N \cap W_\ell$. Dies zeigt, dass $g(N \cap W_\ell)$ in einer $\|\cdot\|_\infty$ -Kugel vom Radius Ls_ℓ enthalten ist; dies ist ein m -dimensionaler Würfel der Kantenlänge $2Ls_\ell$ und dem Volumen $2^m L^m s_\ell^m$. Die Menge $g(N)$ kann also durch Würfel mit einem Gesamtvolumen von

$$\sum_{\ell=1}^s 2^m L^m s_\ell^m \leq 2^m L^m \sum_{\ell=1}^s s_\ell^n = 2^m L^m \sum_{\ell=1}^s v(W_\ell) < 2^{m+1} L^m \varepsilon$$

überdeckt werden. Weil L und m Konstanten sind und ε beliebig klein gewählt werden kann, zeigt dies, dass es sich bei $g(N)$ um eine Jordansche Nullmenge handelt. $\square$

Ohne die Voraussetzung $m \geq n$ funktioniert der Beweis nicht, weil die Abschätzung $s_\ell^m \leq s_\ell^n$ im letzten Beweisschritt dann nicht gilt. Die Aussage des Satzes ist für $m < n$ tatsächlich falsch: Beispielsweise überprüft man leicht, dass $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ eine Lipschitz-stetige Abbildung mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist, wenn wir auf $\mathbb{R}^2$ die $\|\cdot\|_\infty$ -Norm zu Grunde legen. Die Menge $N = [0, 1] \times \{0\}$ ist eine Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}^2$, aber $\pi(N) = [0, 1]$ ist keine Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}$. Statt dessen gilt $v(\pi(N)) = 1$.

Folgerung 4.5 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, wobei $m \geq n$ ist. Ist $N \subseteq U$ eine kompakte Jordansche Nullmenge, dann ist $g(N)$ eine kompakte Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}^m$.

Beweis: Aus der Analysis mehrerer Variablen ist bekannt, dass das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung kompakt ist. Außerdem wissen wir nach Satz 4.2, dass g zumindest lokal Lipschitz-stetig ist. Zu jedem Punkt $x \in N$ gibt es also eine offene Umgebung U_x , so dass $g|_{U_x}$ Lipschitz-stetig mit einer Konstanten L_x ist, bezüglich beliebig gewählter Normen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$. Da N kompakt ist, finden wir eine endliche Familie $x_1, \dots, x_r$ von Punkten, so dass N bereits von $U_{x_1}, \dots, U_{x_r}$ überdeckt wird. Wegen Satz 4.4 ist mit $N \cap U_{x_k}$ auch $g(N \cap U_{x_k})$ eine Jordansche Nullmenge ist, für $1 \leq k \leq r$. Also ist auch die endliche Vereinigung $g(N) = \bigcup_{k=1}^r g(N \cap U_{x_k})$ eine Jordansche Nullmenge. $\square$

Aus der Schulmathematik und der Analysis einer Variablen kennen wir die Substitutionsregel

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$$

für eindimensionale Integrale. Bei der Verallgemeinerung auf höhere Dimension wird die Substitutionsfunktion φ ersetzt durch einen C^1 -Diffeomorphismus, und die Rolle von $\varphi'(x)$ übernimmt die Determinante der Ableitung. Um zu sehen, inwiefern die Determinante für eine „mehrdimensionalen Substitutionsregel“ relevant ist, erinnern uns an deren geometrische Interpretation aus der Linearen Algebra. Dort wurde die Determinante so definiert, so sie jeder Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ das Volumen des Parallelotops

$$P(A) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k a_{\bullet k} \mid \lambda_k \in [0, 1] \text{ für } 1 \leq k \leq n \right\}$$

zuordnet, das von den Spaltenvektoren $a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n} \in \mathbb{R}^n$ der Matrix aufgespannt wird, zuzüglich eines Vorzeichens, das von der Reihenfolge der Vektoren abhängt. Betrachten wir nun zur Matrix A die lineare Abbildung

$$\phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto Av$$

und wenden wir diese auf den Einheitswürfel $Q = [0, 1]^n$ an, dann erhalten wir $\phi_A(Q) = P(A)$ als Bildmenge, wie man mit Hilfe der Linearität von ϕ_A unmittelbar überprüft. Unter der Voraussetzung, dass $|\det(A)|$ tatsächlich mit dem Jordanschen Volumen von $P(A)$ übereinstimmt, gilt also

$$v(\phi_A(Q)) = v(P(A)) = |\det(A)| = |\det(\phi_A)|v(Q). \quad (4.1)$$

Aus dem Transformationssatz wird sich ergeben, dass $v(\phi(B)) = |\det(\phi)|v(B)$ für beliebige lineare Endomorphismen ϕ von $\mathbb{R}^n$ und Jordan-messbare Teilmengen $B \subseteq \mathbb{R}^n$ gültig ist. Hier aber gehen wir zunächst umgekehrt vor und setzen diese Gleichung voraus, um durch heuristische Überlegungen eine naheliegende, mehrdimensionale Verallgemeinerung der Substitutionsregel zu finden.

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und D eine Jordan-messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit $D \subseteq G$. Außerdem sei $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion. Diese Funktion wird die Rolle der Substitutionsfunktion von oben übernehmen. Unser Ziel besteht darin, einen einfachen Ausdruck für das Integral einer Funktion f integriert über die Bildmenge $\varphi(D)$ zu finden. Der Einfachheit halber gehen wir zunächst davon aus, dass D ein kompakter Quader ist. Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von D schneiden sich die Quader $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ nur in einer Jordanschen Nullmenge, und wegen Satz 4.5 gilt dasselbe für die Mengen $\varphi(K)$ in der Vereinigung

$$\varphi(D) = \bigcup_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} \varphi(K).$$

Bezeichnet wir für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ mit a_K einen beliebig gewählten Punkt aus K . Wird die Zerlegung $\mathcal{Z}$ sehr fein gewählt, dann können wir davon ausgehen, dass die Funktion f in der Nähe des Punktes $\varphi(a_K)$ nahezu konstant ist, also auf der gesamten Bildmenge $\varphi(K)$ fast genau den Wert $(f \circ \varphi)(a_K)$ annimmt. Dies liefert uns die Näherung

$$\int_{\varphi(D)} f(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} \int_{\varphi(K)} f(x) dx \approx \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} (f \circ \varphi)(a_K) v(\varphi(K)). \quad (4.2)$$

Versuchen wir nun, das Volumen von $\varphi(K)$ zu approximieren. Weil φ (stetig) differenzierbar ist, kann es in einer Umgebung von a_K durch eine affin-lineare Funktion angenähert werden: Für alle $t \in \mathbb{R}^n$ mit hinreichend kleiner Norm $\|t\|_\infty$ gilt $\varphi(a_K + t) \approx \varphi(a_K) + \varphi'(a_K)(t)$. Ist der Quader $K^{(0)} \subseteq \mathbb{R}^n$ so gewählt, dass $a_K + K^{(0)} = K$ gilt, dann haben bei hinreichend fein gewählter Zerlegung alle Punkte $t \in K^{(0)}$ eine kleine Norm, und wir erhalten

$$\begin{aligned} v(\varphi(K)) &\approx v(\varphi(a_K) + \varphi'(a_K)(K^{(0)})) = v(\varphi'(a_K)(K^{(0)})) \\ &= |\det \varphi'(a_K)| v(K^{(0)}) = |\det \varphi'(a_K)| v(K), \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt die Translationsinvarianz des Jordan-Volumens und im dritten Schritt (4.1) verwendet wurde. Setzen wir dies nun in (4.2) ein, so erhalten wir

$$\int_{\varphi(D)} f(x) dx \approx \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} (f \circ \varphi)(a_K) |\det \varphi'(a_K)| v(K) \approx \int_D (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt.$$

Dies ist die gesuchte mehrdimensionale Verallgemeinerung der eindimensionalen Substitutionsregel. Da jede Jordan-messbare Teilmenge durch disjunkte Vereinigungen kompakter Quader beliebig angenähert werden kann, ist zu erwarten, dass auch in der Gleichung der kompakte Quader D durch eine beliebige kompakte Jordan-messbare Menge ersetzt werden kann.

Satz 4.6 (Transformationssatz)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung, wobei wir voraussetzen, dass $\det \varphi'(t)$ entweder für alle $t \in G$ positiv oder für alle $t \in G$ negativ ist. Sei $T \subseteq G$ eine Jordan-messbare, kompakte Teilmenge und $f : \varphi(T) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann gilt

- (i) Die Bildmenge $\varphi(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Jordan-messbar.
- (ii) Die Funktion f ist auf $\varphi(T)$, die Funktion $f \circ \varphi$ auf T Riemann-integrierbar.
- (iii) Es gilt
$$\int_{\varphi(T)} f(x) dx = \int_T (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt.$$

Zusatz: Der Transformationssatz ist auch dann noch gültig, wenn eine Jordansche Nullmenge $N \subseteq T$ existiert, auf der die Funktion $t \mapsto \det \varphi'(t)$ möglicherweise Null wird. Ebenso genügt es, dass φ auf $T \setminus N$ injektiv ist. Die Funktion $t \mapsto \det \varphi'(t)$ darf aber weiterhin auf G nicht zugleich positive und negative Werte annehmen.

Zunächst machen wir uns klar, dass dieser Satz tatsächlich eine Verallgemeinerung der eindimensionalen Substitutionsregel darstellt. Sei $n = 1$, $G \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes und $T \subseteq G$ ein kompaktes Intervall ist. Wegen $n = 1$ gilt $\det \varphi'(t) = \varphi'(t)$ für alle $t \in G$. Sei $T = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, und setzen wir zunächst voraus, dass $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in G$ gilt. Dann ist die Funktion φ auf ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend, insbesondere gilt $\varphi(a) < \varphi(b)$ und $\varphi(T) = [\varphi(a), \varphi(b)]$. Die eindimensionalen Substitutionsregel ist dann äquivalent zu

$$\int_T (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt = \int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_{\varphi(T)} f(x) dx.$$

Im anderen Fall gilt $\varphi'(t) < 0$ für alle $t \in G$. Dann ist φ überall streng monoton fallend, es gilt $\varphi(a) > \varphi(b)$ und $\varphi(T) = [\varphi(b), \varphi(a)]$. Auch diesmal erhalten wir, wenn auch auf einem leicht veränderten Rechenweg, wegen $|\det \varphi'(t)| = |\varphi'(t)| = -\varphi'(t)$ das Resultat

$$\begin{aligned} \int_T (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt &= - \int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt = - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx \\ &= \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x) dx = \int_{\varphi(T)} f(x) dx. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\det \varphi'(t)$ unter dem Integralzeichen in der Gleichung (S) wird die **Funktionaldeterminante** von φ genannt. Wendet man die Gleichung auf die konstante Funktion $f(x) = 1$ an, so erhält man unter den angegebenen Voraussetzungen an G , φ und T die Gleichung

$$v(\varphi(T)) = \int_T |\det \varphi'(t)| dt.$$

Ist φ darüber hinaus eine bijektive, lineare Abbildung, dann gilt $\varphi'(t) = \varphi$ für alle $t \in T$, und wir erhalten die Gleichung $v(\varphi(T)) = |\det \varphi| v(T)$ zurück, die oben der Ausgangspunkt unserer Überlegungen gewesen war. Auch im Fall $\det \varphi = 0$ ist die Gleichung noch gültig, weil $\varphi(T)$ in diesem Fall in einer Hyperebene von $\mathbb{R}^n$ liegt und damit eine Nullmenge ist.

Der Beweis von Satz 4.6 ist sehr aufwändig und wird an das Ende dieses Kapitels verschoben. Hier schauen wir uns vorher noch einige Beispiele für häufig verwendete Transformationsfunktionen φ an, die in der Geometrie und der Physik eine wichtige Rolle spielen.

Integration in Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten

In § 3 wurde die Polarkoordinaten-Abbildung $\rho_{\text{pol}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben $\rho_{\text{pol}}(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ eingeführt. Schränkt man die Abbildung jedoch auf die offene Teilmenge $U = \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[$ ein, so erhält man eine injektive Abbildung mit $\det \rho'_{\text{pol}}(r, \varphi) \neq 0$ für alle $(r, \varphi) \in U$. Definieren wir nun

$$N = (\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]) \setminus U = \{0\} \times [0, 2\pi] \cup \mathbb{R}_+ \times \{0, 2\pi\},$$

dann ist $N \cap T$ für jede kompakte, Jordan-messbare Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}^2$. Auf Grund des Zusatzes zu Satz 4.6 gilt für jede solche Menge $T \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ und jede rellwertige und stetige Funktion auf $\rho_{\text{pol}}(T)$ somit

$$\int_{\rho_{\text{pol}}(T)} f(x, y) d(x, y) = \int_T (f \circ \rho_{\text{pol}})(r, \varphi) \cdot r d(r, \varphi). \quad (4.3)$$

Als einfache Anwendungsbeispiele für diese Formel berechnen wir ein weiteres Mal das **Kegel-** und das **Halbkugelvolumen**. Für beliebige $s, h \in \mathbb{R}^+$ definieren wir

$$\begin{aligned} K_{s,h} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y)\|_2 \leq s, 0 \leq z \leq h - \frac{h}{s} \|(x, y)\|_2\} \\ H_s &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\|_2 \leq s, z \geq 0\}. \end{aligned}$$

Bei $K_{s,h}$ handelt es sich um den Kegel der Höhe h über der Grundfläche $B_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\|_2 \leq s\}$, dem Kreis vom Radius s um den Mittelpunkt $(0, 0)$, und H_s ist die obere Hälfte der Kugel vom Radius s um den Ursprung $(0, 0, 0)$. Definieren wir Funktionen $f, g : B_s \rightarrow \mathbb{R}_+$ durch

$$f(x, y) = h - \frac{h}{s} \|(x, y)\|_2 \quad \text{und} \quad g(x, y) = \sqrt{s^2 - \|(x, y)\|_2^2},$$

dann sind $K_{s,h}$ und H_s die Ordinatenmengen der Funktionen f und g , d.h. es gilt $K_{s,h} = \Lambda(f)$ und $H_s = \Lambda(g)$. Für den Kegel erhält man die Gleichung durch die Äquivalenzumformung

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in K_{s,h} &\iff \|(x, y)\|_2 \leq s \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq h - \frac{h}{s} \|(x, y)\|_2 \\ &\iff (x, y) \in B_s \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq f(x, y) \iff (x, y, z) \in \Lambda(f). \end{aligned}$$

Der entsprechende Beweis für die Halbkugel ist eine ebenso einfache Übungsaufgabe. Nach Satz 3.18 erhält man die Volumina von $K_{s,h}$ und H_s als Integrale von f und g über B_s , es gilt also

$$v_3(K_{s,h}) = \int_{B_s} f(x, y) d(x, y) \quad \text{und} \quad v_3(H_s) = \int_{B_s} g(x, y) d(x, y).$$

Auf Grund der Wurzelausdrücke ist aber besonders die Auswertung des ersten Integrals in kartesischen Koordinaten eine recht unangenehme Angelegenheit. Wir werden jetzt sehen, dass die Berechnung in Polarkoordinaten bedeutend einfacher ist. Ist allgemein $(x, y) \in B_s$ und $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ mit $\rho_{\text{pol}}(r, \varphi) = (x, y)$, dann gilt wegen $x = r \cos(\varphi)$ und $y = r \sin(\varphi)$ jeweils

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{(r \cos(\varphi))^2 + (r \sin(\varphi))^2} = \sqrt{r^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))} = \sqrt{r^2} = r$$

und somit $(f \circ \rho_{\text{pol}})(r, \varphi) = f(x, y) = h - \frac{h}{s} \|(x, y)\|_2 = h - \frac{h}{s} r$. Setzen wir nun $T = [0, s] \times [0, 2\pi]$, dann erhalten wir mit (4.3) das Kegelvolumen

$$\begin{aligned} \int_{B_s} f(x, y) d(x, y) &= \int_{\rho_{\text{pol}}(T)} f(x, y) d(x, y) = \int_T (f \circ \rho_{\text{pol}})(r, \varphi) r d(r, \varphi) = \\ \int_T (h - \frac{h}{s} r) r d(r, \varphi) &= \int_0^s \left(\int_0^{2\pi} (h - \frac{h}{s} r) d\varphi \right) r dr = \int_0^s [(h - \frac{h}{s} r) \varphi]_0^{2\pi} r dr = \\ \int_0^s 2\pi(hr - \frac{h}{s} r^2) dr &= 2\pi h \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3s} r^3 \right]_0^s = 2\pi h \left(\frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{3} s^2 \right) = 2\pi h \cdot \frac{1}{6} s^2 = \frac{1}{3} h \pi s^2 \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der bekannten Regel „Volumen des Halbkugels = $\frac{1}{3}$ mal Grundfläche mal Höhe“. Für die Halbkugel gilt entsprechend $(g \circ \rho_{\text{pol}})(r, \varphi) = \sqrt{s^2 - r^2}$. Wie beim Kegel erhalten wir für das Halbkugelvolumen

$$\begin{aligned} \int_{B_s} g(x, y) d(x, y) &= \int_{\rho_{\text{pol}}(T)} g(x, y) d(x, y) = \int_T (g \circ \rho_{\text{pol}})(r, \varphi) r d(r, \varphi) = \\ \int_T \sqrt{s^2 - r^2} r d(r, \varphi) &= \int_0^s \left(\int_0^{2\pi} r \sqrt{s^2 - r^2} d\varphi \right) dr = \int_0^s [r \sqrt{s^2 - r^2}]_0^{2\pi} dr = \\ 2\pi \int_0^s r \sqrt{s^2 - r^2} dr &= \pi \int_0^s (2r) \sqrt{s^2 - r^2} dr \stackrel{(*)}{=} \pi \int_0^{s^2} \sqrt{s^2 - t} dt = \\ (-\pi) \int_0^{s^2} (-1) \sqrt{s^2 - t} dt &\stackrel{(*)}{=} (-\pi) \int_{s^2}^0 t^{1/2} dt = \pi \int_0^{s^2} t^{1/2} dt = \pi \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^{s^2} \\ &= \frac{2}{3} \pi (s^2)^{3/2} = \frac{2}{3} \pi s^3 \end{aligned}$$

wobei an den mit (*) gekennzeichneten Stellen die eindimensionale Substitutionsregel angewendet wurde. Es fällt auf, dass im Gegensatz zu unserer früheren Berechnung des Kugelvolumens in § 14 bei der neuen Rechnung die Integralformel $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \pi$, deren Beweis ja mit einigem Aufwand verbunden war, nicht benötigt wurde. Dies kann als Hinweis gewertet werden, dass die Verwendung der Polarkoordinaten tatsächlich eine substantielle Vereinfachung darstellt.

Als weiteres Anwendungsbeispiel betrachten wir eine wichtige Funktion aus der Stochastik.

Definition 4.7 Seien $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Die **Dichtefunktion der Normalverteilung** zum Mittelwert μ und der Standardabweichung σ ist die Funktion $f_{\mu,\sigma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Ist $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, dann spricht man von der **Standard-Normalverteilung**.

Wir erinnern kurz an die Bedeutung der Normalverteilung. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ gibt das Integral $\int_{\alpha}^{\beta} f_{\mu,\sigma}(x) dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass in einer Menge mit einem mit den Parametern μ und σ normalverteilten numerischen Merkmal (zum Beispiel Körpergröße oder Intelligenzquotient) ein zufällig gewähltes Element seinen Wert im Intervall $[\alpha, \beta]$ hat. Für $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ beträgt diese Wahrscheinlichkeit beispielsweise $\approx 68,3\%$, für das größere Intervall $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ bereits ungefähr 95% .

Man erhält eine solche Normalverteilung unter anderem dadurch, dass man ein Zufallsexperiment X sehr oft wiederholt. Betrachtet man für großes $N \in \mathbb{N}$ beispielsweise das Zufallsexperiment „ N -faches Würfeln“ mit dem Merkmal „durchschnittlich gewürfelte Augenzahl“, nähert sich die Verteilung für $N \rightarrow \infty$ einer Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu = 3,5$ und der Standardabweichung $\sigma \approx 1,71$ an. Hierbei ist der Mittelwert wenig überraschend, denn $E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}$ ist das durchschnittliche Ergebnis beim Würfeln. Die Standardabweichung σ ergibt sich als Quadratwurzel aus der Varianz, die man wiederum durch die Formel

$$\text{Var}(X) = E((X - \mu))^2 = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \left(k - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

berechnen kann. Das Verhalten, dass sich eine Zufallsverteilung einer Normalverteilung annähert, ist in der Stochastik als „Gesetz der großen Zahlen“ bekannt. Offenbar kann durch $f_{\mu,\sigma}$ nur dann eine Zufallsverteilung gegeben sein, wenn die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gleich 1 ist.

Satz 4.8 (Gauß'sches Fehlerintegral)

Für alle $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$ gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\sigma}(x) dx = 1$.

Wir werden nun sehen, wie man dieses Ergebnis durch mehrdimensionale Integration und mit Hilfe des Transformationssatzes gewinnen kann. Offenbar genügt es, die Gleichung $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ zu beweisen, denn kann folgt das Ergebnis leicht aus der eindimensionalen Substitutionsregel: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ erhalten wir mit der Substitutionsfunktion $\varphi(t) = \frac{t-\mu}{\sigma}$ und deren Ableitung $\varphi'(t) = \frac{1}{\sigma}$ das Ergebnis

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_{\mu,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t) e^{-\varphi(t)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} e^{-x^2} dx,$$

und wegen $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \varphi(\alpha) = -\infty$ und $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \varphi(\beta) = +\infty$ folgt daraus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu, \sigma}(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f_{\mu, \sigma}(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\varphi(-r)}^{\varphi(r)} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1.$$

Offenbar existiert $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ jedenfalls als uneigentliches Riemannsches Integral, also als Summe der Grenzwerte von $\int_{-r}^0 e^{-x^2} dx$ und $\int_0^r e^{-x^2} dx$, jeweils für $r \rightarrow +\infty$. Denn für $r > 1$ und alle $x \in [1, r]$ gilt jeweils $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, und das Integral $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ konvergiert. Die Existenz von $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r e^{-x^2} dx$ als endlicher Grenzwert folgt ebenso aus der Abschätzung $e^{-x^2} \leq e^x$ für alle $x \in [-r, -1]$ und der Konvergenz von $\int_{-\infty}^{-1} e^x dx$.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Gleichung $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f(x) dx = \sqrt{\pi}$ für die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ zu beweisen. Wir führen dies mit Hilfe des Satzes von Fubini auf ein zweidimensionales Problem zurück. Definieren wir für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ das Quadrat $Q_r = [-r, r]^2$, dann gilt jeweils

$$\begin{aligned} \left(\int_{-r}^r f(x) dx \right)^2 &= \left(\int_{-r}^r f(x) dx \right) \left(\int_{-r}^r f(y) dy \right) = \int_{-r}^r \left(\int_{-r}^r f(x) dx \right) f(y) dy = \\ &= \int_{-r}^r \left(\int_{-r}^r f(x) f(y) dx \right) dy = \int_{Q_r} f(x) f(y) d(x, y) = \int_{Q_r} e^{-x^2-y^2} d(x, y). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right)^2 = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{Q_r} e^{-x^2-y^2} d(x, y).$$

Nun betrachten wir für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ auch die abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{B}_r \subseteq \mathbb{R}^2$ vom Radius r um den Ursprung. Aus den Inklusionen $Q_{r/\sqrt{2}} \subseteq \bar{B}_r \subseteq Q_r$ und der Tatsache, dass die Funktion $(x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2}$ nur positive Werte annimmt, folgt die Abschätzung

$$\int_{Q_{r/\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} d(x, y) \leq \int_{\bar{B}_r} e^{-x^2-y^2} d(x, y) \leq \int_{Q_r} e^{-x^2-y^2} d(x, y)$$

und daraus wiederum die Übereinstimmung $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\bar{B}_r} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{Q_r} e^{-x^2-y^2} d(x, y)$.

Mit Hilfe des Transformationssatzes, angewendet auf Polarkoordinaten, erhalten wir nun weiter

$$\begin{aligned} \int_{\bar{B}_r} e^{-x^2-y^2} d(x, y) &= \int_{\rho_{\text{pol}}([0, r] \times [0, 2\pi])} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \int_{\rho_{\text{pol}}([0, r] \times [0, 2\pi])} e^{-r^2 \cos(\varphi)^2 - r^2 \sin(\varphi)^2} r d(r, \varphi) = \\ &= \int_{\rho_{\text{pol}}([0, r] \times [0, 2\pi])} e^{-r^2} r d(r, \varphi) = 2\pi \int_0^r r e^{-r^2} dr = \pi \int_0^r (2r) e^{-r^2} dr \\ &= -\pi \int_0^{r^2} e^{-t} dt = -\pi [e^{-t}]_0^{r^2} = \pi(1 - e^{-r^2}), \end{aligned}$$

$$\text{also } \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right)^2 = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\bar{B}_r} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \pi(1 - e^{-r^2}) = \pi$$

und damit $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \sqrt{\pi}$ wie behauptet.

In Analogie zu den Polarkoordinaten verwendet man zur Berechnung dreidimensionaler Integrale die ebenfalls aus § 3 bekannten Zylinderkoordinaten

$$\rho_{\text{zyl}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, h, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), h)$$

und die Kugelkoordinaten gegeben durch

$$\rho_{\text{kug}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \vartheta, \varphi) \mapsto (r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), r \cos(\vartheta))$$

deren Funktionaldeterminanten durch $\det \rho'_{\text{zyl}}(r, h, \varphi) = r$ bzw. $\det \rho'_{\text{kug}}(r, \vartheta, \varphi) = r^2 \sin(\vartheta)$ gegeben sind. Für jede kompakte, Jordan-messbare Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ gilt hier entsprechend

$$\int_{\rho_{\text{zyl}}(T)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_T (f \circ \rho_{\text{zyl}})(r, h, \varphi) \cdot r d(r, h, \varphi).$$

Im Fall der Kugelkoordinaten erhalten wir für jede kompakte, Jordan-messbare Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ die Gleichung

$$\int_{\rho_{\text{kug}}(T)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_T (f \circ \rho_{\text{kug}})(r, \vartheta, \varphi) \cdot r^2 \sin(\vartheta) d(r, \vartheta, \varphi).$$

Hierbei ist zu beachten, dass in die mehrdimensionale Substitutionsregel der *Betrag* der Funktionaldeterminante $\det \rho'_{\text{kug}}(r, \vartheta, \varphi)$ eingeht, und dass $\sin(\vartheta) \geq 0$ und somit $|\det \rho'_{\text{kug}}(r, \vartheta, \varphi)| = |r^2 \sin(\vartheta)| = r^2 \sin(\vartheta)$ für $\vartheta \in [0, \pi]$ gilt. Anwendungen dieser Gleichungen für Zylinder- und Kugelkoordinaten behandeln wir in den Übungen.

Wir wenden uns nun wieder dem Hauptthema dieses Kapitels zu, dem Beweis des Transformationssatzes. Unser erstes Etappenziel ist ein neuer Zugang zum Begriff des Jordan-Inhalts. Wir beginnen mit einer Definition.

Definition 4.9 Eine **Figur** im $\mathbb{R}^n$ ist eine endliche Vereinigung

$$F = Q_1 \cup \dots \cup Q_r$$

von Quadern Q_i mit $Q_i^\circ \cap Q_j^\circ = \emptyset$ für $i \neq j$. Auch die leere Menge betrachten wir als Figur. (Hierbei ist $r = 0$.)

Im weiteren Verlauf bezeichnen wir mit $\mathcal{F}$ die Menge der Figuren im $\mathbb{R}^n$ und mit $\mathcal{J}$ die Menge der Jordan-messbaren Teilmengen im $\mathbb{R}^n$.

Definition 4.10 Eine **Inhaltsfunktion** ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit folgenden Eigenschaften.

- (i) Aus $A \subseteq B$ folgt $\mu(A) \leq \mu(B)$, für alle $A, B \in \mathcal{J}$.
- (ii) Für alle $A, B \in \mathcal{J}$ mit $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$ gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- (iii) Es gilt $\mu(v + A) = \mu(A)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{J}$.
- (iv) Es gilt $\mu([0, 1]^n) = 1$.

Wir erinnern an die folgende Notation aus der Linearen Algebra: Ist $A \in \mathcal{M}_{m \times n, \mathbb{R}}$, dann bezeichnen wir mit $\phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Abbildung $v \mapsto Av$ gegeben durch Matrix-Vektor-Multiplikation.

Lemma 4.11

- (i) Der Jordan-Inhalt $v = v_n$ ist eine Inhaltsfunktion auf $\mathcal{J}$.
- (ii) Ist $\mu : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Inhaltsfunktion und $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, dann ist auch durch $B \mapsto c_A^{-1} \mu(\phi_A(B))$ mit der Konstanten $c_A = \mu(\phi_A([0, 1]^n)) \in \mathbb{R}^+$ eine Inhaltsfunktion definiert.

Beweis: zu (i) Die meisten in Definition 4.10 genannten Eigenschaften haben wir bereits verifiziert. Die Normierungsbedingung (iv) ergibt sich direkt aus der Definition des Quadvolumens, die Translationsinvarianz wurde in Satz 3.9 (i) festgestellt, und die Monotonie-Eigenschaft (i) ist der Inhalt von Folgerung 3.7 (ii). Die Additivitätseigenschaft (ii) ergibt sich aus Teil (iii) von Folgerung 3.7, sobald wir nachgewiesen haben, dass aus der Bedingung $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$ die Gleichung $v(A \cap B) = 0$ folgt. Dafür genügt es nach Satz 3.8 zu zeigen, dass $A \cap B$ eine Jordansche Nullmenge ist. Auf Grund der bekannten Rechenregeln für Mengenoperationen gilt

$$\begin{aligned} A \cap B &\subseteq \bar{A} \cap \bar{B} = (A^\circ \cup \partial A) \cap (B^\circ \cup \partial B) = (A^\circ \cap B^\circ) \cup (A^\circ \cap \partial B) \cup (\partial A \cap B^\circ) \cup (\partial A \cap \partial B) \\ &= (A^\circ \cap \partial B) \cup (\partial A \cap B^\circ) \cup (\partial A \cap \partial B) \subseteq \partial A \cup \partial B. \end{aligned}$$

Als beschränkte, abgeschlossene Teilmengen sind ∂A und ∂B kompakt. Da A und B Jordan-messbar sind, handelt es sich bei den Rändern nach Folgerung 3.5 außerdem um Nullmengen. Wegen Proposition 2.2 (iv) ist somit $\partial A \cup \partial B$ und damit auch $A \cap B$ eine Jordansche Nullmenge.

zu (ii) Bezeichnen wir die neue Abbildungsvorschrift mit μ_A , so ergibt sich die Normierungsbedingung (iv) direkt aus der Definition, denn es ist $\mu_A([0, 1]^n) = c_A^{-1} \mu(\phi_A([0, 1]^n)) = \mu(\phi_A([0, 1]^n))^{-1} \mu(\phi_A([0, 1]^n)) = 1$. Alle anderen Eigenschaften übertragen sich direkt von μ auf μ_A . Wir zeigen dies exemplarische für die Additivitäts-Eigenschaft (ii). Sind $B, C \in \mathcal{J}$ mit $B^\circ \cap C^\circ = \emptyset$, dann gilt auch $\phi_A(B)^\circ \cap \phi_A(C)^\circ = \phi_A(B^\circ) \cap \phi_A(C^\circ) = \phi_A(B^\circ \cap C^\circ) = \phi_A(\emptyset) = \emptyset$, denn auf Grund der Homöomorphismus-Eigenschaft von $\phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt $\phi_A(S^\circ) = \phi_A(S)^\circ$ für jede Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu_A(B \cup C) &= c_A^{-1} \mu(\phi_A(B \cup C)) = c_A^{-1} \mu(\phi_A(B) \cup \phi_A(C)) = c_A^{-1} (\mu(\phi_A(B)) + \mu(\phi_A(C))) \\ &= c_A^{-1} \mu(\phi_A(B)) + c_A^{-1} \mu(\phi_A(C)) = \mu_A(B) + \mu_A(C). \end{aligned} \quad \square$$

Satz 4.12 (Polarzerlegung invertierbarer Matrizen)

Für jede Matrix $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ gibt es ein $U \in \mathcal{O}(n)$ und eine symmetrische Matrix S mit $A = US$.

Beweis: Sei $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ vorgegeben. Die Produktmatrix tAA ist symmetrisch wegen ${}^t({}^tAA) = {}^tA({}^tA) = {}^tAA$, außerdem ist sie positiv definit. Denn für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt ${}^tv{}^tAAv = \langle {}^tAAv, v \rangle = \langle Av, Av \rangle \geq 0$. Ist darüber hinaus v ungleich null, dann auch Av , und wir erhalten ${}^tv{}^tAAv > 0$.

Wir zeigen nun, dass eine symmetrische und positiv definite Matrix S mit $S^2 = {}^tAA$ existiert. Die Anwendung des Spektralsatzes aus der Linearen Algebra liefert eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit Einträgen $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ für

$1 \leq i \leq n$ und eine Matrix V aus $\mathcal{O}(n)$, der orthogonalen Gruppe, mit ${}^tAA = {}^tVDV$. Wir definieren nun $S = {}^tV\sqrt{D}V$, wobei $\sqrt{D}$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ bezeichnet. Wie man unmittelbar überprüft, ist mit $\sqrt{D}$ auch die Matrix S symmetrisch und positiv definit. Außerdem gilt

$$S^2 = ({}^tV\sqrt{D}V)({}^tV\sqrt{D}V) = {}^tV(\sqrt{D})^2V = {}^tVDV = {}^tAA.$$

Definieren wir nun $U = AS^{-1}$, dann gilt $A = US$. Die Matrix U ist in $\mathcal{O}(n)$ enthalten, wegen

$${}^tUU = {}^t(AS^{-1})AS^{-1} = {}^t(S^{-1}){}^tAAS^{-1} = ({}^tS)^{-1}{}^tAAS^{-1} = S^{-1}{}^tAAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = E_n.$$

Also haben wir A tatsächlich als Produkt einer orthogonalen und einer symmetrischen positiv definiten Matrix dargestellt. $\square$

Wir haben nun ein erstes wichtiges Etappenziel erreicht.

Satz 4.13

- (i) Es gibt genau eine Inhaltsfunktion auf $\mathcal{J}$, den Jordan-Inhalt.
- (ii) Für alle $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und alle $B \in \mathcal{J}$ gilt $v(\phi_A(B)) = |\det(A)|v(B)$.

Beweis: zu (i) Dass der Jordan-Inhalt v eine Inhaltsfunktion ist, haben wir bereits festgestellt. Sei nun $\mu : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine beliebige Inhaltsfunktion. Wir müssen überprüfen, dass v und μ auf ganz $\mathcal{J}$ übereinstimmen. Zunächst gilt $v([0, 1]^n) = 1 = \mu([0, 1]^n)$. Für jedes $q \in \mathbb{N}$ kann der Einheitswürfel $[0, 1]^n$ in q^n kongruente kompakte Würfel W_j mit Kantenlänge q^{-1} und Volumen q^{-n} zerlegt werden. Diese Teilwürfel schneiden sich nur in Randpunkten. Bezeichnet W einen beliebigen Würfel dieses Formats, dann gilt auf Grund der Eigenschaften (ii) und (iii) von Inhaltsfunktionen die Gleichung $q^n v(W) = \sum_j v(W_j) = v([0, 1]^n) = 1$, also $v(W) = q^{-n}$, und ebenso erhält man $\mu(W) = q^{-n}$. Da sich jeder Quader Q mit rationalen Kantenlängen aus Würfeln der Kantenlänge $\frac{1}{q}$ für hinreichend großes $q \in \mathbb{N}$ zusammensetzen lässt, folgt $v(Q) = w(Q)$ für solche Quader.

Bezeichnet nun P einen allgemeinen Quader (mit möglicherweise irrationalen Kantenlängen), dann existieren für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils Quader Q, Q' mit rationalen Kantenlängen, $Q \subseteq P \subseteq Q'$ und $v(Q') - v(Q) < \varepsilon$. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen. Aus der Eigenschaft (i) von Inhaltsfunktionen folgt $v(Q) = \mu(Q) \leq v(P)$, $\mu(P) \leq v(Q') = \mu(Q') < v(Q) + \varepsilon$. Damit erhalten wir $|\mu(P) - v(P)| < \varepsilon$, und da ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt $\mu(P) = v(P)$. Somit ist $\mu(F) = v(F)$ auch für beliebige Figuren erfüllt. Ist nun $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Jordan-messbare Teilmenge, dann gibt es nach Proposition 3.3 (und auf Grund der Definition von innerem und äußerem Volumen) für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils Figuren F, F' mit $F \subseteq B \subseteq F'$ und $v(F) > v(B) - \varepsilon$, $v(F') < v(B) + \varepsilon$. Genau wie bei den Quadern folgert man aus $v(F) = \mu(F)$ und $v(F') = \mu(F')$, dass auch $v(B) = \mu(B)$ gelten muss.

zu (ii) Wir betrachten zunächst den Fall $A \in \mathcal{O}(n)$. Auf Grund von Lemma 4.11 ist $B \mapsto v(\phi_A([0, 1]^n))^{-1}v(\phi_A(B))$ eine Inhaltsfunktion. Nach folgt daraus $v(\phi_A([0, 1]^n))^{-1}v(\phi_A(B)) = v(B)$ für alle $B \in \mathcal{J}$. Ist nun $\bar{B}_1$ die Einheitskugel vom Radius 1 um den Ursprung, dann gilt $\phi_A(\bar{B}_1) = \bar{B}_1$ wegen $A \in \mathcal{O}(n)$. Es folgt $v(\phi_A([0, 1]^n))^{-1}v(\bar{B}_1) = v(\phi_A([0, 1]^n))^{-1}v(\phi_A(\bar{B}_1)) = v(\bar{B}_1)$ und somit $v(\phi_A([0, 1]^n)) = 1 = |\det(A)|$. Dies wiederum bedeutet $v(\phi_A(B)) = |\det(A)|v(B)$, für alle $A \in \mathcal{O}(n)$ und alle $B \in \mathcal{J}$.

Sei nun $D \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_k \in \mathbb{R}^+$, $1 \leq k \leq n$. Wie im ersten Fall erhalten wir $v(\phi_D([0, 1]^n))^{-1} v(\phi_D(B)) = v(B)$ für alle $B \in \mathcal{J}$. Das Bild $\phi_D([0, 1]^n)$ des Einheitswürfels ist ein kompakter Quader Q mit Kantenlängen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und dem Volumen $v(Q) = \prod_{k=1}^n \lambda_k = \det(D)$. Es folgt $|\det(D)|^{-1} v(Q) = 1$, was zu $v(\phi_D([0, 1]^n)) = |\det(D)|$ umgeformt werden kann. Auf Grund der Gleichung von oben erhalten wir $v(\phi_D(B)) = |\det(D)| v(B)$ für alle $B \in \mathcal{J}$ und alle Diagonalmatrizen D mit positiven Einträgen.

Ist nun $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ beliebig, dann existiert auf Grund der Polarzerlegung ein $U \in \mathcal{O}(n)$ und eine symmetrische positiv definite Matrix S mit $A = US$. Nach dem Spektralsatz existiert ein $V \in \mathcal{O}(n)$ und eine Diagonalmatrix D mit positiven Einträgen, so dass $S = {}^tVDV$ gilt. Insgesamt gilt also $A = WDV$, mit $W = U {}^tV \in \mathcal{O}(n)$. Auf Grund der bereits bewiesenen Gleichungen erhalten wir für jedes $B \in \mathcal{J}$ jeweils

$$\begin{aligned} v(\phi_A(B)) &= v(\phi_W(\phi_D(\phi_V(B)))) = |\det(W)| v(\phi_D(\phi_V(B))) = |\det(W)| |\det(D)| v(\phi_V(B)) \\ &= |\det(W)| |\det(D)| \det(V) v(B) = |\det(A)| v(B). \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 4.14 Ist $T \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen $f_m : T \rightarrow \mathbb{R}$, die auf T gleichmäßig gegen eine weitere Riemann-integrierbare Funktion $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, dann folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_T f_m(x) dx = \int_T f(x) dx.$$

Beweis: Wir bemerken vorweg, dass für beliebige Riemann-integrierbare Funktionen $g, h : T \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils die Ungleichung $|\int_T h(x) dx - \int_T g(x) dx| \leq \int_T |h(x) - g(x)| dx$ gilt. Denn aus $h(x) - g(x) \leq |h(x) - g(x)|$ für alle $x \in T$ folgt $\int_T h(x) dx - \int_T g(x) dx \leq \int_T |h(x) - g(x)| dx$, und aus $g(x) - h(x) \leq |h(x) - g(x)|$ für alle $x \in T$ erhält man ebenso die Ungleichung $\int_T g(x) dx - \int_T h(x) dx \leq \int_T |h(x) - g(x)| dx$.

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeben. Dann existiert auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz ein $M \in \mathbb{N}$ mit $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in T$ und alle $m \geq M$. Für diese m folgt dann

$$\left| \int_T f_m(x) dx - \int_T f(x) dx \right| \leq \int_T |f_m(x) - f(x)| dx \leq \int_T \varepsilon dx = \varepsilon v(T). \quad \square$$

Definition 4.15 Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_n)$ eine Zerlegung von Q . Für $1 \leq k \leq n$ sei δ_k das Maximum der Längen der durch $\mathcal{Z}_k$ definierten Intervalle. Dann wird

$$\delta(\mathcal{Z}) = \max\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$$

die **Feinheit** der Zerlegung $\mathcal{Z}$ genannt.

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar, dass das Volumen sämtlicher Teilquader für alle Teilquader $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ die Ungleichung $v(K) \leq \delta(\mathcal{Z})^n$ erfüllt.

Lemma 4.16 Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q . Dann existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}'$ von Q mit $\delta(\mathcal{Z}') < \delta$ die Ungleichungen $0 \leq S_f^+(\mathcal{Z}') - S_f^+(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}') < \varepsilon$ und $0 \leq S_f^-(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}') - S_f^-(\mathcal{Z}') < \varepsilon$ erfüllt sind.

Beweis: Der erste Teil der beiden Ungleichungsketten ergibt sich direkt aus der Tatsache, dass Obersummen bei Verfeinerung kleiner und Untersummen bei Verfeinerung größer werden. Die Zerlegung $\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}'$ entsteht aus $\mathcal{Z}'$ durch Hinzunahme einer gewissen Anzahl $m \in \mathbb{N}$ zu den einzelnen Komponenten $\mathcal{Z}'_k$. Wir untersuchen, wie sich die Obersumme $S_f^+(\mathcal{Z}')$ durch Hinzunahme eines einzigen Zerlegungspunktes t zu $\mathcal{Z}'_k$ verändert, wobei wir $t \notin \mathcal{Z}'_k$ voraussetzen dürfen (andernfalls gibt es keine Änderung).

Von der Änderung sind alle Teilquader $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}')$ betroffen, deren k -te Kante mit dem eindeutig bestimmten Teilintervall übereinstimmt, das t enthält. Die Länge dieses Teilintervalls ist durch δ beschränkt. Bezeichnen wir mit ℓ das Maximum der Kantenlängen von Q , dann haben die Teilquader, die von der Änderung betroffen sind, ein Gesamtvolumen $\leq \delta \ell^{n-1}$. Setzen wir $s = \sup\{|f(x)| \mid x \in Q\}$, dann ändert sich die Obersumme betragsmäßig also höchstens um den Wert $\delta s \ell^{n-1}$. Beim Übergang von $\mathcal{Z}'$ zu $\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}'$ beträgt die Änderung also höchstens $\delta m s \ell^{n-1}$. Wählen wir für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ unser $\delta \in \mathbb{R}^+$ also so, dass $\delta m s \ell^{n-1} < \varepsilon$ erfüllt ist, dann erhalten wir die angegebene Ungleichung. Für die Untersummen läuft die Argumentation analog. $\square$

Definition 4.17 Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader, $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Funktion und $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q . Für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ sei $a_K \in K$ ein beliebig gewählter Punkt. Dann nennt man

$$\mathcal{R}_f(\mathcal{Z}, (a_K)_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})}) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} f(a_K) v(K)$$

eine **Riemannsche Summe** von f bezüglich $\mathcal{Z}$.

Unmittelbar aus der Definition ergibt sich, dass jede Riemannsche Summe zwischen Unter- und Obersumme liegt, also stets die Ungleichungen $S_f^-(\mathcal{Z}) \leq \mathcal{R}_f(\mathcal{Z}, (a_K)) \leq S_f^+(\mathcal{Z})$ erfüllt sind.

Wir verdeutlichen den Begriff der Riemannschen Summe anhand eines kleinen Beispiels. Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto x$, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{Z}_n = \{\frac{k}{n} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$ die äquidistante Unterteilung des Einheitsintervalls. Dann sind die Teilintervalle bezüglich $\mathcal{Z}_n$ gegeben durch $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ für $1 \leq k \leq n$. Wählen wir in jedem Teilintervall $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ jeweils den linken Randpunkt $a_k^- = \frac{k-1}{n}$, so erhalten wir mit Hilfe der bekannten Summenformel $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ die Riemannsche Summe

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_f(\mathcal{Z}, (a_k^-)) &= \sum_{k=1}^n a_k^- v([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]) = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}). \end{aligned}$$

Dies ist zugleich die Untersumme $S_f^-(\mathcal{Z}_n)$. Wählen wir dagegen im Teilintervall $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ jeweils den rechten Randpunkt, also $a_k^+ = \frac{k}{n}$, dann erhalten wir die Riemannsche Summe

$$\mathcal{R}_f(\mathcal{Z}, (a_k^+)) = \sum_{k=1}^n a_k^+ v([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n}).$$

Dies ist zugleich die Obersumme $S_f^+(\mathcal{Z}_n)$. Wählen wir schließlich in $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ jeweils den Mittelpunkt $a_k = \frac{2k-1}{2n}$, dann ergibt sich die Riemannsche Summe

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_f(\mathcal{Z}, (a_k)) &= \sum_{k=1}^n a_k v([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]) = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n (2k-1) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{2n^2} \cdot n \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, wie das Riemann-Integral durch Riemannsche Summen approximiert werden kann.

Satz 4.18 Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\mathcal{Z}'$ eine Zerlegung von Q mit $\delta(\mathcal{Z}') < \delta$, dann gilt $|\mathcal{R}_f(\mathcal{Z}', (a_K)) - \int_Q f(x) dx| < \varepsilon$ für jede Riemannsche Summe von f bezüglich $\mathcal{Z}'$.

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $u = \int_Q f(x) dx$. Auf Grund der Riemann-Integrierbarkeit existiert eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $u - S_f^-(\mathcal{Z}) < \frac{1}{4}\varepsilon$ und $S_f^+(\mathcal{Z}) - u < \frac{1}{4}\varepsilon$. Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass Lemma 4.16 mit $\frac{1}{4}\varepsilon$ statt ε erfüllt ist. Sei $\mathcal{Z}'$ eine Zerlegung von Q mit $\delta(\mathcal{Z}') < \delta$. Auf Grund des Lemmas gilt

$$\begin{aligned}S_f^+(\mathcal{Z}') - S_f^-(\mathcal{Z}') &\leq (S^+(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}') + \frac{1}{4}\varepsilon) - (S^-(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}') - \frac{1}{4}\varepsilon) \leq S^+(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}') - S^-(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}') + \frac{1}{2}\varepsilon \\ &\leq S^+(\mathcal{Z}) - S^-(\mathcal{Z}) + \frac{1}{2}\varepsilon \leq (u + \frac{1}{4}\varepsilon) - (u - \frac{1}{4}\varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Sei nun $s = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}')} f(a_K) v(K)$ eine Riemannsche Summe bezüglich $\mathcal{Z}'$. Es gilt sowohl $S_f^-(\mathcal{Z}') \leq s \leq S_f^+(\mathcal{Z}')$ als auch $S_f^-(\mathcal{Z}') \leq u \leq S_f^+(\mathcal{Z}')$. Wegen $S_f^+(\mathcal{Z}') - S_f^-(\mathcal{Z}') < \varepsilon$ folgt daraus $|s - u| < \varepsilon$. $\square$

Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen, um den vollständigen Beweis des Transformationssatzes, Satz 4.6, durchführen zu können. Wir geben hier noch einmal die Voraussetzungen an. Es ist $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft, dass entweder $\det \varphi'(t) > 0$ für alle $t \in G$ oder $\det \varphi'(t) < 0$ für alle $t \in G$ gilt. Insbesondere ist $\det \varphi'(t)$ somit auf ganz G ungleich null. Aus dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit folgt somit, dass φ ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Außerdem vorgegeben ist eine kompakte Jordan-messbare Teilmenge $T \subseteq G$ und eine stetige reellwertige Funktion f auf der Bildmenge $\varphi(T)$.

zu (i) Da φ insbesondere ein Homöomorphismus ist, gilt $\varphi(\partial T) = \partial(\varphi(T))$. Da außerdem T Jordan-messbar und kompakt ist, handelt es sich nach Folgerung 3.5 bei ∂T um eine kompakte Jordansche Nullmenge. Als Bild einer kompakten Nullmenge unter einer stetig differenzierbaren Abbildung ist $\partial(\varphi(T))$ nach Folgerung 4.5 eine kompakte Jordansche Nullmenge. Wiederum nach Folgerung 3.5 ist $\varphi(T)$ Jordan-messbar.

zu (ii) Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass stetige und beschränkte Funktionen auf Jordan-messbaren Teilmengen nach Proposition 3.11 Riemann-integrierbar sind. Denn nach Voraussetzung ist f stetig auf der kompakten Menge $\varphi(T)$ und damit beschränkt nach dem Maximumsprinzip. Daraus folgt unmittelbar, dass auch $f \circ \varphi$ auf T stetig und beschränkt ist.

Die Hauptarbeit beim Beweis des Transformationssatzes ist die Überprüfung der Gleichung

$$\int_{\varphi(T)} f(x) dx = \int_T (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt.$$

Wir gehen hierzu in mehreren Einzelschritten vor.

1. Schritt:

Beweis der Ungleichung $v(\varphi(W)) \leq \int_W |\det \varphi'(x)| dx$ für einen kompakten Würfel $W \subseteq G$

Sei 2ℓ die Kantenlänge des Würfels, mit $\ell \in \mathbb{R}^+$. Sei $q \in \mathbb{N}$. Wir unterteilen W in q^n kompakte Würfel $W_{j,q}$ der Kantenlänge $\frac{2\ell}{q}$. Sei $p_{j,q}$ jeweils der Mittelpunkt von $W_{j,q}$ und $\phi_{j,q} = \varphi'(p_{j,q})$. Sei jeweils $\chi_{j,q} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\chi_{j,q} = \phi_{j,q}^{-1} \circ \varphi$. Auf Grund der mehrdimensionalen Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \chi'_{j,q}(x) &= (\phi_{j,q}^{-1})'(\varphi(x)) \circ \varphi'(x) = \phi_{j,q}^{-1} \circ (\varphi'(p_{j,q}) + (\varphi'(x) - \varphi'(p_{j,q}))) \\ &= \text{id}_{\mathbb{R}^n} + \phi_{j,q}^{-1} \circ (\varphi'(x) - \varphi'(p_{j,q})) \end{aligned}$$

für alle $x \in W_{j,q}$. Als stetige Funktion auf der kompakten Menge W ist φ' dort gleichmäßig stetig. Der Abstand $\|x - p_j\|_\infty$ für $x \in W_{j,q}$ ist durch $\frac{\ell}{q}$ beschränkt. Es gibt deshalb eine Folge $(\tilde{\delta}_q)_{q \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim_q \tilde{\delta}_q = 0$ und $\|\varphi'(x) - \varphi'(p_j)\| \leq \tilde{\delta}_q$ für alle $x \in W_{j,q}$, und alle j und q .

Sind nun allgemein ϕ und ψ stetige lineare Abbildungen zwischen normierten $\mathbb{R}$ -Vektorräumen, dann ist leicht zu zeigen, dass für die Operatornorm die Ungleichung $\|\psi \circ \phi\| \leq \|\psi\| \cdot \|\phi\|$ gilt. (Der Beweis dafür sollte in dem entsprechenden Kapitel der Mehrdimensionalen Analysis bei Gelegenheit nachgetragen werden.) Nach dem Maximumsprinzip ist die Operatornorm $\|\varphi'(t)^{-1}\|$ auf T nach oben durch eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}^+$ beschränkt. Insbesondere gilt $\|\phi_{j,q}^{-1}\| \leq \alpha$ für alle j und q . Insgesamt erhalten wir damit

$$\|\chi'_{j,q}(x)\| \leq \left\| \text{id}_{\mathbb{R}^n} + \phi_{j,q}^{-1} \circ (\varphi'(x) - \varphi'(p_{j,q})) \right\| \leq \|\text{id}_{\mathbb{R}^n}\| + \|\phi_{j,q}^{-1}\| \cdot \|\varphi'(x) - \varphi'(p_{j,q})\| \leq 1 + \alpha \tilde{\delta}_q.$$

Setzen wir also $\delta_q = \alpha \tilde{\delta}_q$, dann gilt $\lim_q \delta_q = 0$ und $\|\chi'_{j,q}(x)\| \leq 1 + \delta_q$ für alle $x \in W_{j,q}$, und alle j und q . Für alle $x \in W_{j,q}$ erhält man, genau wie im Beweis von Satz 4.2, mit Hilfe des Mittelwertsatzes für Richtungsableitungen jeweils die Abschätzung

$$|\chi_{j,q}(x) - \chi_{j,q}(p_j)| \leq \max\{\|\chi'_{j,q}(x)\| \mid x \in W_{j,q}\} \cdot \|x - p_j\|_\infty \leq (1 + \delta_q) \frac{\ell}{q}.$$

Dies zeigt, dass die Bildmenge $\chi_{j,q}(W_{j,q})$ jeweils in einem Würfel der Kantenlänge $(1 + \delta_q) \frac{2\ell}{q}$ enthalten ist. Es folgt $v(\chi_{j,q}(W_{j,q})) \leq (1 + \delta_q)^n \left(\frac{2\ell}{q}\right)^n$. Weil sich die Teilwürfel $W_{j,q}$ und auch ihre Bilder nur in Randpunkten schneiden, erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} v(\varphi(W)) &= \sum_j v(\varphi(W_{j,q})) = \sum_j v(\phi'(p_{j,q})(\chi_{j,q}(W_{j,q}))) = \sum_j |\det \varphi'(p_{j,q})| v(\chi_{j,q}(W_{j,q})) \\ &\leq (1 + \delta_q)^n \sum_j |\det \varphi'(p_{j,q})| \left(\frac{2\ell}{q}\right)^n = (1 + \delta_q)^n \sum_j |\det \varphi'(p_{j,q})| v(W_{j,q}). \end{aligned}$$

Bei der letzten Summe handelt es sich für jedes q jeweils um eine Riemannsche Summe der Funktion $x \mapsto |\det(\varphi'(x))|$ bezüglich einer Zerlegung der Feinheit δ_q des Würfels W . Weil die Folge $(\delta_q)_{q \in \mathbb{N}}$ gegen null konvergiert, und auf Grund von Satz 4.18, konvergiert die Folge Riemannscher Summen gegen das Integral $\int_W |\det(\varphi'(x))| dx$. Außerdem konvergiert der Vorfaktor $(1 + \delta_q)^n$ gegen 1. Somit erhalten wir für $q \rightarrow \infty$ tatsächlich die Ungleichung $v(\varphi(W)) \leq \int_W |\det(\varphi'(x))| dx$.

2. Schritt:

Nachweis der Ungleichung $\int_{\varphi(W)} f(x) dx \leq \int_W (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt$ für eine stetige, nichtnegative Funktion f auf der Bildmenge $\varphi(W)$, wieder für einen kompakten Würfel $W \subseteq G$

Wir verwenden dieselbe Notation wie im 1. Schritt. Für alle j und q bezeichnet $f_q : \varphi(W) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die jeweils $f_q(x) = f(\varphi(p_{j,q}))$ für jeden Punkt x im Inneren einer Bildmenge $\varphi(W_{j,q})$ erfüllt. Die Funktion f_q ist also für jedes j auf der offenen Teilmenge $\varphi(W_{j,q})^\circ \subseteq \varphi(G)$ jeweils konstant. (Man spricht in diesem Zusammenhang in der Integrationstheorie auch von *Treppenfunktionen*.) Für alle Punkte $x \in \varphi(W)$, die in der Vereinigung der Ränder der Bildmengen $\varphi(W_{j,q})$ liegen, fordern wir lediglich, dass $f_q(x) = f(\varphi(p_{j,q}))$ für ein j mit $x \in \varphi(W_{j,q})$ gilt.

Da f auf $\varphi(W)$ gleichmäßig stetig ist, und auf Grund der beschränkten Ausdehnung der Bildmengen $\varphi(W_{j,q})$ nach Schritt 1, konvergiert die Funktionenfolge $(f_q)_{q \in \mathbb{N}}$ auf $\varphi(W)$ gleichmäßig gegen f . Nach Lemma 4.14 folgt daraus $\lim_{q \rightarrow \infty} \int_{\varphi(W)} f_q(x) dx = \int_{\varphi(W)} f(x) dx$. Weil die Funktion f_q auf den Mengen $\varphi(W_{j,q})^\circ$ jeweils konstant ist, gilt

$$\int_{\varphi(W)} f_q(x) dx = \sum_j \int_{\varphi(W_{j,q})} f_q(x) dx = \sum_j f(\varphi(p_{j,q})) v(\varphi(W_{j,q})).$$

Auf Grund der Ergebnisse aus dem 1. Schritt gilt die Abschätzung

$$\sum_j f(\varphi(p_{j,q})) v(\varphi(W_{j,q})) \leq (1 + \delta_q)^n \sum_j (f \circ \varphi)(p_{j,q}) |\det(\varphi'(p_{j,q}))| v(W_{j,q}).$$

Auf der rechten Seite der Ungleichung steht nun wiederum eine Riemannsche Summe. Lassen wir q gegen unendlich laufen, so wird die Ungleichung zu $\int_{\varphi(W)} f(x) dx \leq \int_W (f \circ \varphi)(t) |\det(\varphi'(t))| dt$.

3. Schritt:

Verallgemeinerung der Ungleichung von Würfeln auf beliebige kompakte Jordan-messbare Mengen

Sei $Q \subseteq G$ ein kompakter Quader, und sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben. Nach Lemma 4.3 existiert eine endliche Familie $(W_j)_{j \in J}$ von Würfeln, die Q überdecken und sich höchstens in Randpunkten schneiden, mit $\sum_{j \in J} v(W_j) < v(Q) + \varepsilon$. Setzen wir $s = \max\{(f \circ \varphi)(t) |\det(\varphi'(t))| \mid t \in Q\}$, dann folgt

$$\int_{\varphi(Q)} f(x) dx \leq \sum_{j \in J} \int_{\varphi(W_j)} f(x) dx \leq \sum_{j \in J} \int_{W_j} (f \circ \varphi)(t) |\det(\varphi'(t))| dt \leq \int_Q (f \circ \varphi)(t) |\det(\varphi'(t))| dt + s\varepsilon.$$

Weil $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig klein gewählt werden kann, ist die Ungleichung damit für Quader bewiesen. Da jede Figur eine Vereinigung von Quadern ist, die sich höchstens in Randpunkten schneiden, gilt die Ungleichung damit auch für Figuren.

Auf ähnliche Weise wie beim Übergang von Würfeln zu Quadern verwendet man nun, dass für jede kompakte Jordan-messbare Teilmenge $T \subseteq G$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Figur F mit $F \supseteq T$ und $v(F) < v(T) + \varepsilon$ existiert. Dies zeigt, dass die Ungleichung auch für kompakte Jordan-messbare Teilmengen gilt.

4. Schritt: Umwandlung der Ungleichung in eine Gleichung

Sei $T \subseteq G$ kompakt und Jordan-messbar, und sei $\psi : \varphi(G) \rightarrow G$ die Umkehrabbildung von φ . Mit φ ist auch ψ ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus. Durch Anwendung der bereits bewiesenen Ungleichung auf ψ und auf die Funktion $(\psi \circ \varphi)(G) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto (f \circ \varphi)(t) |\det(\varphi'(t))|$ erhalten wir

$$\int_{\psi(\varphi(T))} (f \circ \varphi)(t) |\det(\varphi'(t))| dt \leq \int_{\varphi(T)} (f \circ \varphi \circ \psi)(x) \cdot |\det(\varphi'(\psi(x)))| \cdot |\det(\psi'(x))| dx.$$

Wegen $\psi = \varphi^{-1}$ gilt $\psi(\varphi(T)) = T$ und $f \circ \varphi \circ \psi = f$. Die mehrdimensionale Kettenregel, angewendet auf $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\varphi(G)}$, liefert für alle $x \in \varphi(T)$ die Gleichung $\text{id}_{\mathbb{R}^n} = \text{id}'_{\varphi(G)}(x) = (\varphi \circ \psi)'(x) = \varphi'(\psi(x)) \circ \psi'(x)$ und damit

$$|\det(\varphi'(\psi(x)))| \cdot |\det(\psi'(x))| = |\det(\varphi'(\psi(x)) \circ \psi'(x))| = |\det(\text{id}_{\mathbb{R}^n})| = 1.$$

Durch Einsetzen erhalten wir $\int_T (f \circ \varphi)(t) |\det(\varphi'(t))| dt \leq \int_{\varphi(T)} f(x) dx$ und somit insgesamt Gleichheit.

5. Schritt:

Verallgemeinerung der Gleichung auf beliebige stetige (nicht notwendigerweise nichtnegative) Funktionen f

Mit f sind auch $f_+ = \max\{f, 0\}$ und $f_- = -\min\{f, 0\}$ stetige Funktionen auf $\varphi(T)$. Diese sind stetig, nichtnegativ, und es gilt $f = f_+ - f_-$. Auf Grund der Verträglichkeit des Riemann-Integrals mit Addition und Subtraktion erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(T)} f(x) dx &= \int_{\varphi(T)} f_+(x) dx - \int_{\varphi(T)} f_-(x) dx = \\ \int_T (f_+ \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt - \int_T (f_- \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt &= \int_T (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt. \end{aligned}$$

§ 5. Wegintegrale und Flächenintegrale, Integralsätze

Zusammenfassung. Bisher kennen wir für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ nur ein n -dimensionales Volumen definiert, und einen Integralbegriff, der auf diesem Volumen basiert. In diesem Kapitel erweitern wir die vorhandenen Begriffe, um auch mit Weglängen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sowie mit Flächeninhalten im $\mathbb{R}^3$ arbeiten zu können, und wir definieren entsprechend daran angepasste Integrale. Dabei wird nicht nur die Integration über reellwertige Funktionen, sondern auch über Vektorfelder ermöglicht; letztere spielen vor allem in physikalischen Anwendungen eine wichtige Rolle. Den Abschluss dieses Kapitels bilden einige (wiederum vor allem für die Physik bedeutende) Integralsätze, durch die ein Zusammenhang zwischen den ursprünglichen Integralen im $\mathbb{R}^n$ und den neu definierten Weg- und Flächenintegralen hergestellt wird.

Wichtige Grundbegriffe

- stetige Diff'barkeit auf nicht-offenen Mengen
- stückweise stetig differenzierbare Wege
- parametrisierte $\mathcal{C}^1$ -Fläche
- orientierte kompakte stückweise $\mathcal{C}^1$ -Fläche
- stetiges Einheitsnormalenfeld
- Weglänge, Wegintegral 1. und 2. Art
- komplexes Kurvenintegral
- Flächeninhalt, Flächenintegral 1. und 2. Art
- (konservatives) Vektorfeld
- Gradient einer reellwertigen Funktion
- Divergenz und Rotation eines Vektorfelds

Zentrale Sätze

- Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen 2. Art bei konservativen Vektorfeldern
- Unabhängigkeit der Flächenintegrale von der Parametrisierung
- Gauß'scher Integralsatz für Flächen
- Gauß'scher Integralsatz im Raum
- Stokes'scher Integralsatz

Bisher haben wir Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit nur für Funktionen mit offenem Definitionsbereich definiert. Für die Anwendungen in diesem Kapitel ist es zweckmäßig, eine Definition für beliebige Teilmengen zur Verfügung zu haben.

Definition 5.1 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Wir bezeichnen eine Abbildung $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ als **stetig differenzierbar**, wenn eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine $\mathcal{C}^1$ -Abbildung $\hat{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\hat{f}|_A = f$ existieren.

Unser erstes wichtiges Thema ist die Integration auf Wegen.

Definition 5.2 Ein **Weg in A** ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow A$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (endliches oder unendliches) Intervall bezeichnet. Wir bezeichnen γ als **stückweise stetig differenzierbar**, wenn Punkte $t_1 < \dots < t_r$ in I existieren, so dass $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ für $2 \leq k \leq r$ jeweils stetig differenzierbar ist, ebenso $\gamma|_{I^-}$ und $\gamma|_{I^+}$ für $I^- = \{t \in I \mid t \leq t_1\}$ und $I^+ = \{t \in I \mid t \geq t_r\}$.

Man bezeichnet einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ als geschlossen, wenn sein Anfangs- und sein Endpunkt übereinstimmen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt. Beispiele für stückweise stetig differenzierbare Wege sind

(i) der Kreis $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$

(ii) das Quadrat $\gamma_2 : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{cases} (t, 0) & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1) & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \\ (3-t, 1) & \text{für } 2 \leq t \leq 3 \\ (0, 4-t) & \text{für } 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$

(iii) die Schraubenlinie (Helix) $\gamma_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$

(iv) die logarithmische Spirale $\gamma_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$

(v) die **Verbindungsstrecke** zwischen zwei Punkten $p, q \in \mathbb{R}^n$, gegeben durch $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto (1-t)p + tq$

Dabei sind der Kreis und das Quadrat geschlossene Wege. Die übrigen Wege sind nicht geschlossen. Die logarithmische Spirale besitzt eine geometrische Besonderheit im Zusammenhang mit der Weglänge, die wir gleich definieren werden. Folgende Rechenoperationen auf Wegen werden sich beim Umgang mit Wegintegralen als nützlich herausstellen.

Definition 5.3 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, und seien $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow U, \gamma_2 : [b, c] \rightarrow U$ Wege in U .

- (i) Der Weg $\gamma_1 + \gamma_2$ gegeben durch $(\gamma_1 + \gamma_2)|_{[a, b]} = \gamma_1$ und $(\gamma_1 + \gamma_2)|_{[b, c]} = \gamma_2$ wird die **Summe** von γ_1 und γ_2 genannt.
- (ii) Den Weg $-\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $(-\gamma_1)(t) = \gamma_1(b + a - t)$ nennt man die **Umkehrung** von γ_1 .
- (iii) Ist $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow U$ ein Weg mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, aber mit $c \neq b$, dann definiert man $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1 + \tilde{\gamma}_2$, wobei $\tilde{\gamma}_2 : [b, d - c + b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch die **Umparametrisierung** $\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(t + c - b)$ gegeben ist.
- (iv) Sind $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ und $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow U$ Wege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$, dann definiert man $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1 + (-\gamma_2)$.

Mit Hilfe dieser Operationen kann das Quadrat γ_2 von oben in der Form

$$\gamma_2 = [(0,0), (1,0)] + [(1,0), (1,1)] + [(1,1), (0,1)] + [(0,1), (0,0)]$$

dargestellt werden. Für beliebige Punkte $p, q \in \mathbb{R}^n$ gilt offenbar $[q, p] = -[p, q]$.

Definition 5.4 [5.1] Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge, $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ ein stückweise stetig diff'barer Weg in U und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Dann bezeichnet man

- (i) die Zahl $\ell(\gamma) = \int_{\gamma} 1 \, ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$ als **Weglänge**
- (ii) den Wert $\int_{\gamma} f \, ds = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$ als **Wegintegral 1. Art**
- (iii) den Wert $\int_{\gamma} \langle F, ds \rangle = \int_a^b \langle (F \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle \, dt$ als **Wegintegral 2. Art**.

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$, dann wird eine Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ als **Vektorfeld** auf U bezeichnet. Ist F stetig, dann spricht man von einem **stetigen Vektorfeld**.

Als erstes einfaches Beispiel berechnen wir die Länge der Kreiskurve. Für alle $t \in [0, 2\pi]$ gilt $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, also $\|\gamma'(t)\|_2^2 = (-\sin(t))^2 + \cos(t)^2 = 1$ und somit $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$. Dadurch erhalten wir

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi ,$$

was laut Schulmathematik tatsächlich der Umfang des Kreises vom Radius 1 ist. Sind $p, q \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (1-t)p + q$ die Verbindungsstrecke, dann ist $\gamma'(t) = q - p$ und $\|\gamma'(t)\|_2 = \|q - p\|_2$ für alle $t \in [0, 1]$. Wir erhalten als Länge

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \int_0^1 \|q - p\|_2 \, dt = \|q - p\|_2 ,$$

die Länge des Verbindungsvektors zwischen den Punkten p und q . Auch dieses Ergebnis war zu erwarten.

Eine besondere geometrische Eigenart der *logarithmischen Spirale* besteht darin, dass sich der innere Teil unendlich oft um den Koordinatenursprung herumwickelt, dabei aber eine **endliche Gesamtlänge** hat. Das rechnen wir folgendermaßen nach. Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t)).$$

Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ entspricht $\gamma_n = \gamma|_{[2n\pi, 2(n+1)\pi]}$ einem Umlauf der Spirale. Wir berechnen die Länge dieses Umlaufs in Abhängigkeit von n . Es gilt jeweils $\gamma'(t) = (e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\sin(t) + \cos(t)))$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|_2^2 &= e^{2t} \left\langle \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle = e^{2t} ((\cos(t) - \sin(t))^2 + (\sin(t) + \cos(t))^2) \\ &= e^{2t} (\cos(t)^2 - 2\sin(t)\cos(t) + \sin(t)^2 + \sin(t)^2 + 2\sin(t)\cos(t) + \cos(t)^2) \\ &= 2e^{2t} (\cos(t)^2 + \sin(t)^2) = 2e^{2t}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für alle $n \in \mathbb{Z}$ jeweils

$$\ell(\gamma_n) = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \|\gamma'_n(t)\|_2 dt = \sqrt{2} \cdot \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} e^t dt = \sqrt{2} [e^t]_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} = \sqrt{2} (e^{2(n+1)\pi} - e^{2n\pi}).$$

Für die Länge des inneren Teils erhalten wir also den Wert

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(\gamma_{-n}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} (e^{2((-n)+1)\pi} - e^{2(-n)\pi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} (e^{2(1-n)\pi} - e^{-2n\pi}) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2} (e^{-2n\pi} - e^{-2(n+1)\pi}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} (1 - e^{-2(n+1)\pi}) = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz zeigt, dass die Definition der Weglänge mit unserer intuitiven Vorstellung übereinstimmt, und gibt darüber hinaus den Wegintegralen 1. Art eine geometrische Bedeutung. Eine ähnliche Interpretation werden wir weiter unten auch für die Integrale 1. Art auf Flächen erhalten.

Satz 5.5 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ ein stetig differenzierbarer Weg in U . Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\mathcal{Z} = \{t_1, \dots, t_{m-1}\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ der Feinheit $< \delta$ und ist $u_k \in]t_{k-1}, t_k[$ für $1 \leq k \leq m$, dann folgt

$$\left| \sum_{k=1}^m (f \circ \gamma)(u_k) \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 - \int_{\gamma} f ds \right| < \varepsilon.$$

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Weil die Funktion

$$\tilde{f} : [a, b]^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (s_0, s_1, \dots, s_n) \mapsto (f \circ \gamma)(s_0) \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n \gamma'_j(s_j)^2}$$

auf ihrem kompakten Definitionsbereich gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $s, s' \in [a, b]^{n+1}$ mit $\|s - s'\|_{\infty} < \delta$ jeweils $|\tilde{f}(s) - \tilde{f}(s')| < \frac{\varepsilon}{2\kappa(b-a)}$ erfüllt ist. Sei nun $k \in \{1, \dots, m\}$. Wenden wir den (eindimensionalen) Mittelwertsatz auf die einzelnen Komponenten γ_j von γ an, so erhalten wir jeweils ein $s_j \in]t_{k-1}, t_k[$ mit der Eigenschaft $\gamma'_j(s_j)(t_k - t_{k-1}) = \gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})$. Es gilt dann

$$\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2^2 = \sum_{j=1}^n (\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1}))^2 = (t_k - t_{k-1})^2 \sum_{j=1}^n \gamma'_j(s_j)^2,$$

also $(f \circ \gamma)(u_k) \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 = \tilde{f}(u_k, s_1, \dots, s_n)(t_k - t_{k-1})$, und wegen $\|(u_k, s_1, \dots, s_n) - (u_k, \dots, u_k)\|_{\infty} \leq (t_k - t_{k-1}) < \delta$ schließlich

$$\begin{aligned} |(f \circ \gamma)(u_k) \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 - (f \circ \gamma)(u_k) \|\gamma'(u_k)\|_2 (t_k - t_{k-1})| &= \\ (t_k - t_{k-1}) |\tilde{f}(u_k, s_1, \dots, s_n) - \tilde{f}(u_k, u_k, \dots, u_k)| &< (t_k - t_{k-1}) \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \end{aligned}$$

Summation über alle k ergibt, dass der Abstand $|s - s'|$ zwischen $s = \sum_{k=1}^m |(f \circ \gamma)(u_k)| \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2$ und $s' = \sum_{k=1}^m |(f \circ \gamma)(u_k)| \|\gamma'(u_k)\|_2 (t_k - t_{k-1})$ durch

$$\sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{1}{2}\varepsilon$$

nach oben abgeschätzt werden kann. Nun ist s' aber eine Riemannsche Summe der Funktion $t \mapsto (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\|_2$ bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}$. Nach weiterer Verkleinerung von δ erfüllt diese die Abschätzung

$$\left| s' - \int_{\gamma} f \, ds \right| = \left| s' - \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\|_2 \, dt \right| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Insgesamt gilt damit tatsächlich $\left| \sum_{k=1}^m |(f \circ \gamma)(u_k)| \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 - \int_{\gamma} f \, ds \right| < \varepsilon$. $\square$

Wendet man Satz 5.5 die konstante Funktion mit dem Wert 1 an, so erhält man folgende Aussage über die Approximation von Kurvenlängen durch **Polygonzuglängen**.

Folgerung 5.6 Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg in U . Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\mathcal{Z} = \{t_1, \dots, t_{m-1}\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ der Feinheit $< \delta$, dann folgt $\left| \sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 - \ell(\gamma) \right| < \varepsilon$.

Wir stellen für die Kurvenintegrale noch einige Rechenregeln zusammen.

Proposition 5.7 Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $F, G : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder. Außerdem seien γ_1, γ_2 stückweise stetig diff'bare Wege in U derart, dass $\gamma_1 + \gamma_2$ definiert ist. Dann gilt

- (i) $\int_{\gamma_1} (\lambda f + \mu g) \, ds = \lambda \int_{\gamma_1} f \, ds + \mu \int_{\gamma_1} g \, ds, \int_{\gamma_1} \langle \lambda F + \mu G, ds \rangle = \lambda \int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle + \mu \int_{\gamma_1} \langle G, ds \rangle$
- (ii) $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f \, ds = \int_{\gamma_1} f \, ds + \int_{\gamma_2} f \, ds, \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \langle F, ds \rangle = \int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle + \int_{\gamma_2} \langle F, ds \rangle$
- (iii) $\int_{-\gamma_1} f \, ds = \int_{\gamma_1} f \, ds, \int_{-\gamma_1} \langle F, ds \rangle = - \int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle.$

Beweis: zu (i) Diese beiden Gleichungen erhält man durch einfaches Einsetzen der Definitionen und Nachrechnen. Für einen vorgegebenen Weg $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} (\lambda f + \mu g) \, ds &= \int_a^b (\lambda f + \mu g)(\gamma_1(t)) \|\gamma_1'(t)\|_2 \, dt = \\ \lambda \int_a^b f(\gamma_1(t)) \|\gamma_1'(t)\|_2 \, dt + \mu \int_a^b g(\gamma_1(t)) \|\gamma_1'(t)\|_2 \, dt &= \lambda \int_{\gamma_1} f \, ds + \mu \int_{\gamma_1} g \, ds. \end{aligned}$$

Eine ähnliche Rechnung ergibt dieselbe Regel für die Wegintegrale 2. Art.

zu (ii) Auch hier können wir uns beim Beweis auf Wegintegrale 1. Art beschränken. Sei $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow U$ wie angegeben. Zunächst betrachten wir den Fall $b = c$. Nach Definition der Summe zweier Wege gilt $(\gamma_1 + \gamma_2)|_{[a, b]} = \gamma_1$ und $(\gamma_1 + \gamma_2)|_{[b, d]} = \gamma_2$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f \, ds &= \int_a^d (f \circ (\gamma_1 + \gamma_2))(t) \|(\gamma_1 + \gamma_2)'(t)\|_2 \, dt = \\ &= \int_a^b (f \circ (\gamma_1 + \gamma_2))(t) \|(\gamma_1 + \gamma_2)'(t)\|_2 \, dt + \int_b^d (f \circ (\gamma_1 + \gamma_2))(t) \|(\gamma_1 + \gamma_2)'(t)\|_2 \, dt = \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma_1)(t) \|\gamma_1'(t)\|_2 \, dt + \int_b^d (f \circ \gamma_2)(t) \|\gamma_2'(t)\|_2 \, dt = \int_{\gamma_1} f \, ds + \int_{\gamma_2} f \, ds. \end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall müssen wir noch überprüfen, dass sich die Wegintegrale bei Umparametrisierung nicht ändern. Auch hier beschränken wir uns auf Wegintegrale 1. Art. Sei $r \in \mathbb{R}$ und $\tilde{\gamma}_2 : [c+r, d+r] \rightarrow U$ gegeben durch $\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(t-r)$. Dann ist $\tilde{\gamma}_2 = \gamma_2 \circ \tau$ mit der Funktion $\tau(t) = t-r$ und der Ableitung $\tau'(t) = 1$. Die eindimensionale Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}_2} f \, ds &= \int_{c+r}^{d+r} (f \circ \tilde{\gamma}_2)(t) \|\tilde{\gamma}_2'(t)\| \, dt = \int_{c+r}^{d+r} (f \circ \gamma_2 \circ \tau)(t) \|(\gamma_2 \circ \tau)'(t)\| \, dt = \\ &= \int_{c+r}^{d+r} (f \circ \gamma_2 \circ \tau)(t) \|\gamma_2'(\tau(t))\| \tau'(t) \, dt = \int_{\tau(c+r)}^{\tau(d+r)} (f \circ \gamma_2)(t) \|\gamma_2'(t)\| \, dt = \int_c^d (f \circ \gamma_2)(t) \|\gamma_2'(t)\| \, dt = \int_{\gamma_2} f \, ds. \end{aligned}$$

zu (iii) Nach Definition gilt $(-\gamma_1)(t) = (\gamma_1 \circ \iota)(t)$ mit der Substitutionsfunktion $\iota(t) = a+b-t$, deren Ableitung den konstanten Wert -1 hat. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma_1} f \, ds &= \int_a^b (f \circ (-\gamma_1))(t) \|(-\gamma_1)'(t)\|_2 \, dt = \int_a^b (f \circ \gamma_1 \circ \iota)(t) \|(\gamma_1 \circ \iota)'(t)\|_2 \, dt = \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma_1 \circ \iota)(t) \|\gamma_1'(\iota(t))\|_2 \iota'(t) \, dt = \int_{\iota(a)}^{\iota(b)} (f \circ \gamma_1)(t) \|\gamma_1'(t)\|_2 \, dt \\ &= - \int_b^a (f \circ \gamma_1)(t) \|\gamma_1'(t)\|_2 \, dt = \int_a^b (f \circ \gamma_1)(t) \|\gamma_1'(t)\|_2 \, dt = \int_{\gamma_1} f \, ds. \end{aligned}$$

Für die Wegintegrale 2. Art erhalten wir entsprechend

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma_1} \langle F, ds \rangle &= \int_a^b \langle (F \circ (-\gamma_1))(t), (-\gamma_1)'(t) \rangle \, dt = - \int_a^b \langle (F \circ \gamma_1 \circ \iota)(t), (\gamma_1 \circ \iota)'(t) \rangle \iota'(t) \, dt = \\ &= - \int_a^b \langle (F \circ \gamma_1 \circ \iota)(t), \iota'(t) \gamma_1'(\iota(t)) \rangle \iota'(t) \, dt = \int_a^b \langle (F \circ \gamma_1 \circ \iota)(t), \gamma_1'(\iota(t)) \rangle \iota'(t) \, dt = \\ &= \int_{\iota(a)}^{\iota(b)} \langle (F \circ \gamma_1)(t), \gamma_1'(t) \rangle \, dt = \int_b^a \langle (F \circ \gamma_1)(t), \gamma_1'(t) \rangle \, dt = - \int_a^b \langle (F \circ \gamma_1)(t), \gamma_1'(t) \rangle \, dt = - \int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle. \end{aligned}$$

□

Im Allgemeinen sind Wegintegrale 2. Art zwischen zwei Punkten p und q abhängig vom Weg, der von p nach q gewählt wird. Ist beispielsweise $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch $F(x, y) = (x + y, y^2)$ und sind die Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ von $p = (0, 0)$ nach $q = (1, 1)$ gegeben durch $\gamma_1 = [p, q]$ und $\gamma_2 = [p, (1, 0)] + [(1, 0), q]$, dann erhält man einerseits

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle &= \int_0^1 \langle F((1-t)p + tq), q - p \rangle dt = \int_0^1 \langle F(t, t), (1, 0) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (2t + t^2) dt = \left[t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

andererseits aber

$$\begin{aligned} [p, (1, 0)] + [(1, 0), q] \int_{\gamma_2} \langle F, ds \rangle &= \int_{[p, (1, 0)]} \langle F, ds \rangle + \int_{[(1, 0), q]} \langle F, ds \rangle = \\ &= \int_0^1 \langle F((1-t)p + t(1, 0)), (1, 0) - p \rangle dt + \int_0^1 \langle F((1-t)(1, 0) + tq), q - (1, 0) \rangle dt = \\ &= \int_0^1 \langle F(t, 0), (1, 0) \rangle dt + \int_0^1 \langle F(1, t), (0, 1) \rangle dt = \int_0^1 t dt + \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Bei Wegintegralen 1. Art ist die Wegabhängigkeit auch ohne Rechnung offensichtlich. Wenn beispielsweise eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in x -Richtung zunimmt, dann ist klar, dass das Integral über einen weiter rechts verlaufenden Weg im Allgemeinen größer sein wird. Selbst bei konstantem f ist das Integral wegabhängig; in diesem Fall ist es nämlich proportional zur Kurvenlänge.

Definition 5.8 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Dann wird das Vektorfeld $\nabla u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$(\nabla u)(p) = \begin{pmatrix} \partial_1 u(p) \\ \vdots \\ \partial_n u(p) \end{pmatrix}$$

der **Gradient** von u genannt. Ein Vektorfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **konservativ**, wenn eine differenzierbare Funktion $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F = \nabla u$ existiert.

Der Gradient einer (total) differenzierbaren Funktion $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt folgende geometrische Eigenschaft: Für jedes $p \in U$ mit zeigt der Vektor $(\nabla u)(p)$, sofern er ungleich null ist, in die Richtung des stärksten Anstiegs, ist also ein positives Vielfaches des Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$, für den die Richtungsableitung $(\partial_v u)(p)$ größten positiven Wert annimmt. Die Länge $\|(\nabla u)(p)\|$ gibt die Größe dieses maximalen Anstiegs an. Setzen wir nämlich $v = \|(\nabla u)(p)\|_2^{-1} (\nabla u)(p)$, und ist $w \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor der Länge 1, dann gilt

$$(\partial_w u)(p) = u'(p)(w) = \sum_{k=1}^n w_k u'(p)(e_k) = \sum_{k=1}^n w_k (\partial_k u)(p) = \langle w, (\nabla u)(p) \rangle = \|(\nabla u)(p)\|_2 \langle w, v \rangle.$$

Das Skalarprodukt $\langle w, v \rangle$ nimmt den maximalen Wert 1 genau dann an, wenn $w = v$ ist. Setzt man diesen Vektor in die Gleichung ein, so erhält man $(\partial_v u)(p) = \|(\nabla u)(p)\|_2$.

Ist $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, so sagt man, dass Wegintegrale 2. Art über F **wegunabhängig** sind, wenn für alle Punkte $p, q \in G$ für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg γ von p nach q das Integral $\int_\gamma \langle F, ds \rangle$ jeweils denselben Wert hat.

Satz 5.9 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Genau dann sind Wegintegrale 2. Art über F wegunabhängig, wenn F konservativ ist.

Beweis: „ $\Leftarrow$ “ Nehmen wir an, dass eine stetig differenzierbare Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F = \nabla u$ existiert. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg von p nach q . Da die totale Ableitung von u lediglich der als Zeilenvektor geschriebene Gradient ist, gilt $\langle (\nabla u)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = u'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ für alle $t \in [a, b]$. Wenden wir außerdem die mehrdimensionale Kettenregel an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_\gamma \langle F, ds \rangle &= \int_a^b \langle (F \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle (\nabla u)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b u'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \int_a^b (u \circ \gamma)'(t) dt = [(u \circ \gamma)(t)]_a^b = (u \circ \gamma)(b) - (u \circ \gamma)(a) = u(q) - u(p). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass der Wert des Integrals nur von den Endpunkte p und q des Weges abhängt.

„ $\Rightarrow$ “ Nach Voraussetzung ist das Kurvenintegral 2. Art von F zwischen je zwei Punkten wegunabhängig. Sei $p_0 \in G$ ein beliebig gewählter Punkt. Für jedes $p \in G$ sei γ_p ein stückweise stetig differenzierbarer Weg von p_0 nach p in G , und wir definieren eine Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ durch $u = \int_{\gamma_p} \langle F, ds \rangle$.

Sei nun $p \in G$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$. Für alle $\tau \in \mathbb{R}$ mit hinreichend kleinem Betrag die Verbindungsstrecke $[p, p + t_1 v]$ vollständig in G enthalten. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ definiert durch $\gamma(t) = p + t\tau v$. Auf Grund der Wegunabhängigkeit ist das Kurvenintegral über γ gleich der Differenz $\gamma_{p+\tau v} - \gamma_p$. Damit erhalten wir

$$u(p + \tau v) - u(p) = \int_\gamma \langle F, ds \rangle = \int_0^1 \langle F(p + t\tau v), \tau v \rangle dt = \tau \int_0^1 \langle F(p + t\tau v), v \rangle dt.$$

Daraus wiederum folgt $\frac{1}{\tau} (u(p + \tau v) - u(p)) = \int_0^1 \langle F(p + t\tau v), v \rangle dt$. Lassen wir τ gegen null laufen, dann konvergiert der Ausdruck unter dem Integralzeichen auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion $t \mapsto \langle F(p + t\tau v), v \rangle$ gleichmäßig gegen $\langle F(p), v \rangle$, und somit konvergiert das Integral wegen Lemma 4.14 gegen denselben Wert. Die Gleichung zeigt somit, dass die Richtungsableitung von u bezüglich v existiert und mit $\langle F(p), v \rangle$ übereinstimmt. Setzen wir für v die Einheitsvektoren ein, so erhalten wir $\partial_k u(p) = F_k(p)$ für $1 \leq k \leq n$. Damit ist insgesamt gezeigt, dass $\nabla u = F$ gilt. $\square$

Auf Grund der formalen Ähnlichkeit werfen wir auch hier bereits einen kurzen Blick auf die Definition der komplexen Kurvenintegrale. Diese werden im zweiten Teil der Vorlesung, der Funktionentheorie, eine Hauptrolle spielen.

Definition 5.10 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $f = g + ih$ die Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil. Dies bedeutet, dass es sich bei g und h um reellwertige Funktionen auf U handelt, die $f(z) = g(z) + ih(z)$ für alle $z \in U$ erfüllen. Außerdem sei $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann ist das **komplexe Kurvenintegral** von f über γ definiert durch

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t) dt + i \int_a^b h(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$, dann gilt $\int_{\gamma} f dz = F(b) - F(a)$. Dabei bedeutet „Stammfunktion“ in diesem Zusammenhang, dass die Zerlegung $F = G + iH$ von F in Real- und Imaginärteil die Bedingung $G'(t) + iH'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$ für alle $t \in [a, b]$ erfüllt. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $a = \operatorname{Re}(\lambda)$ und $b = \operatorname{Im}(\lambda)$ ist $F(t) = e^{\lambda t}$ beispielsweise eine Stammfunktion von $f(t) = \lambda e^{\lambda t}$. Denn die Zerlegung von F in Real- und Imaginärteil ist wegen

$$F(t) = e^{\lambda t} = e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt} = e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))$$

gegeben durch $F(t) = G(t) + iH(t)$ mit $G(t) = e^{at} \cos(bt)$ und $H(t) = e^{at} \sin(bt)$, und es ist

$$\begin{aligned} G'(t) + iH'(t) &= ae^{at} \cos(bt) - be^{at} \sin(bt) + iae^{at} \sin(bt) + ibe^{at} \cos(bt) = \\ e^{at}(a + ib)\cos(bt) + ie^{at}(a + ib)\sin(bt) &= e^{at}(a + ib)(\cos(bt) + i\sin(bt)) = \\ e^{at}(a + ib)e^{ibt} &= (a + ib)e^{(a+ib)t} = \lambda e^{\lambda t} = f(t). \end{aligned}$$

Wir demonstrieren die Berechnung komplexer Kurvenintegrale anhand zweier Beispiele. Es ein $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = e^{it}$; dies ist der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreis in der komplexen Ebene. Es ist $\gamma'(t) = ie^{it}$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Damit erhalten wir für die Funktion $f(z) = z^2$ beispielsweise

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f dz &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} f(e^{it})ie^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} (e^{it})^2 e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{2it} \cdot e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{3it} dt = i \left[\frac{1}{3it} e^{3it} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{3} (e^{12it} - e^0) = \frac{1}{3} (1 - 1) = 0, \end{aligned}$$

für die Funktion $g(z) = \frac{1}{z}$ andererseits

$$\int_{\gamma} g dz = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i dt = [it]_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

Wenden wir uns nun den Flächenintegralen zu.

Definition 5.11 Eine **parameterisierte C^1 -Fläche** ist ein Paar (A, ϕ) bestehend aus einer kompakten, zusammenhängenden, Jordan-messbaren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und einer injektiven C^1 -Abbildung $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $\operatorname{rg} \phi'(p) = 2$ für alle $p \in A$ gilt.

Die Bildmenge $\phi(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ wird die **Spur** der parametrisierten Fläche genannt.

Definition 5.12 Seien (A, ϕ) und (B, ψ) zwei parametrisierte $\mathcal{C}^1$ -Flächen mit derselben Spur. Eine **Parametertransformation** zwischen (A, ϕ) und (B, ψ) ist ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus $\rho : A \rightarrow B$ mit $\psi \circ \rho = \phi$. Gilt $\det \rho'(p) > 0$ für alle $p \in A$, dann nennt man ρ **orientierungserhaltend**. Ansonsten gilt $\det \rho'(p) < 0$ für alle $p \in A$, und man bezeichnet ρ als **orientierungsumkehrend**.

In der Analysis mehrerer Variablen hatten wir die d -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten als Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert. Hiermit besteht der folgende Zusammenhang.

Satz 5.13 Für eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) Die Teilmenge S ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.
- (ii) Für jeden Punkt $q \in S$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine parametrisierte $\mathcal{C}^1$ -Fläche (A, ϕ) mit $\phi(A^\circ) = S \cap U$.

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Sei $q \in S$. Nach Definition der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten existiert eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^3$ von q und eine $\mathcal{C}^1$ -Abbildung $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f'(q) \neq 0$ gilt und $S \cap V = \{y \in V \mid f(y) = 0\}$ erfüllt ist. Die Ableitung $f'(q)$ im Punkt q ist ein Element ungleich null des Vektorraums $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, dass wir durch zwei weitere Elemente λ_1, λ_2 zu einer Basis von $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ergänzen können. Wir betrachten nun die Abbildung $\hat{f} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\hat{f}(y) = (\lambda_1(y) - \lambda_1(q), \lambda_2(y) - \lambda_2(q), f(y))$. Die Ableitung von $\hat{f}$ im Punkt q hat die Komponenten λ_1, λ_2 und $f'(q)$. Somit ist $\hat{f}'(q)$ eine bijektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, und wir können den Satz über die lokale Umkehrbarkeit aus der Analysis mehrerer Variablen anwenden. Demnach ist $\hat{f}$ nach eventueller Verkleinerung von V ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus auf seine Bildmenge $\hat{U} = \hat{f}(V)$, und es gilt $\hat{f}(q) = (0, 0)$. Sei $\hat{g} : \hat{U} \rightarrow V$ die Umkehrabbildung. Außerdem definieren wir

$$U = \{(x_1, x_2) \mid (x_1, \dots, x_2, 0) \in \hat{U}\}$$

sowie die Abbildung $g : U \rightarrow V$ durch $g(x_1, x_2) = \hat{g}(x_1, x_2, 0)$. Als Urbild von $\hat{U}$ unter der injektiven linearen Abbildung $\iota : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, 0)$ ist U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Offenbar ist mit $\hat{g}$ auch die Abbildung g eine injektive und stetige $\mathcal{C}^1$ -Abbildung. Für jedes $x \in U$ gilt auf Grund der Kettenregel $g'(x) = (\hat{g} \circ \iota)'(x) = \hat{g}'(\iota(x)) \circ \iota$; dies zeigt, dass $g'(x)$ für alle $x \in U$ als Komposition injektiver linearer Abbildungen selbst injektiv ist. Um zu zeigen, dass durch g ein Homöomorphismus zwischen U und $S \cap V$ definiert ist, beweisen wir

- (a) Es gilt $g(U) = S \cap V$, d.h. g ist eine Bijektion zwischen U und $S \cap V$.
- (b) Die Umkehrabbildung $h : S \cap V \rightarrow U$ von g ist gegeben durch $h(y) = (\lambda_1(y) - \lambda_1(q), \lambda_2(y) - \lambda_2(q))$.
(Diese Abbildung ist offenbar stetig.)

zu (a) „ $\subseteq$ “ Sei $y \in g(U)$ und $x \in U$ mit $g(x) = y$. Dann ist $y = g(x) = \hat{g}(x_1, x_2, 0)$ wegen $g(\hat{U}) = V$ in V enthalten. Die Gleichung

$$(\lambda_1(y) - \lambda_1(q), \lambda_2(y) - \lambda_2(q), f(y)) = \hat{f}(y) = \hat{f}(g(x_1, x_2)) = \hat{f}(\hat{g}(x_1, x_2, 0)) = (x_1, x_2, 0)$$

zeigt, dass $f(y) = 0$ gilt und y somit in $S \cap V$ liegt. „ $\supseteq$ “ Sei $y \in S \cap V$. Wegen $\hat{g}(\hat{U}) = V$ gibt es ein $x \in \hat{U}$ mit $\hat{g}(x) = y$, was zu $\hat{f}(y) = x$ äquivalent ist. Wegen $y \in S \cap V$ folgt $x_3 = \hat{f}_3(y) = f(y) = 0$. Daraus wiederum folgt $y = \hat{g}(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2) \in g(U)$.

zu (b) Sei $y \in S \cap V$ vorgegeben. Es genügt zu zeigen, dass $g(\lambda_1(y) - \lambda_1(q), \lambda_2(y) - \lambda_2(q)) = y$ gilt. Aber diese Gleichung ist äquivalent zu $\hat{g}(\lambda_1(y) - \lambda_1(q), \lambda_2(y) - \lambda_2(q), 0) = y$, und weil $\hat{f}$ die Umkehrabbildung von $\hat{g}$ ist, ist dies äquivalent zu

$$\hat{f}(y) = (\lambda_1(y) - \lambda_1(q), \lambda_2(y) - \lambda_2(q), 0, 0) = (\lambda_1(y) - \lambda_1(q), \lambda_2(y) - \lambda_2(q), f(y)).$$

Diese Gleichung ist auf Grund der Definition von $\hat{f}$ erfüllt. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass für den Punkt q die Aussage (ii) des Satzes mit $\varphi = g$ erfüllt ist.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)“ Sei $q \in S$ vorgegeben. Auf Grund der Voraussetzung gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von q , eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine $\mathcal{C}^1$ -Abbildung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ derart, dass $\varphi'(x)$ für alle $x \in U$ injektiv ist und dass φ einen Homöomorphismus zwischen U und $\varphi(U) = S \cap V$ definiert. Sei $p \in U$ der eindeutig bestimmte Punkt mit $\varphi(p) = q$. Auf Grund der Injektivität von $\varphi'(p)$ sind die Vektoren $v_1 = \varphi'(p)(e_1)$ und $v_2 = \varphi'(p)(e_2)$ linear unabhängig. Wir ergänzen diese durch v_3 zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$, setzen $\hat{U} = U \times \mathbb{R}$ und definieren $\hat{\varphi} : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\hat{\varphi}(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2) + x_3 v_3.$$

Dann gilt $\hat{\varphi}'(p, 0)(e_i) = v_i$ für $1 \leq i \leq 3$; wegen der Basis-Eigenschaft von (v_1, v_2, v_3) ist $\hat{\varphi}'(p, 0)$ also invertierbar. Auf Grund des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit ist durch $\hat{\varphi}$ nach eventueller Verkleinerung von $\hat{U}$ und V ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus zwischen $\hat{U}$ und $V = \hat{\varphi}(\hat{U})$ gegeben. Sei nun $\psi : V \rightarrow \hat{U}$ die Umkehrabbildung von $\hat{\varphi}$, $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die letzte Koordinate und $f = \pi \circ \psi$. Dann ist f offenbar eine $\mathcal{C}^1$ -Abbildung. Auf Grund der Kettenregel gilt $f'(q) = (\pi \circ \psi)'(q) = \pi'(\psi(q)) \circ \psi'(q) = \pi \circ \psi'(q)$. Da es sich bei ψ um einen $\mathcal{C}^r$ -Diffeomorphismus handelt, ist $\psi'(q)$ eine bijektive lineare Abbildung. Als Komposition zweier surjektiver linearer Abbildung ist $f'(q)$ somit surjektiv. Für den Nachweis, dass S in der offenen Umgebung V die Bedingung für eine $\mathcal{C}^1$ -Untermannigfaltigkeit der $\mathbb{R}^3$ erfüllt, müssen wir nur noch die Gleichung

$$S \cap V = \{y \in V \mid f(y) = 0\}$$

überprüfen. Sei dazu $y \in V$ vorgegeben. Nach Definition ist $f(y) = 0$ äquivalent zu $(\pi \circ \psi)(y) = 0$, und dies wiederum ist gleichbedeutend damit, dass die letzte Komponente von $\hat{x} = \psi(y)$ gleich null sind. Wegen $y = \hat{\varphi}(\hat{x})$ ist dies auf Grund der Definition von $\hat{\varphi}$ wiederum äquivalent dazu, dass $y = \varphi(x)$ für ein $x \in U$ gilt. Wegen $\varphi(U) = S \cap V$ ist dies schließlich äquivalent zu $y \in S \cap V$. $\square$

Satz 5.14 Zwischen zwei parametrisierten $\mathcal{C}^1$ -Flächen mit derselben Spur existiert entweder eine orientierungserhaltende oder eine orientierungsumkehrende Parametertransformation.

Auch diese Aussage kann mit Hilfe des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit bewiesen werden. Einen Beweis findet man z.B. in [Hi], Prop. 2 auf S. 441.

Definition 5.15 Sei (B, ϕ) eine parameterisierte $\mathcal{C}^1$ -Fläche mit kompaktem Definitionsbereich B , $f : \phi(B) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : \phi(B) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld auf B . Dann wird das Integral

$$\int_{(B, \phi)} f \, dA = \int_B (f \circ \phi)(x, y) \|\phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2)\| \, d(x, y)$$

ein Flächenintegral 1. Art und das Integral

$$\int_{(B, \phi)} \langle F, dA \rangle = \int_B \langle (F \circ \phi)(x, y), \phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2) \rangle \, d(x, y)$$

ein Flächenintegral 2. Art genannt. Insbesondere bezeichnet man $v_2((B, \phi)) = \int_{(B, \phi)} 1 \, dA$ als **Inhalt** der parametrisierten $\mathcal{C}^1$ -Fläche.

Das in der Definition auf tretende Kreuzprodukt ist aus der Schulmathematik bekannt. Wir wiederholen an dieser Stelle einige Grundlagen dazu, wobei für uns vor allem die geometrische Interpretation wichtig ist.

Definition 5.16 Das **Kreuzprodukt** zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt besitzt die folgenden Eigenschaften.

Proposition 5.17 Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, $T \in \mathcal{M}_{3, \mathbb{R}}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- (i) $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$, $(\lambda v) \times w = v \times (\lambda w) = \lambda(v \times w)$, $w \times v = -v \times w$
- (ii) $\langle v, v \times w \rangle = \langle w, v \times w \rangle = 0$
- (iii) $\langle u, v \times w \rangle = \det(u, v, w)$
- (iv) $v \times w = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \{v, w\}$ ist linear abhängig

Dabei bezeichnet $\det(u, v, w)$ die Determinante der 3×3 -Matrix mit u, v, w als Spaltenvektoren.

Man bezeichnet die Zahl unter (iii) auch als **Spatprodukt** der Vektoren u, v und w .

Beweis: Sämtliche Gleichungen unter (i) bis (iii) können durch einfaches Nachrechnen überprüft werden. Für die Richtung „ $\Leftarrow$ “ unter (iv) verwendet man, dass $\{v, w\}$ genau dann linear abhängig ist, wenn $v = 0_{\mathbb{R}^3}$ oder $w = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Im ersten Fall folgt $v \times w = (0v) \times w = 0(v \times w) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Auf Grund der letzten Gleichung unter (i) muss $v \times v = 0_{\mathbb{R}^3}$ gelten, so dass man im zweiten Fall ebenfalls $v \times w = v \times (\lambda v) = \lambda(v \times v) = \lambda 0_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathbb{R}^3}$ erhält. Für die Richtung „ $\Rightarrow$ “ nehmen wir an, dass $\{v, w\}$ linear unabhängig ist, obwohl $v \times w = 0_{\mathbb{R}^3}$ gilt. Wir können dann $\{v, w\}$

durch eine Vektor u zu einer Basis $\{u, v, w\}$ ergänzen. Es ist dann $\det(u, v, w) \neq 0$. Mit (iii) erhalten wir andererseits $\det(u, v, w) = \langle u, v \times w \rangle = \langle u, 0_{\mathbb{R}^3} \rangle = 0$, Widerspruch. $\square$

Die Länge $\|v \times w\|_2$ des Kreuzprodukts lässt sich als Flächeninhalt des von v und w aufgespannten Parallelogramms interpretieren. Ist $\{v, w\}$ linear abhängig, dann ist dies nach Teil (iv) der Proposition offensichtlich. Wir können also davon ausgehen, dass $\{v, w\}$ linear unabhängig ist und setzen $u = \|v \times w\|^{-1}(v \times w)$. Es gilt dann $u \perp v$ und $u \perp w$. Sei $A \in \mathcal{M}_{3, \mathbb{R}}$ die Matrix mit u, v, w als Spaltenvektoren. Wie aus der Linearen Algebra bekannt ist, können wir $|\det(A)|$ geometrisch als das Volumen des von u, v und w aufgespannten Parallelotops interpretieren. Weil u auf v und w senkrecht steht und $\|u\|_2 = 1$ gilt, ist dies zugleich der Flächeninhalt des von v und w aufgespannten Parallelogramms. Nach Teil (i) und (iii) der Proposition gilt

$$\|v \times w\|^2 = \langle v \times w, v \times w \rangle = \|v \times w\| \langle u, v \times w \rangle = \|v \times w\| \det(A) ,$$

woraus $\det(A) > 0$ und $|\det(A)| = \det(A) = \|v \times w\|$ folgt.

Mit Hilfe dieser Grundlagen können wir nun genauer darauf eingehen, wie Flächenintegrale 1. Art geometrisch zu interpretieren sind. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass der Parameterbereich B der Fläche ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$ ist. Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von B , $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ und a_K die linke untere Ecke des Teilquaders K . In der Nähe von a_K kann die Parameterabbildung ϕ auf Grund der Differenzierbarkeit durch die affin-lineare Abbildung

$$\phi_K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 , \quad x \mapsto \phi(a_K) + \phi'(a_K)(x - a_K)$$

interpretiert werden. Ist die Zerlegung $\mathcal{Z}$ hinreichend fein gewählt, dann gilt insbesondere $\phi(x) \approx \phi_K(x)$ für alle $x \in K$. Bezeichnen $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^+$ die Seitenlängen des Rechtecks K , dann ist $K = a_K + [0, \ell_1] \times [0, \ell_2]$, und es ist

$$\phi_K(K) = \{ \phi(a_K) + \lambda_1 \phi'(a_K)(e_1) + \lambda_2 \phi'(a_K)(e_2) \mid \lambda_i \in [0, \ell_i] \text{ für } i = 1, 2 \} .$$

Dies ist ein von den Vektoren $\ell_1 \phi'(a_K)(e_1) \times \ell_2 \phi'(a_K)(e_2)$ aufgespanntes Parallelogramm, und auf Grund unserer Vorüberlegungen hat dieses Parallelogramm einen Flächeninhalt gegeben durch $\ell_1 \ell_2 \|\phi'(a_K)(e_1) \times \phi'(a_K)(e_2)\| = v_2(K) \|\phi'(a_K)(e_1) \times \phi'(a_K)(e_2)\|$. Unsere bisherige Überlegung zeigt also, dass der Ausdruck

$$\|\phi'(a_K)(e_1) \times \phi'(a_K)(e_2)\| \cdot v_2(K)$$

in guter Näherung den **Flächeninhalt der Bildmenge** $\phi(K)$ angibt.

Proposition 5.18 Sei (Q, ϕ) eine parametrisierte $\mathcal{C}^1$ -Fläche mit einem kompakten Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ als Definitionsbereich, und sei $f : \phi(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q mit Feinheit $\delta(\mathcal{Z}) < \delta$, $a_K \in K$ für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ ein beliebig gewählter Punkt und $p_K = \phi(a_K)$, dann gilt jeweils

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} f(p_K) \cdot \|\phi'(a_K)(e_1) \times \phi'(a_K)(e_2)\| \cdot v_2(K) - \int_{(Q, \phi)} f \, dA \right| < \varepsilon .$$

Beweis: Dies folgt direkt aus Satz 4.18, denn die Summe links ist eine Riemannsche Summe der Funktion $(x, y) \mapsto (f \circ \phi)(x, y) \|\phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2)\|$ bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}$. $\square$

Das Flächenintegral 1. Art kann also beliebig gut approximiert werden, indem man eine hinreichend feine Zerlegung $\mathcal{Z}$ des Quaders Q bildet, für jeden Teilquader $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ die Funktion f in einem beliebigen Punkt von $\phi(K)$ auswertet, mit dem Flächeninhalt von $\phi(K)$ multipliziert und dann über alle K summiert.

Wir berechnen nun eine Reihe konkreter Beispiele für Flächeninhalte.

1. Beispiel: Mantelfläche des Zylinders

Wir betrachten einen Zylinder der Höhe h mit dem Grundflächenradius R gegeben durch $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Unser Ziel ist die Bestimmung des Inhalts der Mantelfläche $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 = r^2\}$. Durch die Abbildung $\phi : B \rightarrow M, (z, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z)$ mit dem Definitionsbereich $B = [0, h] \times [0, 2\pi]$ ist eine Parametrisierung dieser Fläche gegeben. Die totale Ableitung der Parametrisierungsabbildung ist in jedem Punkt $(z, \varphi) \in B$ jeweils gegeben durch

$$\phi'(z, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -r \sin(\varphi) \\ 0 & r \cos(\varphi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt somit jeweils

$$\phi'(z, \varphi)(e_1) \times \phi'(z, \varphi)(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cos(\varphi) \\ -r \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\|\phi'(z, \varphi)(e_1) \times \phi'(z, \varphi)(e_2)\|_2^2 = (-r \cos(\varphi))^2 + (-r \sin(\varphi))^2 = r^2$ ist dies jeweils ein Vektor der Länge r . Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} v_2(M) &= \int_{(B, \phi)} 1 \, dA = \int_B \|\phi'(z, \varphi)(e_1) \times \phi'(z, \varphi)(e_2)\|_2 \, d(z, \varphi) \\ &= \int_B r \, d(z, \varphi) = r \cdot v_2(B) = r \cdot 2\pi h = 2\pi r \cdot h. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt ist also gleich dem Zylinderumfang multipliziert mit der Höhe.

2. Beispiel: Mantelfläche eines Kegelstumpfes

Diesmal betrachten wir einen sich ja oben verjüngenden Kegelstumpf der Höhe h , dessen Bodenfläche den Radius R und dessen Deckfläche den Radius r besitzt, mit $r < R$. Als Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist dieser Kegelstumpf gegeben durch $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq r(z)^2\}$, wobei der Radius der Schnittfläche in Höhe z durch $r(z) = R - sz$ mit $s = \frac{R-r}{h}$ angegeben wird. Wir werden nun zeigen, dass die Mantelfläche

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 = r(z)^2\}$$

den Inhalt $(R + r)\pi m$ besitzt, wobei m die Länge der Mantellinie bezeichnet. Eine Parameterisierung erhalten wir diesmal durch $\phi : B \rightarrow M, (z, \varphi) \mapsto (r(z) \cos(\varphi), r(z) \sin(\varphi), z)$ auf dem Definitionsbereich $B = [0, h] \times [0, 2\pi]$. Dies hat die totale Ableitung

$$\phi'(z, \varphi) = \begin{pmatrix} r'(z) \cos(\varphi) & -r(z) \sin(\varphi) \\ r'(z) \sin(\varphi) & r(z) \cos(\varphi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \cos(\varphi) & -r(z) \sin(\varphi) \\ -s \sin(\varphi) & r(z) \cos(\varphi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für das Kreuzprodukt erhalten wir

$$\phi'(z, \varphi)(e_1) \times \phi'(z, \varphi)(e_2) = \begin{pmatrix} -s \cos(\varphi) \\ -s \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r(z) \sin(\varphi) \\ r(z) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r(z) \cos(\varphi) \\ -r(z) \sin(\varphi) \\ -sr(z) \end{pmatrix} = -r(z) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ s \end{pmatrix},$$

und dies ist ein Vektor der Länge $r(z)\sqrt{1+s^2}$. Der Flächeninhalt ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} v_2(M) &= \int_{(B, \varphi)} 1 \, dA = \int_B \|\phi'(z, \varphi)(e_1) \times \phi'(z, \varphi)(e_2)\|_2 \, dz \\ &= \int_{[0, h] \times [0, 2\pi]} r(z) \sqrt{1+s^2} \, d(z, \varphi) = 2\pi \sqrt{1+s^2} \int_0^h r(z) \, dz = 2\pi \sqrt{1+s^2} \int_0^h (R-sz) \, dz \\ &= 2\pi \left[R - \frac{1}{2}sz^2 \right]_0^h = 2\pi \sqrt{1+s^2} (Rh - \frac{1}{2}sh^2). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass dieses Ergebnis mit der oben angegebenen Formel übereinstimmt. Die Mantellinie m des Kegelstumpfes ist offenbar die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten der Längen h und $R-r$. Dabei läuft die erste Kathete vom Rand des Deckels des Kegelstumpfes senkrecht hinunter zur Bodenfläche, und die zweite Kathete verläuft vom Fußpunkt der ersten Kathete zum Rand der Bodenfläche. Auf Grund des Satzes des Pythagoras gilt $h = \sqrt{m^2 - (R-r)^2}$. Es gilt nun

$$\sqrt{1+s^2} = \sqrt{1 + \frac{(R-r)^2}{m^2 - (R-r)^2}} = \sqrt{\frac{m^2}{m^2 - (R-r)^2}}$$

und

$$\begin{aligned} Rh - \frac{1}{2}sh^2 &= h(R - \frac{1}{2}sh) = h \left(R - \frac{1}{2} \frac{R-r}{h} h \right) = h(R - \frac{1}{2}(R-r)) = \frac{1}{2}h(R+r) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{m^2 - (R-r)^2} (R+r). \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} v_2(M) &= 2\pi \cdot \sqrt{1+s^2} \cdot (Rh - \frac{1}{2}sh^2) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m^2}{m^2 - (R-r)^2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{m^2 - (R-r)^2} (R+r) \\ &= 2\pi \cdot \sqrt{m^2} \cdot \frac{1}{2} (R+r) = (R+r)\pi m. \end{aligned}$$

3. Beispiel: Kugeloberfläche

Die Oberfläche der Kugel $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\|_2 \leq r\}$ vom Radius r wird parametrisiert durch die Abbildung $\phi : Q \rightarrow \mathbb{R}^3, (\vartheta, \varphi) \mapsto (r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), r \cos(\vartheta))$ mit dem Definitionsbereich $Q = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. In jedem Punkt (ϑ, φ) des Definitionsbereichs ist die Ableitungsmatrix gegeben durch

$$\phi'(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ -r \sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt der beiden Ableitungsvektoren ist also gegeben durch

$$\phi'(\vartheta, \varphi)(e_1) \times \phi'(\vartheta, \varphi)(e_2) = \begin{pmatrix} r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -r \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)^2 \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)^2 \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\phi'(\vartheta, \varphi)(e_1) \times \phi'(\vartheta, \varphi)(e_2)\|^2 &= \\
r^4 (\sin(\vartheta)^4 \cos(\varphi)^2 + \sin(\vartheta)^4 \sin(\varphi)^2 + \cos(\vartheta)^2 \sin(\vartheta)^2) &= r^4 (\sin(\vartheta)^4 + \cos(\vartheta)^2 \sin(\vartheta)^2) = \\
r^4 \sin(\vartheta)^2 (\cos(\vartheta)^2 + \sin(\vartheta)^2) &= r^4 \sin(\vartheta)^2
\end{aligned}$$

und somit $\|\phi'(\vartheta, \varphi)(e_1) \times \phi'(\vartheta, \varphi)(e_2)\| = r^2 \sin(\vartheta)$. Als Flächeninhalt erhält wir somit

$$\begin{aligned}
\int_{(Q, \phi)} 1 \, dA &= \int_Q \|\phi'(\vartheta, \varphi)(e_1) \times \phi'(\vartheta, \varphi)(e_2)\| \, d(\vartheta, \varphi) = \int_Q r^2 \sin(\vartheta) \, d(\vartheta, \varphi) \\
&= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} r^2 \sin(\vartheta) \, d\varphi \right) d\vartheta = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin(\vartheta) \, d\vartheta = 2\pi r^2 [-\cos(\vartheta)]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} = 4\pi r^2.
\end{aligned}$$

Wenden wir uns nun wieder den theoretischen Grundlagen der Flächenintegration zu. Die Parametrisierungen in den soeben behandelten Beispielen entsprechen nicht exakt den Vorgaben aus Definition 5.15, weil die Parametrisierungsabbildungen ϕ nicht injektiv sind. Um formal korrekt vorzugehen, muss die Fläche in mehrerer Abschnitte aufgeteilt werden, für die jeweils eine injektive Parametrisierungsabbildung existiert. Dies wird weiter unten ausgeführt. Da die Injektivität in den Beispielen aber jeweils durch Herausnahme einer Jordanschen Nullmenge aus dem Definitionsbereich hergestellt werden kann, führen unsere Berechnungen immer zum korrekten Ergebnis.

Proposition 5.19 Seien (A, ϕ) und (B, ψ) parameterisierte $\mathcal{C}^1$ -Flächen.

- (i) Existiert zwischen den beiden parametrisierten $\mathcal{C}^1$ -Flächen eine Parametertransformation, dann stimmen für jede stetige, reellwertigen Funktionen f auf $\phi(A) = \phi(B)$ die entsprechenden Flächenintegrale 1. Art überein.
- (ii) Existiert zwischen den beiden parametrisierten $\mathcal{C}^1$ -Flächen eine orientierungserhaltende Parametertransformation, dann stimmen für jedes stetige Vektorfeld F auf $\phi(A) = \phi(B)$ die entsprechenden Flächenintegrale 2. Art überein.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Beweis der zweiten Aussage. Nach Voraussetzung existiert eine offene Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $G \supseteq A$ und ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus ρ von G auf seine Bildmenge $\rho(G) \supseteq B$ mit $\psi \circ \rho = \phi$, wobei $\det \rho'(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \in A$ erfüllt ist. Auf Grund der mehrdimensionalen Kettenregel gilt jeweils $\phi'(x, y) = (\psi \circ \rho)'(x, y) = \psi'(\rho(x, y)) \circ \rho'(x, y)$. Bezeichnen wir die vier Einträge der 2×2 -Matrix $\rho'(x, y)$ mit a ,

b , c und d , so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2) &= (\psi'(\rho(x, y)) \circ \rho'(x, y))(e_1) \times (\psi'(\rho(x, y)) \circ \rho'(x, y))(e_2) = \\
&\psi'(\rho(x, y))(\rho'(x, y)(e_1)) \times \psi'(\rho(x, y))(\rho'(x, y)(e_2)) = \\
&\psi'(\rho(x, y))(ae_1 + ce_2) \times \psi'(\rho(x, y))(be_1 + de_2) = \\
&ab\psi'(\rho(x, y))(e_1) \times \psi'(\rho(x, y))(e_1) + ad\psi'(\rho(x, y))(e_1) \times \psi'(\rho(x, y))(e_2) \\
&+ bc\psi'(\rho(x, y))(e_2) \times \psi'(\rho(x, y))(e_1) + cd\psi'(\rho(x, y))(e_2) \times \psi'(\rho(x, y))(e_2) = \\
&ad\psi'(\rho(x, y))(e_1) \times \psi'(\rho(x, y))(e_2) + bc\psi'(\rho(x, y))(e_2) \times \psi'(\rho(x, y))(e_1) = \\
&ad\psi'(\rho(x, y))(e_1) \times \psi'(\rho(x, y))(e_2) - bc\psi'(\rho(x, y))(e_1) \times \psi'(\rho(x, y))(e_2) = \\
(ad - bc) \cdot \psi'(\rho(x, y))(e_1) \times \psi'(\rho(x, y))(e_2) &= \det \rho'(x, y) \cdot \psi'(\rho(x, y))(e_1) \times \psi'(\rho(x, y))(e_2).
\end{aligned}$$

Mit dem Transformationssatz erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
\int_{(A, \phi)} \langle F, dA \rangle &= \int_A \langle (F \circ \phi)(x, y), \phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2) \rangle d(x, y) = \\
&\int_A \langle (F \circ \psi \circ \rho)(x, y), (\psi \circ \rho)'(x, y)(e_1) \times (\psi \circ \rho)'(x, y)(e_2) \rangle d(x, y) = \\
&\int_A \langle (F \circ \psi \circ \rho)(x, y), \psi'(\rho(x, y))(e_1) \times \psi'(\rho(x, y))(e_2) \rangle |\det \rho'(x, y)| d(x, y) = \\
&\int_B \langle (F \circ \psi)(x, y), \psi'(x, y)(e_1) \times \psi'(x, y)(e_2) \rangle d(x, y).
\end{aligned}$$

□

Definition 5.20 Ein **Einheitsvektorfeld** auf einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine Abbildung $\nu : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\|\nu(p)\| = 1$ für alle $p \in S$. Sei nun (S, ν) ein Paar bestehend aus einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ und einem stetigen Einheitsvektorfeld ν auf S . Eine **Parametrisierung** von (S, ν) als stückweise $\mathcal{C}^1$ -Fläche ist eine endliche Familie $((A_i, \phi_i))_{i \in I}$ parametrisierter $\mathcal{C}^1$ -Flächen mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Es gilt $S = \bigcup_{i \in I} \phi_i(A_i)$.
- (ii) Für jedes $i \in I$ existiert eine Jordansche Nullmenge $N_i \subseteq A_i$, so dass für alle $p \in A_i \setminus N_i$ jeweils $\phi'_i(p)(e_1) \times \phi'_i(p)(e_2)$ ein positives skalares Vielfaches von $\nu(\phi_i(p))$ ist.
- (iii) Für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt $\phi_i(A_i \setminus N_i) \cap \phi_j(A_j \setminus N_j) = \emptyset$.

Ein Paar (S, ν) nennen wir eine **orientierte kompakte stückweise $\mathcal{C}^1$ -Fläche**, wenn das Paar eine entsprechende Parametrisierung besitzt. Wir bezeichnen ν dann auch als **Einheitsnormalenfeld** auf S .

Ist (S, ν) eine orientierte kompakte stückweise $\mathcal{C}^1$ -Fläche, dann ist S offenbar eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Ist nämlich $((A_i, \phi_i))_{i \in I}$ eine Parametrisierung, dann ist $\phi_i(A_i)$ für jedes $i \in I$ als Bild einer kompakten Menge unter

einer stetigen Abbildung kompakt, und $S = \phi_i(A_i)$ ist als endliche Vereinigung kompakter Teilmengen wiederum kompakt. Die Paare (A_i, ϕ_i) bezeichnen wir als $\mathcal{C}^1$ -**Komponenten** von (S, ν) .

Als konkretes Beispiel für eine orientierte kompakte $\mathcal{C}^1$ -Fläche betrachten wir die Oberfläche ∂Z des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, h], x^2 + y^2 \leq r^2\}$ mit $r, h \in \mathbb{R}^+$. Ein Einheitsnormalenfeld auf ∂Z ist gegeben durch $\nu(x, y, 0) = -e_3$, $\nu(x, y, h) = e_3$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 < r^2$ und $\nu(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$ für $z \in [0, h]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Eine Parametrisierung von $(\partial Z, \nu)$ der Oberfläche setzt sich aus insgesamt vier Komponenten zusammen: Die Mantelfläche wird abgedeckt durch die beiden Parametrisierungen $\phi_1 : A_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(\varphi, z) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z)$ und $\phi_2 : A_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(\varphi, z) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z)$ mit $A_1 = [0, \pi] \times [0, h]$ und $A_2 = [\pi, 2\pi] \times [0, h]$. Zylinderboden und -deckel werden parametrisiert durch $\phi_3 : A_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (-x, y, 0)$ und $\phi_4 : A_4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x, y, h)$ mit $A_3 = A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Dabei ist das Minuszeichen in der Abbildung ϕ_3 notwendig, um sicherzustellen, dass das Kreuzprodukt $\phi_3'(x, y)(e_1) \times \phi_3'(x, y)(e_2)$ dieselbe Richtung besitzt wie der Einheitsnormalenvektor $\nu(-x, y, 0)$, und nicht die entgegengesetzte Richtung.

Definition 5.21 Sei (S, ν) eine orientierte kompakte stückweise $\mathcal{C}^1$ -Fläche, $((A_i, \phi_i))_{i \in I}$ eine Parametrisierung, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann ist das Flächenintegral 1. Art von f bzw. das Flächenintegral 2. Art von F definiert durch

$$\int_{(S, \nu)} f \, dA = \sum_{i \in I} \int_{(A_i, \phi_i)} f \, dA \quad \text{bzw.} \quad \int_{(S, \nu)} \langle F, dA \rangle = \sum_{i \in I} \int_{(A_i, \phi_i)} \langle F, dA \rangle.$$

Wir bemerken noch, dass das stetige Einheitsnormalenfeld die Darstellung von Flächenintegralen 2. Art als Summe von Flächenintegralen 1. Art ermöglicht.

Proposition 5.22 Sei (S, ν) eine orientierte kompakte stückweise $\mathcal{C}^1$ -Fläche, $((A_i, \phi_i))_{i \in I}$ eine Parametrisierung und $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann gilt für jedes $i \in I$ die Gleichung

$$\int_{(A_i, \phi_i)} \langle F, dA \rangle = \int_{(A_i, \phi_i)} F_1 \nu_1 \, dA + \int_{(A_i, \phi_i)} F_2 \nu_2 \, dA + \int_{(A_i, \phi_i)} F_3 \nu_3 \, dA.$$

Beweis: Nach Definition ist das Einheitsnormalenfeld ν in jedem Punkt von S ein positives Vielfaches des Kreuzprodukts $\phi_i'(x, y)(e_1) \times \phi_i'(x, y)(e_2)$. Es gilt also jeweils

$$\phi_i'(x, y)(e_1) \times \phi_i'(x, y)(e_2) = \|\phi_i'(x, y)(e_1) \times \phi_i'(x, y)(e_2)\|_2 \cdot (\nu \circ \phi_i)(x, y).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_{(A_i, \phi_i)} \langle F, dA \rangle &= \int_{A_i} \left\langle \begin{pmatrix} (F_1 \circ \phi_i)(x, y) \\ (F_2 \circ \phi_i)(x, y) \\ (F_3 \circ \phi_i)(x, y) \end{pmatrix}, \phi_i'(x, y)(e_1) \times \phi_i'(x, y)(e_2) \right\rangle d(x, y) = \\ &= \sum_{k=1}^3 \int_{A_i} (F_k \circ \phi_i)(x, y) (\nu_k \circ \phi_i)(x, y) \cdot \|\phi_i'(x, y)(e_1) \times \phi_i'(x, y)(e_2)\|_2 \, d(x, y) = \sum_{k=1}^3 \int_{(A_i, \phi_i)} F_k \nu_k \, dA. \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 5.23 Sei (S, ν) eine orientierte kompakte stückweise $\mathcal{C}^1$ -Fläche, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind die Integrale $\int_{(S, \nu)} f \, dA$ und $\int_{(S, \nu)} \langle F, dA \rangle$ unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Nachweis für Flächenintegrale 2. Art. Seien $((A_i, \phi_i))_{i \in I}$ und $((B_j, \psi_j))_{j \in J}$ zwei Parametrisierungen von (S, ν) . Für alle $i \in I$ und $j \in J$ sei $S_{ij} = \phi_i(A_i) \cap \psi_j(B_j)$, $A_{ij} = \phi_i^{-1}(S_{ij})$, $B_{ji} = \psi_j^{-1}(S_{ij})$, $\phi_{ij} = \phi_i|_{A_{ij}}$ und $\psi_{ji} = \psi_j|_{B_{ji}}$. Dann sind (A_{ij}, ϕ_{ij}) und (B_{ji}, ψ_{ji}) für alle $i \in I$ und $j \in J$ parametrisierte $\mathcal{C}^1$ -Flächen. Wegen $\phi_{ij}(A_{ij}) = S_{ij} = \psi_{ji}(B_{ji})$ existiert nach Satz 5.14 jeweils eine Parametertransformation $\rho_{ij} : A_{ij} \rightarrow B_{ji}$ mit $\phi_{ij} = \psi_{ji} \circ \rho_{ij}$. Sei $p \in A_{ij}$ und $q = \rho_{ij}(p) \in B_{ji}$. Wie wir im Beweis von Prop. 5.19 gesehen haben, gilt jeweils

$$\phi'_i(p)(e_1) \times \phi'_i(p)(e_2) = \det \rho'_{ij}(p) \cdot (\psi'_j(q)(e_1) \times \psi'_j(q)(e_2)).$$

Weil nach Voraussetzung sowohl $\phi'_i(p)(e_1) \times \phi'_i(p)(e_2)$ als auch $\psi'_j(q)(e_1) \times \psi'_j(q)(e_2)$ ein positives Vielfaches von $\nu(\phi_i(p)) = \nu(\psi_j(q))$ ist, muss $\det \rho'_{ij}(p) > 0$ sein, d.h. die Parametertransformationen ρ_{ij} sind alle orientierungserhaltend. Nach Prop. 5.19 folgt daraus

$$\int_{(A_{ij}, \phi_{ij})} \langle F, dA \rangle = \int_{(B_{ji}, \psi_{ji})} \langle F, dA \rangle \quad \text{für alle } i \in I \text{ und } j \in J.$$

Seien $i \in I$, $j, j' \in J$ und $N_j \subseteq B_j$, $N_{j'} \subseteq B_{j'}$ die Jordanschen Nullmengen, von denen in Definition 5.20 die Rede ist. Dann schneiden sich A_{ij} und $A_{ij'}$ höchstens in $\rho_{ij}^{-1}(B_{ji} \cap N_j) \cap \rho_{ij'}^{-1}(B_{j'i} \cap N_{j'})$. Ist nämlich $p \in A_{ij} \cap A_{ij'}$, dann muss $\phi_i(p)$ in $S_{ij} \cap S_{ij'}$ liegen. Es gibt also Punkte q in $B_{ji} \subseteq B_j$ und q' in $B_{j'i} \subseteq B_{j'}$ mit $\psi_j(q) = \phi_i(p) = \psi_{j'}(q')$. Auf Grund der Voraussetzung (iii) an Parametrisierungen folgt $q \in B_{ji} \cap N_j$ und $q' \in B_{j'i} \cap N_{j'}$. Wegen $\psi_j(q) = \phi_i(p) = \psi_{j'}(\rho_{ij'}(p))$ und der Injektivität von ψ_j folgt $q = \rho_{ij}(p)$, also gilt tatsächlich $p \in \rho_{ij}^{-1}(B_{ji} \cap N_j)$. Genauso erhält man $p \in \rho_{ij'}^{-1}(B_{j'i} \cap N_{j'})$. Nach Satz 4.4 sind die beiden Teilmengen $\rho_{ij}^{-1}(B_{ji} \cap N_j)$ und $\rho_{ij'}^{-1}(B_{j'i} \cap N_{j'})$ Jordansche Nullmengen in A_i . Deshalb gilt

$$\int_{A_i} \langle (F \circ \phi_i)(x, y), \phi'_i(x, y)(e_1) \times \phi'_i(x, y)(e_2) \rangle d(x, y) = \sum_{j \in J} \int_{A_{ij}} \langle (F \circ \phi_{ij})(x, y), \phi'_{ij}(x, y)(e_1) \times \phi'_{ij}(x, y)(e_2) \rangle d(x, y)$$

für jedes $i \in I$, und genauso erhält man

$$\int_{B_j} \langle (F \circ \psi_j)(x, y), \psi'_j(x, y)(e_1) \times \psi'_j(x, y)(e_2) \rangle d(x, y) = \sum_{i \in I} \int_{B_{ji}} \langle (F \circ \psi_{ji})(x, y), \psi'_{ji}(x, y)(e_1) \times \psi'_{ji}(x, y)(e_2) \rangle d(x, y).$$

Insgesamt erhalten wir damit das gewünschte Resultat, denn es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \int_{(A_i, \phi_i)} \langle F, dA \rangle &= \sum_{i \in I} \int_{A_i} \langle (F \circ \phi_i)(x, y), \phi'_i(x, y) \rangle = \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_{A_{ij}} \langle (F \circ \phi_{ij})(x, y), \phi'_{ij}(x, y)(e_1) \times \phi'_{ij}(x, y)(e_2) \rangle d(x, y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_{(A_{ij}, \phi_{ij})} \langle F, dA \rangle \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_{(B_{ji}, \psi_{ji})} \langle F, dA \rangle = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \int_{B_{ji}} \langle (F \circ \psi_{ji})(x, y), \psi'_{ji}(x, y)(e_1) \times \psi'_{ji}(x, y)(e_2) \rangle d(x, y) = \\ &= \sum_{j \in J} \int_{B_j} \langle (F \circ \psi_j)(x, y), \psi'_j(x, y)(e_1) \times \psi'_j(x, y)(e_2) \rangle d(x, y) = \sum_{j \in J} \int_{(B_j, \psi_j)} \langle F, dA \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Definition 5.24 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge. Wir bezeichnen einen Punkt $p \in \partial A$ als **glatten Randpunkt** von A , wenn eine offene Umgebung U von p und eine $\mathcal{C}^1$ -Abbildung $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, so dass die Bedingungen $\alpha'(p) \neq 0$ und $A \cap U = \{x \in U \mid \alpha(x) \leq 0\}$ erfüllt sind. Man bezeichnet dann $\|(\nabla \alpha)(p)\|^{-1}(\nabla \alpha)(p)$ als **äußeren Einheitsnormalenvektor** der Menge A im Randpunkt p . Ein Vektorfeld ν auf dem Rand ∂A mit der Eigenschaft, dass ν in jedem glatten Randpunkt mit einem äußeren Einheitsnormalenvektor übereinstimmt, nennen wir ein **äußeres Einheitsnormalenfeld**.

Als konkrete Beispiele werden wir unten äußere Einheitsnormalenfelder für Normalbereiche in der Ebene und im Raum angeben.

Definition 5.25 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt. Wir bezeichnen einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ als **Randkurve** von A , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und eine endliche Teilmenge $\{t_1, \dots, t_{m-1}\}$, so dass $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ stetig differenzierbar ist, wobei $t_0 = a$ und $t_m = b$ gesetzt wird.
- (ii) Es ist $\gamma([a, b]) = \partial A$, und für $t \in [a, b] \setminus \{t_0, \dots, t_m\}$ ist $\gamma(t)$ ein glatter Randpunkt von A .

Die Teilstücke $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ bezeichnen wir als **$\mathcal{C}^1$ -Randkomponenten** von A .

Kompakte Teilmengen mit einer Randkurve besitzen ein äußeres Einheitsnormalenfeld, dass sich mit Hilfe der Randkurve beschreiben lässt.

Proposition 5.26 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Randkurve von A . Dann existiert auf ∂A ein Einheitsnormalenfeld ν , dass für alle bis auf endlich viele $t \in [a, b]$ durch $\nu(\gamma(t)) = \pm \|\gamma'(t)\|^{-1}(\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))$ gegeben ist. Tritt in dieser Gleichung durchweg das Pluszeichen auf, dann sprechen wir von einer **positiv orientierten Randkurve**.

Beweis: Nach Definition existiert für alle bis auf endlich viele $t \in]a, b[$ jeweils eine offene Umgebung U von $\gamma(t)$ und eine $\mathcal{C}^1$ -Abbildung $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass die Bedingungen $\alpha'(\gamma(t)) \neq 0$ und $A \cap U = \{x \in U \mid \alpha(x) \leq 0\}$ gilt. Sei t_0 ein solcher Punkt. und $p = \gamma(t_0)$. Weil $\gamma([a, b])$ aus Randpunkten besteht, existiert ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $(\alpha \circ \gamma)(t) = 0$ für alle $t \in I$. Aus der Kettenregel folgt jeweils $\alpha'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$. Daraus folgt, dass insbesondere der Vektor $(\nabla \alpha)(p) = (\nabla \alpha)(\gamma(t_0)) = (\alpha'_1(\gamma(t_0)), \alpha'_2(\gamma(t_0)))$ auf dem Tangentialvektor $(\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0))$ senkrecht steht. Die beiden zum Tangentialvektor senkrechten Einheitsvektoren sind die Normierungen von $\pm(\gamma'_2(t_0), -\gamma'_1(t_0))$. Dies zeigt, dass einer der beiden Vektoren $\pm \|\gamma'(t_0)\|^{-1}(\gamma'_2(t_0), -\gamma'_1(t_0))$ ein äußerer Einheitsnormalenvektor ist. $\square$

Wichtige Beispiele für abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, die eine Randkurve besitzen, sind Normalbereiche mit stetig differenzierbaren Begrenzungsfunktionen. Seien $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei $\mathcal{C}^1$ -Funktionen mit $\varphi \leq \psi$. Dann kann dem Normalbereich bezüglich der y -Achse gegeben durch

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

eine Randkurve $\gamma = \gamma_- + \gamma_r + \gamma_+ + \gamma_\ell$ zugeordnet werden, indem man $\gamma_-, \gamma_+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $\gamma_-(t) = \varphi(t)$ und $\gamma_+(t) = \psi(a + b - t)$ definiert. Die Kurve $\gamma_r : [\varphi(b), \psi(b)] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definieren wir durch $\gamma_r(t) = (b, t)$, und die Kurve $\gamma_\ell : [\varphi(a), \psi(a)] \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $\gamma_\ell(t) = (a, \varphi(a) + \psi(a) - t)$. (Im Fall $\varphi(a) = \psi(a)$ betrachten wir γ_ℓ als nicht existent, ebenso die Teilkurve γ_r im Fall $\varphi(b) = \psi(b)$.) Die Definition von Randkurven von Normalbereichen bezüglich der x -Achse funktioniert auf naheliegende Weise analog. Wichtig ist, auch hier darauf zu achten, dass die Kurve den Normalbereich gegen den Uhrzeigersinn, also links herum, umläuft, denn dadurch wird die positive Orientierung sichergestellt.

Definition 5.27 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge und γ eine positiv orientierte Randkurve von A . Unter einer **Zerlegung** von A in C^1 -Normalbereiche bezüglich der x -Achse verstehen wir eine endliche Familie $N_1, \dots, N_r$ von solchen Normalbereichen mit C^1 -Begrenzungsfunktionen, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Es gilt $A = \bigcup_{i=1}^r N_i$, und für $i \neq j$ schneiden sich N_i und N_j höchstens in Randpunkten.
- (ii) Die Kurve γ und die positiv orientierten Ränder der Normalbereiche N_i können so in C^1 -Komponenten zerlegt werden, dass jede Randkomponente γ_i von einem N_i entweder mit einer solchen Komponente γ übereinstimmt, oder eine Randkomponente γ_j in einem N_j mit $j \neq i$ existiert, so dass $\gamma_j = -\gamma_i$ gilt.

Die Definition überträgt sich auf naheliegende Weise auf Normalbereiche bezüglich der y -Achse. Wir kommen nun zur Formulierung des Gauß'schen Integralsatzes in der Ebene.

Definition 5.28 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann nennt man die Funktion $\operatorname{div}(F) : U \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\operatorname{div}(F)(p) = \sum_{k=1}^n \partial_k F_k(p) \quad \text{die \textit{Divergenz} von } F.$$

Der Gauß'sche Integralsatz stellt nun einen Zusammenhang her zwischen Kurvenintegralen 2. Art von Vektorfeldern und Flächenintegralen von reellwertigen Funktionen.

Satz 5.29 (Gauß'scher Integralsatz in der Ebene)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge, die eine positiv orientierte Randkurve γ und Zerlegungen in Normalbereiche sowohl bezüglich der x - als auch bezüglich der y -Achse besitzt. Sei $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein äußeres Einheitsnormalenfeld. Dann kann die positiv orientierte Randkurve so gewählt werden, dass für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld F auf A die Gleichung

$$\int_{\gamma} \langle F, \nu \rangle ds = \int_A \operatorname{div}(F)(x, y) d(x, y) \quad \text{erfüllt ist.}$$

Beweis: Es genügt, für $k = 1, 2$ jeweils die Gleichung $\int_{\partial A} F_k \nu_k ds = \int_A \partial_k F_k(x, y) d(x, y)$ zu beweisen. Wir beweisen diese Gleichung für $k = 2$ in dem Spezialfall, dass A ein Normalbereich bezüglich der y -Achse mit $\mathcal{C}^1$ -Begrenzungsfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist. Die rechte Seite der Gleichung ist gegeben durch

$$\int_A F_2(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \partial_2 F_2(x, y) dy \right) dx = \int_a^b F_2(x, \psi(x)) dx - \int_a^b F_2(x, \varphi(x)) dx.$$

Nun bestimmen wir die linke Seite der Gleichung. Sei $\gamma = \gamma_- + \gamma_r + \gamma_+ \gamma_\ell$ die oben definierte positiv orientierte Randkurve. Es gilt $\gamma'_-(t) = (1, \varphi'(t))$, $\|\gamma'_-(t)\|_2 = \sqrt{1 + \varphi'(t)^2}$ und $(\nu \circ \gamma_-)(t) = \|\gamma'_-(t)\|_2^{-1}(\varphi'(t), -1)$ für alle $t \in]a, b[$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_-} F_2 \nu_2 ds &= \int_a^b (F_2 \nu_2 \circ \gamma_-)(t) \cdot \|\gamma'_-(t)\|_2 dt = \int_a^b F_2(t, \varphi(t)) (\nu_2 \circ \gamma_-)(t) \|\gamma'_-(t)\|_2 dt = \\ &= \int_a^b F_2(t, \varphi(t)) (-\|\gamma'_-(t)\|_2^{-1}) \|\gamma'_-(t)\|_2 dt = - \int_a^b F_2(t, \varphi(t)) dt. \end{aligned}$$

Ebenso gilt $\gamma_+(t) = (a + b - t, \psi(a + b - t))$, $\gamma'_+(t) = (-1, -\psi'(a + b - t))$, $\|\gamma'_+(t)\|_2 = \sqrt{1 + \psi'(a + b - 1)^2}$ und $(\nu \circ \gamma_+)(t) = \|\gamma'_+(t)\|_2^{-1}(-\psi'(a + b - t), 1)$ für alle $t \in]a, b[$. Daraus ergibt sich entsprechend

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_+} F_2 \nu_2 ds &= \int_a^b (F_2 \circ \nu_2 \circ \gamma_+)(t) \|\gamma'_+(t)\| dt = \int_a^b F_2(a + b - t, \psi(a + b - t)) (\nu_2 \circ \gamma_+)(t) \|\gamma'_+(t)\| dt \\ &= \int_a^b F_2(a + b - t, \psi(a + b - t)) dt = - \int_a^b F_2(a + b - t, \psi(a + b - t)) \cdot (-1) dt \\ &= - \int_b^a F_2(t, \psi(t)) dt = \int_a^b F_2(t, \psi(t)) dt. \end{aligned}$$

Für den rechten Teil der Randkurve γ_r (sofern dieser existiert) gilt $\gamma'_r(t) = (0, 1)$, $\|\gamma'_r(t)\|_2 = 1$ und $(\nu \circ \gamma_r)(t) = (1, 0)$. Daraus folgt

$$\int_{\gamma_r} F_2 \nu_2 ds = \int_a^b (F_2 \nu_2 \circ \gamma_r)(t) \|\gamma'_r(t)\|_2 dt = \int_a^b F_2(b, t) (\nu_2 \circ \gamma_r)(t) dt = \int_a^b F_2(b, t) \cdot 0 dt = 0.$$

Beim linken Teil der Randkurve γ_ℓ gilt entsprechend $\gamma'_\ell(t) = (0, -1)$, $\|\gamma'_\ell(t)\|_2 = 1$, $(\nu \circ \gamma_\ell)(t) = (-1, 0)$ und somit

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\ell} F_2 \nu_2 ds &= \int_a^b (F_2 \nu_2 \circ \gamma_\ell)(t) \cdot \|\gamma'_\ell(t)\|_2 dt = \int_a^b F_2(a, \varphi(a) + \psi(a) - t) (\nu_2 \circ \gamma_\ell)(t) dt \\ &= \int_a^b F_2(a, \varphi(a) + \psi(a) - t) \cdot 0 dt = 0. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F_2 \nu_2 ds &= \int_{\gamma_-} F_2 \nu_2 ds + \int_{\gamma_r} F_2 \nu_2 ds + \int_{\gamma_+} F_2 \nu_2 ds + \int_{\gamma_\ell} F_2 \nu_2 ds = \\ &= - \int_a^b F_2(t, \varphi(t)) dt + 0 + \int_a^b F_2(t, \psi(t)) dt + 0 = \int_a^b F_2(t, \psi(t)) dt - \int_a^b F_2(t, \varphi(t)) dt. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis der Gleichung $\int_{\partial A} F_2 \nu_2 ds = \int_A \partial_2 F_2(x, y) d(x, y)$ abgeschlossen. Ist nun A selbst kein Normalbereich dieser Form, lässt sich aber in Normalbereiche dieser Form zerlegen, so erhält man die Gleichung, indem man die Gleichung für die einzelnen Normalbereiche in der Zerlegung aufsummiert. Auf der rechten Seite erhält man als Summe wiederum $\int_A \partial_2 F_2(x, y) d(x, y)$, weil sich die Normalbereiche nur in Jordanschen Nullmengen schneiden. Auf der linken Seite führt die Summation zum Kurvenintegral $\int_{\partial A} F_2 \nu_2 ds$, weil sich diejenigen C^1 -Randkomponenten der Normalbereiche, die im Inneren von A verlaufen, sich gegenseitig wegheben und genau diejenigen übrigbleiben, die eine C^1 -Komponente von ∂A bilden. Völlig analog beweist man die Gleichung $\int_{\partial A} F_1 \nu_1 ds = \int_A \partial_1 F_1(x, y) d(x, y)$ mit Hilfe der Voraussetzung, dass A sich in Normalbereiche bezüglich der x -Achse mit C^1 -Begrenzungsfunktionen zerlegen lässt. $\square$

Unser nächstes Ziel besteht darin, den Gauß'schen Integralsatz auf den dreidimensionalen Raum zu übertragen. Dazu betrachten wir Normalbereiche bezüglich der drei Koordinatenachsen mit stetig differenzierbaren Begrenzungsfunktionen. Um den Integralsatz formulieren zu können, müssen wir den Rand solcher Normalbereiche mit der Struktur einer kompakten orientierten stückweisen C^1 -Fläche versehen.

Sei dazu $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Jordan-messbare Teilmenge, die eine positiv orientierte Randkurve $\tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt. Außerdem seien $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{R}$ zwei C^1 -Funktionen mit $\varphi \leq \psi$ und B der Normalbereich bezüglich der z -Achse gegeben durch

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}.$$

Der Rand ∂B dieses Normalbereichs besteht aus den beiden **Deckeln**

$$D^+ = \{(x, y, \psi(x, y)) \mid (x, y) \in A\}, \quad D^- = \{(x, y, \varphi(x, y)) \mid (x, y) \in A\}$$

sowie dem **Mantel** $M = \{(\tau(t), z) \mid t \in [a, b], \varphi(\tau(t)) \leq z \leq \psi(\tau(t))\}$. Sei $\mathcal{Z} = \{t_1, \dots, t_m\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit der Eigenschaft, dass $\tau|_{[t_{k-1}, t_k]}$ für $1 \leq k \leq m$ jeweils stetig differenzierbar ist. Dann können wir M in die Teilmengen $M_k = \{(\tau(t), z) \in M \mid t \in [t_{k-1}, t_k]\}$ zerlegen. Wir definieren nun auf D^+ und D^- Parametrisierungen, indem wir $\phi^+ : A \rightarrow D^+$, $(x, y) \mapsto (x, y, \psi(x, y))$ und $\phi^- : A \rightarrow D^-$, $(x, y) \mapsto (y, x, \varphi(y, x))$ setzen, wobei ${}^t A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y, x) \in A\}$ ist. (Die Vertauschung von x - und y -Koordinate beim unteren Deckel ist notwendig, damit wir einen nach außen, in diesem Fall also nach unten, gerichteten Normalenvektor erhalten.) Für die Mantelkomponenten definieren wir für $1 \leq k \leq m$ Parametrisierungen durch $\phi_k^0 : C_k \rightarrow M_k$, $(t, z) \mapsto (\tau(t), z)$ mit den Definitionsbereichen $C_k = \{(t, z) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [t_{k-1}, t_k], (\varphi \circ \tau)(t) \leq z \leq (\psi \circ \tau)(t)\}$. Dann sind (A, ϕ^+) , (A, ϕ^-) und (C_k, ϕ_k^0) für $1 \leq k \leq m$ parametrisierte C^1 -Flächen im Sinne von Definition 5.11.

Im nächsten Schritt definieren wir nun auf $\partial B = D^+ \cup D^- \cup M_1 \cup \dots \cup M_m$ ein geeignetes Einheitsnormalenfeld. Für alle $(x, y) \in B$ gilt

$$(\phi^+)'(x, y)(e_1) \times (\phi^+)'(x, y)(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 \psi(x, y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 \psi(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_1 \psi(x, y) \\ -\partial_2 \psi(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Länge dieses Vektors ist jeweils gegeben durch $\|(\phi^+)'(x, y)(e_1) \times (\phi^+)'(x, y)(e_2)\|_2 = \sqrt{1 + \|(\nabla \psi)(x, y)\|_2^2}$. Ebenso erhalten wir

$$(\phi^-)'(x, y)(e_1) \times (\phi^-)'(x, y)(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 \varphi(x, y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 \varphi(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi(x, y) \\ \partial_2 \varphi(x, y) \\ -1 \end{pmatrix},$$

einen Vektor der Länge $\|(\phi^-)'(x, y)(e_1) \times (\phi^-)'(x, y)(e_2)\|_2 = \sqrt{1 + \|(\nabla \varphi)(x, y)\|_2^2}$. Für jedes $(x, y) \in A^\circ$ definieren wir Einheitsnormalenvektoren auf D^+ und D^- durch $\nu(\phi^+(x, y)) = (1 + \|(\nabla \psi)(x, y)\|_2^2)^{-1/2} (\phi^+)'(x, y)(e_1) \times (\phi^+)'(x, y)(e_2)$ und $\nu(\phi^-(x, y)) = (1 + \|(\nabla \varphi)(x, y)\|_2^2)^{-1/2} (\phi^-)'(x, y)(e_1) \times (\phi^-)'(x, y)(e_2)$. Für $1 \leq k \leq m$ und $(t, z) \in C_k$ gilt jeweils

$$(\phi_k^0)'(t, z)(e_1) \times (\phi_k^0)'(t, z)(e_2) = \begin{pmatrix} \tau_1'(t) \\ \tau_2'(t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_2'(t) \\ -\tau_1'(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor hat jeweils die Länge $\|(\phi_k^0)'(t, z)(e_1) \times (\phi_k^0)'(t, z)(e_2)\|_2 = \|\tau'(t)\|_2$. Für alle Punkte $(t, z) \in C_k^\circ$ definieren wir einen Einheitsnormalenvektor auf M_k durch $\nu(\phi_k^0(t, z)) = \|\tau'(t)\|_2^{-1} \|(\phi_k^0)'(t, z)(e_1) \times (\phi_k^0)'(t, z)(e_2)\|_2$. Für alle Punkte $p \in \partial B$, die durch die bisherigen Definitionen noch nicht erfasst wurden (das sind die Punkte, die auf den „Deckelrändern“ und den „Knicken“ der Mantelfläche M liegen), lassen wir für $\nu(p)$ einen beliebigen normierten Vektor im $\mathbb{R}^3$ zu. Durch die Familie bestehend aus (A, ϕ^+) , (A, ϕ^-) und (C_k, ϕ_k^0) für $1 \leq k \leq m$ ist dann eine Parametrisierung der orientierten kompakten stückweisen C^1 -Fläche $(\partial A, \nu)$ im Sinne von Definition 5.20 gegeben.

In Analogie zu Definition 5.27 legen wir nun fest

Definition 5.30 Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\nu : \partial B \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektorfeld derart, dass $(\partial B, \nu)$ die Struktur einer orientierten kompakten stückweisen C^1 -Fläche besitzt. Unter einer **Zerlegung** von B in Normalbereiche bezüglich der z -Achse verstehen wir eine endliche Familie $N_1, \dots, N_r$ von Normalbereichen ausgestattet mit Einheitsnormalenfeldern $\nu_1, \dots, \nu_r$ der oben definierten Form und folgenden Eigenschaften.

- (i) Es gilt $B = \bigcup_{i=1}^r N_i$, und für $i \neq j$ schneiden sich N_i und N_j höchstens in Randpunkten.
- (ii) Die Ränder von B und den N_i können so in C^1 -Komponenten zerlegt werden, dass jede Randkomponente (A_i, ϕ_i) von N_i jeweils eine der folgenden beiden Bedingungen gilt: Entweder sie stimmt mit einer Randkomponente von B überein, und es gilt $\nu(\phi_i(p)) = \nu_i(\phi_i(p))$ für alle $p \in A_i^\circ$. Oder es gibt eine Randkomponente (A_j, ϕ_j) von einem N_j mit $j \neq i$, so dass $\phi_i(A_i) = \phi_j(A_j)$ und $\nu_j(\phi_i(p)) = -\nu_i(\phi_i(p))$ für alle $p \in A_i^\circ$ erfüllt ist.

Selbstverständlich überträgt sich die Definition wiederum auf Normalbereiche bezüglich der y - und der z -Achse.

Satz 5.31 (Gauß'scher Integralsatz im Raum)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte Teilmenge und $\nu : \partial B \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektorfeld derart, dass $(\partial B, \nu)$ die Struktur einer orientierten kompakten stückweisen $\mathcal{C}^1$ -Fläche besitzt. Außerdem setzen wir voraus, dass B eine Zerlegung in Normalbereiche bezüglich der x -Achse besitzt, und ebenso eine Zerlegung in Normalbereiche bezüglich der y -Achse und der z -Achse. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$\int_{(\partial B, \nu)} \langle F, dA \rangle = \int_B \operatorname{div}(F)(x, y, z) d(x, y, z).$$

Beweis: Der Beweis läuft weitgehend analog zum Beweis des Gauß'schen Integralsatzes in der Ebene. Auf Grund von Proposition 5.22 genügt es, für $k = 1, 2, 3$ jeweils die Gleichung

$$\int_{(\partial B, \nu)} F_k \nu_k dA = \int_B \partial_k F_k(x, y, z) d(x, y, z)$$

zu beweisen. Wir gehen zunächst davon aus, dass B ein $\mathcal{C}^1$ -Normalbereich bezüglich der z -Achse ist, mit Begrenzungsfunktionen $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{R}$, und beweisen die Gleichung für $k = 3$. Für die rechte Seite der Gleichung erhalten wir durch Anwendung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \int_B \partial_3 F_3(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_A \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \partial_3 F_3(x, y, z) dz \right) d(x, y) \\ &= \int_A (F_3(x, y, \psi(x, y)) - F_3(x, y, \varphi(x, y))) d(x, y) \end{aligned}$$

Nun berechnen wir, unter Verwendung der oben eingeführten Bezeichnungen für die Randfläche ∂B , das Integral

$$\int_{(\partial B, \nu)} F_3 \nu_3 dA = \int_{(D^+, \nu)} F_3 \nu_3 dA + \int_{(D^-, \nu)} F_3 \nu_3 dA + \int_{(M, \nu)} F_3 \nu_3 dA.$$

Auf dem oberen Deckel D^+ ist, wie wir oben ausgerechnet haben, die dritte Komponente des Einheitsnormalenfeldes gegeben durch $(\nu_3 \circ \phi^+)(x, y) = (1 + \|(\nabla \psi)(x, y)\|_2^2)^{-1/2}$, für alle $(x, y) \in A$. Andererseits gilt $\|(\phi^+)'(x, y)(e_1) \times (\phi^+)'(x, y)(e_2)\|_2 = (1 + \|(\nabla \psi)(x, y)\|_2^2)^{1/2}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{(D^+, \nu)} F_3 \nu_3 dA &= \int_A (F_3 \nu_3 \circ \phi^+)(x, y) \|(\phi^+)'(x, y)(e_1) \times (\phi^+)'(x, y)(e_2)\|_2 d(x, y) = \\ &= \int_A (F_3 \circ \phi^+)(x, y) d(x, y) = \int_A F_3(x, y, \psi(x, y)) d(x, y). \end{aligned}$$

Auf dem unteren Deckel ist die dritte Komponente des Einheitsnormalenfeldes gegeben durch $(\nu_3 \circ \phi^-)(x, y) = -(1 + \|(\nabla \varphi)(x, y)\|_2^2)^{-1/2}$, für alle $(x, y) \in A$, und es gilt $\|(\phi^-)'(x, y)(e_1) \times (\phi^-)'(x, y)(e_2)\|_2 = (1 + \|(\nabla \varphi)(x, y)\|_2^2)^{1/2}$.

Diesmal erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{(D^-, \nu)} F_3 \nu_3 dA &= \int_A (F_3 \nu_3 \circ \phi^-)(x, y) \|(\phi^-)'(x, y)(e_1) \times (\phi^-)'(x, y)(e_2)\|_2 d(x, y) = \\ &= - \int_A (F_3 \circ \phi^-)(x, y) d(x, y) = - \int_A F_3(x, y, \varphi(x, y)) d(x, y). \end{aligned}$$

Auf der Mantelfläche hat unsere Rechnung ergeben, dass die dritte Komponente des Einheitsnormalenfeldes konstant gleich null ist. Deshalb gilt $\int_{(M, \nu)} F_3 \nu_3 dA = 0$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{(\partial B, \nu)} F_3 \nu_3 dA &= \int_{(D^+, \nu)} F_3 \nu_3 dA + \int_{(D^-, \nu)} F_3 \nu_3 dA + \int_{(M, \nu)} F_3 \nu_3 dA \\ &= \int_A F_3(x, y, \psi(x, y)) d(x, y) - \int_A F_3(x, y, \varphi(x, y)) d(x, y) + 0 \\ &= \int_A (F_3(x, y, \psi(x, y)) - F_3(x, y, \varphi(x, y))) d(x, y) = \int_B \partial_3 F_3(x, y, z) d(x, y, z). \end{aligned}$$

Dieselbe Argumentation wie im Beweis des Gauß'schen Integralsatzes der Ebene zeigt, dass die Gleichung gültig bleibt, wenn B selbst kein Normalbereich bezüglich der z -Achse ist, aber eine Zerlegung in solche Normalbereiche besitzt. Nach demselben Schema beweist man die Gleichung für $k = 1$ und $k = 2$, mit dem einzigen Unterschied, dass hier Normalbereiche bezüglich der x - bzw. der y -Achse betrachtet werden. $\square$

Definition 5.32 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Die **Rotation** eines differenzierbaren Vektorfeldes $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf U ist definiert durch

$$\text{rot}(F)(p) = (\nabla \times F)(p) = \left(\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \right)(p) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3(p) - \partial_3 F_2(p) \\ \partial_3 F_1(p) - \partial_1 F_3(p) \\ \partial_1 F_2(p) - \partial_2 F_1(p) \end{pmatrix}.$$

Wir formulieren noch einen dritten Integralsatz, diesmal für Raumkurven.

Satz 5.33 (*Stokes'scher Integralsatz*)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge mit positiv orientierter Randkurve $\tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ derart, dass der Gauß'sche Integralsatz der Ebene für Vektorfelder auf A gültig ist. Sei außerdem $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche mit einer C^2 -Parametrisierungsabbildung und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Raumkurve gegeben durch $\gamma = \phi \circ \tau$. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $U \supseteq \phi(A)$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\gamma} \langle F, ds \rangle = \int_{(A, \phi)} \langle \text{rot}(F), dA \rangle.$$

Beweis: Wir formen die linke Seite der Gleichung so um, dass der Gaußsche Integralsatz der Ebene angewendet werden kann. Anschließend überprüfen wir die Übereinstimmung mit der rechten Seite. Wie zuvor bezeichnen wir mit $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein äußeres Einheitsnormalenfeld von A , das die Gleichung $\nu(\gamma(t)) = (\tau'_2(t), -\tau'_1(t))$ für alle bis auf endlich viele $t \in [a, b]$ erfüllt. Nach Definition gilt

$$\int_{\gamma} \langle F, ds \rangle = \int_a^b \langle (F \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle dt = \sum_{k=1}^3 \int_a^b (F_k \circ \gamma)(t) \gamma'_k(t) dt.$$

Für $k \in \{1, 2, 3\}$ gilt weiter

$$\begin{aligned} (F_k \circ \gamma)(t) \cdot \gamma'_k(t) &= (F_k \circ \phi \circ \tau)(t) \cdot (\phi_k \circ \tau)'(t) = (F_k \circ \phi \circ \tau)(t) \cdot \phi'_k(\tau(t)) \tau'(t) = \\ &= (F_k \circ \phi \circ \tau)(t) \cdot \left(\partial_1 \phi_k(\tau(t)) \tau'_1(t) + \partial_2 \phi_k(\tau(t)) \tau'_2(t) \right) = \\ &= (F_k \circ \phi \circ \tau)(t) \cdot (\partial_2 \phi_k(\tau(t)) \tau'_2(t) + (-\partial_1 \phi_k(\tau(t))) (-\tau'_1(t))) = \\ &= G_1^{(k)}(\tau(t)) \nu_1(t) + G_2^{(k)}(\tau(t)) \nu_2(t) = \langle G^{(k)}(\tau(t), \nu(t)) \rangle, \end{aligned}$$

wobei das ebene Vektorfeld $G^{(k)}$ auf einer offenen Umgebung von A definiert ist durch

$$G^{(k)} = \begin{pmatrix} (F_k \circ \phi) \cdot (\partial_2 \phi_k) \\ (F_k \circ \phi) \cdot (-\partial_1 \phi_k) \end{pmatrix}.$$

Setzen wir dies ein und wenden auf jeden Summanden den Gauß'schen Integralsatz der Ebene an, so erhalten wir

$$\int_{\gamma} \langle F, ds \rangle = \sum_{k=1}^3 \int_a^b \langle G^{(k)}(\tau(t)), \tau'(t) \rangle dt = \sum_{k=1}^3 \int_A \operatorname{div}(G^{(k)})(u, \nu) d(u, \nu).$$

Nach Definition der Divergenz und auf Grund des Satzes von Schwarz (anwendbar auf Grund der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit von ϕ) gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(G^{(k)})(u, \nu) &= \partial_1 G_1^{(k)}(u, \nu) + \partial_2 G_2^{(k)}(u, \nu) = \partial_1((F_k \circ \phi) \cdot (\partial_2 \phi_k))(u, \nu) + \partial_2((F_k \circ \phi) \cdot (-\partial_1 \phi_k))(u, \nu) \\ &= \partial_1(F_k \circ \phi)(u, \nu) \partial_2 \phi_k(u, \nu) + (F_k \circ \phi)(u, \nu) \partial_{12} \phi_k(u, \nu) - \partial_2(F_k \circ \phi)(u, \nu) \partial_1 \phi_k(u, \nu) - (F_k \circ \phi)(u, \nu) \partial_{21} \phi_k(u, \nu) \\ &= \partial_1(F_k \circ \phi)(u, \nu) \partial_2 \phi_k(u, \nu) - \partial_2(F_k \circ \phi)(u, \nu) \partial_1 \phi_k(u, \nu). \end{aligned}$$

Auf Grund der mehrdimensionalen Kettenregel gilt $(F_k \circ \phi)'(u, \nu) = F'_k(\phi(u, \nu)) \cdot \phi'(u, \nu)$. Für die partiellen Ableitungen erhalten wir so die Ausdrücke

$$\partial_1(F_k \circ \phi)(u, \nu) = \sum_{\ell=1}^3 (\partial_{\ell} F_k \circ \phi)(u, \nu) \cdot \partial_1 \phi_{\ell}(u, \nu) \quad \text{und} \quad \partial_2(F_k \circ \phi)(u, \nu) = \sum_{\ell=1}^3 (\partial_{\ell} F_k \circ \phi)(u, \nu) \cdot \partial_2 \phi_{\ell}(u, \nu).$$

Die bisherigen Rechnung zeigt somit, dass man das Kurvenintegral $\int_{\gamma} \langle F, ds \rangle$ durch Integration der Funktion

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 ((\partial_{\ell} F_k \circ \phi)(u, \nu) \cdot \partial_1 \phi_{\ell}(u, \nu) \cdot \partial_2 \phi_k(u, \nu) - (\partial_{\ell} F_k \circ \phi)(u, \nu) \cdot \partial_2 \phi_{\ell}(u, \nu) \cdot \partial_1 \phi_k(u, \nu)) \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 (\partial_{\ell} F_k \circ \phi)(u, \nu) \cdot (\partial_1 \phi_{\ell}(u, \nu) \cdot \partial_2 \phi_k(u, \nu) - \partial_1 \phi_k(u, \nu) \cdot \partial_2 \phi_{\ell}(u, \nu)) \quad (*) \end{aligned}$$

über den Bereich A erhält. Wir vergleichen dieses Ergebnis nun mit der rechten Seite der Gleichung im Satz von Stokes. Nach Definition der Flächenintegrale 2. Art gilt

$$\int_{(A, \phi)} \langle \text{rot}(F), dA \rangle = \int_A \langle (\text{rot}(F) \circ \phi)(u, v), \phi'(u, v)(e_1) \times \phi'(u, v)(e_2) \rangle d(u, v).$$

Die erste Komponente des Vektorfelds $\text{rot}(F)$ ist $\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2$. Im Kreuzprodukt stehen jeweils die ersten bzw. zweiten partiellen Ableitungen der Komponenten von ϕ . Die erste Komponente des Kreuzprodukts ist somit $\partial_1 \phi_2(u, v) \cdot \partial_2 \phi_3(u, v) - \partial_1 \phi_3(u, v) \cdot \partial_2 \phi_2(u, v)$. Der erste Summand im Skalarprodukt unter dem Integralzeichen ist somit

$$\begin{aligned} & ((\partial_2 F_3 \circ \phi)(u, v) - (\partial_3 F_2 \circ \phi)(u, v)) ((\partial_1 \phi_2(u, v) \cdot \partial_2 \phi_3(u, v) - \partial_1 \phi_3(u, v) \cdot \partial_2 \phi_2(u, v))) = \\ & (\partial_2 F_3 \circ \phi)(u, v) ((\partial_1 \phi_2(u, v) \cdot \partial_2 \phi_3(u, v) - \partial_1 \phi_3(u, v) \cdot \partial_2 \phi_2(u, v))) \\ & + (\partial_3 F_2 \circ \phi)(u, v) (\partial_1 \phi_3(u, v) \cdot \partial_2 \phi_2(u, v) - \partial_1 \phi_2(u, v) \cdot \partial_2 \phi_3(u, v)). \end{aligned}$$

Dies sind genau die Summanden in der Summe (*) mit $k, \ell \in \{2, 3\}$, wobei zu beachten ist, dass dort die Summanden mit $k = \ell = 2$ und $k = \ell = 3$ gleich null sind. Durch eine analoge Rechnung sieht man, dass der zweite Summand im Skalarprodukt unter dem Integralzeichen in (*) den Summanden mit $k, \ell \in \{1, 3\}$ entspricht, und der dritte Summand in (*) den Summanden mit $k, \ell \in \{1, 2\}$. Damit ist der Stokes'sche Integralsatz insgesamt bewiesen. $\square$

Sämtliche Integralsätze bleiben gültig, wenn die Begrenzungsfunktionen φ und ψ der Normalbereiche nur im Inneren des Intervalls $[a, b]$ bzw. der kompakten Jordan-messbaren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, und auf dem Rand jeweils stetig sind. Denn dann ist für kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ auf dem Intervall $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ die stetige Differenzierbarkeit von φ und ψ jeweils gegeben, und die Änderung der Integrale auf der linken Seite und der rechten Seite des Gauß'schen Integralsatzes der Ebene kann beliebig klein gehalten werden.

Da der Stokes'sche Integralsatz auf den Gauß'schen Integralsatz zurückgeführt wurde, ist dieselbe Argumentation auch dort gültig. Beim Gauß'schen Integralsatz des Raums verwendet man die Tatsache, dass das Innere von A durch Rechtecke (zweidimensionale Quader) ausgeschöpft werden kann, die sich nur in Randpunkten schneiden, und dass Rechtecke Normalbereiche bezüglich beider Koordinatenachsen sind.

Insbesondere gelten die Sätze also für Vollkreise und Vollkugeln von beliebigem Radius $r \in \mathbb{R}^+$. Denn in Dimension 2 sind die Begrenzungsfunktionen gegeben durch $\varphi : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\sqrt{r^2 - x^2}$ und $\psi : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$, und in Dimension 3 auf dem Vollkreis K_r vom Radius r durch $\varphi : K_r \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ und $\psi : K_r \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. Diese sind zwar stetig, aber eben nur im Inneren ihrer Definitionsbereiche auch stetig differenzierbar.

Der folgenden Sätze zeigen, wie sich die Divergenz und die Rotation in einem Punkt geometrisch interpretieren lassen.

Satz 5.34 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $p \in U$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ sei $K_r \subseteq \mathbb{R}^2$ der Vollkreis vom Radius r um p , $\nu : \partial K_r \rightarrow \mathbb{R}^2$ sein äußeres Einheitsnormalenfeld, und es sei $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \partial K_r$ die positiv orientierte Randkurve gegeben durch $\gamma_r(t) = p + (r \cos(t), r \sin(t))$. Dann gilt

$$\text{div}(F)(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma_r} \langle F, \nu \rangle ds.$$

Beweis: Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ mit $K_r \subseteq U$ sei $m_-(r)$ das Minimum und $m_+(r)$ das Maximum der Funktion $\operatorname{div}(F)$ auf K_r . Nach Satz 3.12, dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, gilt jeweils $m_-(r)v_2(K_r) \leq \int_{K_r} \operatorname{div}(F)(x, y) d(x, y) \leq m_+(r)v_2(K_r)$. Dabei ist $v_2(K_r) = \pi r^2$ der Flächeninhalt des Kreises vom Radius r . Durch Anwendung von Satz 5.29, dem Gauß'schen Integralsatz der Ebene, erhalten wir

$$m_-(r) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma_r} \langle F, \nu \rangle ds \leq m_+(r).$$

Lassen wir nun r gegen null laufen, dann konvergieren die Werte $m_-(r)$ und $m_+(r)$ beide auf Grund der Stetigkeit der Divergenz gegen $\operatorname{div}(F)(p)$. $\square$

Satz 5.35 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $p \in U$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ sei $K_r \subseteq \mathbb{R}^3$ die Kugel vom Radius r um p und $\nu : \partial K_r \rightarrow \mathbb{R}^3$ das zugehörige Einheitsnormalenfeld. Dann gilt

$$\operatorname{div}(F)(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^{-1} \int_{(\partial K_r, \nu)} \langle F, \nu \rangle dA.$$

Beweis: Hier läuft der Beweis weitgehend analog. Wieder sei für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ mit $K_r \subseteq U$ jeweils $m_-(r)$ das Minimum und $m_+(r)$ das Maximum der Funktion $\operatorname{div}(F)$ auf K_r . Nach Satz 3.12 gelten jeweils die Ungleichungen $m_-(r)v_3(K_r) \leq \int_{K_r} \operatorname{div}(F)(x, y) d(x, y) \leq m_+(r)v_3(K_r)$. Dabei ist $v_3(K_r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ das Volumen der Kugel vom Radius r . Durch Anwendung von Satz 5.31, dem räumlichen Gauß'schen Integralsatz, erhalten wir

$$m_-(r) \leq \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_{(\partial K_r, \nu)} \langle F, \nu \rangle ds \leq m_+(r).$$

Lassen wir nun r gegen null laufen, dann konvergieren auch hier die Werte $m_-(r)$ und $m_+(r)$ beide gegen den Wert der Divergenz an der Stelle p . $\square$

Satz 5.36 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei $p \in U$, und seien $\nu, w \in \mathbb{R}^3$ zwei zueinander orthogonale Vektoren der Länge 1. Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ sei $\gamma_r : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Kreislinie definiert durch $\gamma_r(t) = p + r \cos(t)\nu + r \sin(t)w$, und es sei $n = \nu \times w$. Dann gilt

$$\langle \operatorname{rot}(F), n \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma_r} \langle F, ds \rangle.$$

Beweis: Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\phi(x, y) = p + x\nu + yw$, und für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ sei $K_r \subseteq \mathbb{R}^2$ der Vollkreis vom Radius r . Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\phi(K_r) \subseteq U$ sei $m_-(r)$ das Minimum und $m_+(r)$ das Maximum der Funktion $g = \langle \operatorname{rot}(F), n \rangle$ auf $\phi(K_r)$. Bezeichnet χ_{K_r} die charakteristische Funktion von K_r , dann gilt jeweils $m_-(r)\chi_{K_r} \leq g \circ \phi \leq m_+(r)\chi_{K_r}$. Integrieren wir die Funktion $g \circ \phi$ über K_r , so erhalten wir gerade das Flächenintegral 2. Art $\int_{(K_r, \phi)} \langle \operatorname{rot}(F), dA \rangle$. Für

alle $(x, y) \in K_r$ gilt nämlich $\phi'(x, y)(e_1) = v$, $\phi'(x, y)(e_2) = w$, also $\phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2) = v \times w = n$ und somit

$$\int_{(K_r, \phi)} \langle \text{rot}(F), dA \rangle = \int_{K_r} \langle (\text{rot}(F) \circ \phi)(x, y), n \circ \phi \rangle d(x, y) = \int_{K_r} (g \circ \phi)(x, y) d(x, y).$$

Die Integration der Funktion $m_-(r)\chi_{K_r}$ liefert dagegen $m_-(r)\pi r^2$, und die Integration von $m_+(r)\chi_{K_r}$ liefert $m_+(r)\pi r^2$. Auf Grund der Monotonie des (zweidimensionalen) Riemann-Integrals gilt also $m_-(r)\pi r^2 \leq \int_{(K_r, \phi)} \langle \text{rot}(F), dA \rangle \leq m_+(r)\pi r^2$. Auf Grund des Stokes'schen Integralsatzes, Satz 5.33, ist der Ausdruck in der Mitte gleich $\int_{\gamma_r} \langle F, ds \rangle$, denn nach Definition ist γ_r gleich $\phi \circ \delta_r$ mit der positiv orientierten Randkurve $\delta_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (r \cos(t), r \sin(t))$ von K_r . Multiplizieren wir die Ungleichungen mit $(\pi r^2)^{-1}$ und lassen r wiederum gegen null laufen, so konvergieren $m_-(r)$ und $m_+(r)$ gegen $\langle \text{rot}(F)(p), n \rangle$, und wir erhalten das gewünschte Ergebnis. $\square$

§ 6. Einführung in die Lebesguesche Integrationstheorie

Zusammenfassung. Die Definition des Riemann-Integrals ist zwar vergleichsweise einfach, aber unnötig restriktiv, d.h. eine Vielzahl von Funktionen (zum Beispiel solche mit unbeschränktem Definitionsbereich oder unbeschränkter Wertemenge) lassen sich nicht integrieren, obwohl die Zuordnung eines Integrals vom geometrischen oder rechnerischen Standpunkt her durchaus sinnvoll wäre. Diese starke Einschränkung führt auch dazu, dass für Aussagen über die Vertauschbarkeit der Integration mit Grenzübergängen starke Voraussetzungen nötig sind, die ihrer Anwendbarkeit entgegenstehen.

Diese Mängel werden durch die Verallgemeinerung des Riemann-Integrals zum *Lebesgue-Integral* weitgehend behoben. In diesem Abschnitt geben wir die Definition dieses Integrals an, klären die Beziehung zum Riemann-Integral und beweisen einige elementare Rechenregeln. Außerdem befassen wir uns mit der für die Anwendung wichtigen Vertauschbarkeit der Integration mit Grenzübergängen und Ableitungen.

Wichtige Grundbegriffe

- Halbnormen auf $\mathbb{R}$ -Vektorräumen
- Majoranten, Obersummen und der Raum $\widehat{\mathcal{L}}_n$
- Raum $\mathcal{L}_n$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen
- Lebesgue-Integral einer Funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

Zentrale Sätze

- Eigenschaften des Raums $\mathcal{L}_n$ und
- Rechenregeln für das Lebesgue-Integral
- Beziehung zwischen dem Riemann- und dem Lebesgue-Integral
- Satz von Beppo-Levi über monotone Konvergenz
- Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz
- Stetigkeit des Lebesgue-Integrals
- Differentiation unter dem Integralzeichen

In diesem Abschnitt werden wir neben einer Erweiterung des Integralbegriffs auch das Verhalten von Funktionen bei Grenzübergängen betrachten. Dabei unterscheidet man grundsätzlich zwei verschiedene Arten von Konvergenz. Für jede Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem metrischen Raum X setzen wir

$$\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| \mid x \in X \} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Die Funktion f ist also genau dann beschränkt, wenn $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}_+$ gilt. Man sagt, eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert **punktweise** gegen eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, wenn $\lim_n f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$ erfüllt ist. Gilt sogar $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$, dann spricht man von **gleichmäßiger** Konvergenz.

Das Riemann-Integral, das wir bisher betrachtet haben, weist zwei gravierende Mängel auf. Zum einen ist es nur für Funktionen mit beschränktem Definitionsbereich definiert. Dagegen kann einer Funktion wie zum Beispiel $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2}$ bereits kein Riemann-Integral mehr zugeordnet werden. Für jedes $a \in \mathbb{R}, a > 1$ gilt allerdings

$$\int_1^a f(x) \, dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a = 1 - \frac{1}{a}$$

so dass im Prinzip nichts dagegen sprechen würde, dieser Funktion das Integral

$$\int_{[1,+\infty[} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{a}\right) = 1 \quad \text{zuzuordnen.}$$

Allerdings ist diese indirekte Definition über Grenzwerte besonders im Mehrdimensionalen sehr unhandlich. Beispielsweise muss man sicherstellen, dass die vielen verschiedenen Möglichkeiten, einen Grenzübergang durchzuführen, alle denselben Grenzwert liefern.

Ein weiterer Nachteil des Riemann-Integrals besteht darin, dass es nur unter sehr starken Voraussetzungen mit Grenzübergängen vertauschbar ist, die in den Anwendungen nur selten vorliegen. Als Beispiel betrachten wir die Dirichlet-Funktion $\chi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

die, wie wir bereits gesehen haben, nicht Riemann-integrierbar ist. Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die alle Elemente aus $N = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ durchläuft. Definieren wir eine Funktionenfolge $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

dann konvergiert die Folge $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen χ , außerdem stimmt χ mit allen χ_n außerhalb der Nullmenge N überein. Deshalb wäre es nur natürlich, der Funktion χ das Integral

$$\int_0^1 \chi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \chi_n(x) dx = 0 \quad \text{zuzuordnen.}$$

Unser Ziel besteht nun darin, den Integralbegriff so zu verallgemeinern, dass unter anderem auch diesen beiden Beispielfunktionen zu integrierbaren Funktionen werden. Wir beginnen mit der Einführung zweier wichtiger Grundbegriffe der Funktionalanalysis.

Definition 6.1 Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum bestehend aus reellwertigen Funktionen auf einer Menge X . Für jedes $f \in V$ bedeute die Notation $f \geq 0$, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in X$ erfüllt ist. Ein **positives Funktional** auf V ist dann eine lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\phi(f) \geq 0$ für alle $f \in V$ mit $f \geq 0$ gilt.

Wir werden weiter unten feststellen, dass durch Integrale auf Funktionenräumen positive Funktionale gegeben sind.

Definition 6.2 Eine Abbildung $p : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum V wird **Halbnorm** auf V genannt, wenn die Bedingungen $p(\lambda v) = |\lambda|p(v)$ und $p(v + w) \leq p(v) + p(w)$ für alle $v, w \in V$ erfüllt sind.

Wie bei den normierten $\mathbb{R}$ -Vektorräumen bezeichnen wir eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines $\mathbb{R}$ -Vektorraums V mit einer Halbnorm p als **offen**, wenn für jedes Element $u \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass der offene Ball $B_{p,\varepsilon}(u) = \{v \in V \mid p(v-u) < \varepsilon\}$ in U enthalten ist. Man überprüft unmittelbar, dass auch in dieser Situation endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen offener Teilmengen wieder offen sind, und dass die leere Menge U und der gesamte $\mathbb{R}$ -Vektorraum V zu den offenen Teilmengen zählen. Mit anderen Worten, die in diesem Sinne offenen Mengen bilden eine **Topologie** auf V . Dies ermöglicht es auch, vom Abschluss $\bar{A}$ und vom Inneren A° einer Teilmenge $A \subseteq V$ zu sprechen.

Lemma 6.3 Ist (V, p) ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer Halbnorm und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, dann ist auch der Abschluss $\bar{U}$ von U in V ein Untervektorraum.

Beweis: Wir überprüfen für die Teilmenge $\bar{U} \subseteq V$ die Untervektorraum-Eigenschaften. Wegen $U \subseteq \bar{U}$ gilt zunächst $0_V \in \bar{U}$. Seien nun $v, w \in \bar{U}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Zu zeigen ist $v + w \in \bar{U}$ und $\lambda v \in \bar{U}$; dabei können wir $\lambda \neq 0$ voraussetzen. Wir müssen nun überprüfen, dass für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ die offenen Bälle $B_{p,\varepsilon}(v+w)$ und $B_{p,\varepsilon}(\lambda v)$ Elemente aus U enthalten. Wegen $v, w \in \bar{U}$ gibt es Elemente $v' \in B_{p, \frac{1}{2}\varepsilon}(v) \cap U$ und $w' \in B_{p, \frac{1}{2}\varepsilon}(w) \cap U$. Weil U ein Untervektorraum von V ist, gilt $v' + w' \in U$, außerdem $p((v' + w') - (v + w)) = p((v' - v) + (w' - w)) \leq p(v' - v) + p(w' - w) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ und somit $v' + w' \in B_{p,\varepsilon}(v + w)$. Damit ist $v + w \in \bar{U}$ nachgewiesen. Wegen $v \in \bar{U}$ gibt es auch einen Vektor $v'' \in B_{p, |\lambda|^{-1}\varepsilon}(v) \cap U$. Wiederum ist $\lambda v''$ in U enthalten, und es gilt $p(\lambda v'' - \lambda v) = |\lambda|p(v'' - v) < |\lambda||\lambda|^{-1}\varepsilon = \varepsilon$, also $\lambda v'' \in B_{p,\varepsilon}(\lambda v)$. Dies zeigt, dass auch λv in $\bar{U}$ liegt. $\square$

Ein wichtiger Unterschied zu den normierten $\mathbb{R}$ -Vektorräumen besteht darin, dass man durch $d(v, w) = p(w - v)$ keine Metrik erhält, weil die Äquivalenz $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$ nicht im Allgemeinen erfüllt ist. Die Bedingungen $d(v, v) = 0$, $d(w, v) = d(v, w)$ und die Dreiecksungleichung $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ für alle $u, v, w \in V$ bleiben aber erfüllt. Man bezeichnet eine Abbildung d mit diesen Eigenschaften als **Halbmetrik**. In Mengen X mit einer Halbmetrik d ist es nach wie vor sinnvoll, von Konvergenz zu sprechen: Man bezeichnet eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X als **konvergent** gegen einen Punkt $a \in X$, wenn $\lim_n d(a, x_n) = 0$ in $\mathbb{R}$ gilt. Allerdings ist dieser Grenzwert im Allgemeinen nicht mehr eindeutig. Auf Grund der fehlenden Eindeutigkeit kann die Bezeichnung $\lim_n x_n$ für den Grenzwert nicht mehr verwendet werden.

Eine Abbildung ϕ von einem halbnormierten $\mathbb{R}$ -Vektorraum (V, p) in einen metrischen Raum (X, d) bezeichnen wir als **stetig** in einem Punkt $a \in V$, wenn für jede Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert, jeweils $\lim_n \phi(v_n) = \phi(a)$ in (X, d) gilt. Wie bei den metrischen Räumen beweist man auch hier das ε - δ -Kriterium: Die Abbildung p ist genau dann stetig in a , wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass für alle $v \in V$ mit $p(v - a) < \delta$ jeweils $d(\phi(a), \phi(v)) < \varepsilon$ gilt. Der folgende Satz wird nun das Hauptwerkzeug sein, mit dem wir das Riemann-Integral zum Lebesgue-Integral erweitern werden.

Satz 6.4 Sei (V, p) ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer Halbnorm, $(W, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $\phi : U \rightarrow W$ eine stetige lineare Abbildung. Dann existiert genau eine stetige Fortsetzung von ϕ zu einer Abbildung $\bar{\phi} : \bar{U} \rightarrow W$, und diese Abbildung ist wiederum linear.

Beweis: Zunächst beweisen wir die Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzung. Nehmen wir an, dass durch $\psi, \psi' : \bar{U} \rightarrow W$ zwei solche Fortsetzungen gegeben sind. Sei $v \in \bar{U}$ beliebig vorgegeben. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein

$u_n \in B_{p, \frac{1}{n}}(v) \cap U$. Somit ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in U , die gegen v konvergiert. Auf Grund der Stetigkeit von ψ und ψ' gilt nun $\psi(v) = \lim_n \psi(u_n) = \lim_n \phi(u_n) = \lim_n \psi'(u_n) = \psi'(v)$, wodurch die Eindeutigkeit bewiesen ist.

Zum Nachweis der Existenz sei wiederum $v \in \bar{U}$ vorgegeben. Wie oben gezeigt, existiert in U eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen v konvergiert. Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Weil $\phi : U \rightarrow W$ im Nullpunkt stetig ist, existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $u \in U$ aus $p(u) < \delta$ jeweils $\|\phi(u)\| < \varepsilon$ folgt. Sei nun $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $p(u_n - v) < \frac{1}{2}\delta$ für alle $n \geq N$ gilt. Für alle $m, n \geq N$ gilt dann jeweils $p(u_n - u_m) \leq p(u_n - v) + p(v - u_m) < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta$ und somit $\|\phi(u_n) - \phi(u_m)\| = \|\phi(u_n - u_m)\| < \varepsilon$. Dies zeigt, dass $(\phi(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in W ist. Auf Grund der Vollständigkeit existiert ein Grenzwert $w = \lim_n \phi(u_n)$ dieser Folge in W , und wir definieren $\bar{\phi}(v) = w$. Diese Definition ist von der Wahl der Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig. Sei nämlich $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere Folge in U , die gegen v konvergiert, und $\lim_n \phi(u'_n)$ der zugehörige Grenzwert in W . Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $p(u'_n - v) < \frac{1}{2}\delta$ und $p(u_n - v) < \frac{1}{2}\delta$ für alle $n \geq N$. Es folgt $p(u'_n - u_n) \leq p(u'_n - v) + p(v - u_n) < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta$ und somit $\|\phi(u'_n) - \phi(u_n)\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Damit ist bewiesen, dass $\lim_n \phi(u_n)$ und $\lim_n \phi(u'_n)$ übereinstimmen.

Nun müssen wir noch zeigen, dass durch unsere Definition tatsächlich eine stetige, lineare Abbildung $\bar{\phi} : \bar{U} \rightarrow W$ definiert ist. Zum Nachweis der Linearität seien $v, v' \in \bar{U}$ vorgegeben. Dann existieren Folgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U , die gegen v bzw. v' konvergieren, und nach Definition gilt $\bar{\phi}(v) = \lim_n \phi(u_n)$ und $\bar{\phi}(v') = \lim_n \phi(u'_n)$. Die Folge $(u_n + u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ebenfalls in U enthalten und konvergiert gegen $v + v'$, woraus sich

$$\bar{\phi}(v + v') = \lim_n \phi(u_n + u'_n) = \lim_n (\phi(u_n) + \phi(u'_n)) = \lim_n \phi(u_n) + \lim_n \phi(u'_n) = \bar{\phi}(v) + \bar{\phi}(v')$$

ergibt. Genauso zeigt man, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und jedes $v \in \bar{U}$ die Gleichung $\bar{\phi}(\lambda v) = \lambda \bar{\phi}(v)$ erfüllt ist.

Zum Nachweis der Stetigkeit von $\bar{\phi}$ auf ganz $\bar{U}$ verwenden wir das ε - δ -Kriterium und beweisen die Stetigkeit zunächst im Nullpunkt. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der Stetigkeit von ϕ im Nullpunkt existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $u \in U$ aus $p(u) < \delta$ jeweils $\|\phi(u)\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ folgt. Sei nun $v \in \bar{U}$ mit $p(v) < \frac{1}{2}\delta$ vorgegeben. Dann gibt eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und in U , die gegen v konvergiert, und nach Definition gilt $\bar{\phi}(v) = \lim_n \phi(u_n)$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $p(u_n - v) < \frac{1}{2}\delta$ sowie $\|\phi(u_n) - \bar{\phi}(v)\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Dann erhalten wir $p(u_n) \leq p(u_n - v) + p(v) < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta$ und somit $\|\phi(u_n)\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N$. Daraus wiederum folgt $\|\bar{\phi}(v)\| \leq \|\bar{\phi}(v) - \phi(u_n)\| + \|\phi(u_n)\| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ für diese n , wodurch das ε - δ -Kriterium verifiziert ist. Mit der Stetigkeit im Nullpunkt und der Linearität können wir nun sogar die gleichmäßige Stetigkeit von $\bar{\phi}$ auf ganz V beweisen: Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, dann existiert (wie soeben bewiesen) ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $p(v) < \delta \Rightarrow \|\bar{\phi}(v)\| < \varepsilon$ für alle $v \in \bar{U}$. Sind nun $v, v' \in \bar{U}$ mit $p(v' - v) < \delta$ vorgegeben, dann folgt $\|\bar{\phi}(v') - \bar{\phi}(v)\| = \|\bar{\phi}(v' - v)\| < \varepsilon$. $\square$

Wir konstruieren nun den konkreten, halbnormierten $\mathbb{R}$ -Vektorraum, auf den dieser Satz angewendet werden soll. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei C_n die Menge aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Dazu erinnern wir daran, dass der **Träger** einer Funktion f der Abschluss der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ ist. Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $Q^\circ \supseteq \text{supp}(f)$, dann ist die Nullfortsetzung von f auf Q (die wir ebenfalls mit f bezeichnen) eine Riemannintegrierbare Funktion auf Q . Wie wir bereits in § 3 festgestellt haben, ist das Integral $\int_Q f(x) dx$ unabhängig von der Wahl des Quaders Q , so dass wir einfach $\int f(x) dx$ für das Integral über einen beliebigen solchen Quader schreiben können.

Im weiteren Verlauf der weiteren Diskussion wird der folgende Grundbegriff noch eine wichtige Rolle spielen: Eine halbgeordnete Menge $(X, \leq)$ nennt man einen **Verband**, wenn für alle $x, y \in X$ die Teilmenge $\{x, y\}$ ein Infimum und ein Supremum besitzt, das man dann mit $x \wedge y$ und $x \vee y$ bezeichnet.

Proposition 6.5

- (i) Die Menge $\mathcal{C}_n$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, mit der punktweisen Addition und Multiplikation.
- (ii) Die Menge $\mathcal{C}_n$ ist bezüglich der Halbordnung definiert durch $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq g(x)$ ein Verband, mit $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ und $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- (iii) Die Abbildung $I : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ ist ein positives lineares Funktional, und es gilt $|I(f)| \leq I(|f|)$ für alle $f \in \mathcal{C}_n$.

Beweis: zu (i) Bekanntlich ist die Nullfunktion eine stetige Funktion. Die Summe zweier stetiger Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist wiederum stetig, und der Träger von $f + g$ ist in $\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$ enthalten, also wiederum kompakt. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist auch λf stetig, und es gilt $\text{supp}(\lambda f) \subseteq \text{supp}(f)$. Dies zeigt, dass auch λf in $\mathcal{C}_n$ enthalten ist.

zu (ii) Wir beschränken uns beim Beweis der Aussage auf das Infimum. Seien $f, g \in \mathcal{C}_n$ vorgegeben. Wir zeigen, dass die Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ wieder in $\mathcal{C}_n$ liegt. Daraus folgt direkt, dass $u = f \wedge g$ gilt, denn offenbar gilt $u \leq f$ und $u \leq g$, und ist $h \in \mathcal{C}_n$ eine weitere Funktion mit $h \leq f$ und $h \leq g$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ jeweils $h(x) \leq f(x)$ und $h(x) \leq g(x)$, also $h(x) \leq \min\{f(x), g(x)\} = u(x)$ und damit $h \leq u$.

Zum Beweis von $u \in \mathcal{C}_n$ bemerken wir zunächst, dass $\text{supp}(u)$ in $\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$ enthalten und somit kompakt ist. Die Stetigkeit von u beweisen wir mit dem ε - δ -Kriterium: Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben, so gibt es $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y - x\|_2 < \delta_1$ jeweils $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ und für alle $\|y - x\|_2 < \delta_2$ jeweils $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$ erfüllt ist. Setzen wir $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y - x\|_2 < \delta$ jeweils $f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$ und $g(x) - \varepsilon < g(y) < g(x) + \varepsilon$. Für diese y gilt dann $u(y) = f(y) > f(x) - \varepsilon$ oder $u(y) = g(y) > g(x) - \varepsilon$, auf jeden Fall also $u(y) > u(x) - \varepsilon$. Ebenso gilt $u(y) \leq f(y) < f(x) + \varepsilon$ und $u(y) \leq g(y) < g(x) + \varepsilon$ und damit $u(y) < u(x) + \varepsilon$. Insgesamt gilt also $u(x) - \varepsilon < u(y) < u(x) + \varepsilon$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y - x\|_2 < \delta$, womit die Stetigkeit von u im Punkt x bewiesen ist.

zu (iii) Die erste Feststellung ergibt sich direkt aus den Rechenregeln für das Riemann-Integral aus Proposition 1.9. Die Ungleichung $|I(f)| \leq I(|f|)$ für beliebige $f \in \mathcal{C}_n$ (sogar für beliebige Riemann-integrierbare Funktionen) hatten wir als Zwischenschritt beim Beweis von Lemma 4.14 gezeigt. $\square$

Wir definieren uns nun einen halbnormierten $\mathbb{R}$ -Vektorraum, auf den wir Satz 6.4 anwenden können.

Definition 6.6 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}_n$ mit $g_m \geq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} g_m$ als **Majorante** von f , wenn die Bedingungen

$$|f| \leq \sum_{m=1}^{\infty} g_m \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} I(g_m) < +\infty$$

erfüllt sind. Die reelle Zahl $\sum_{m=1}^{\infty} I(g_m)$ bezeichnen wir dann als **Obersumme** von f .

Im weiteren Verlauf bezeichnen wir mit $\widehat{\mathcal{L}}_n$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die eine Majorante besitzen. Für jedes $f \in \widehat{\mathcal{L}}_n$ sei $\|f\|_1$ das Infimum der Menge aller Obersummen von f .

Proposition 6.7 Sei $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ mit $\sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|_1 < +\infty$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $|f| \leq \sum_{m=1}^n |g_m|$. Dann ist auch f in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ enthalten, und es gilt $\|f\|_1 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|_1$.

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Voraussetzung existiert für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Majorante $\sum_{i=1}^{\infty} h_{mi}$ von g_m , die wir jeweils so wählen können, dass $\sum_{i=1}^{\infty} I(h_{mi}) < \|g_m\|_1 + 2^{-m}\varepsilon$ erfüllt ist. Es gilt dann $|f| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |g_m| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} h_{mi}$, und außerdem

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} I(h_{mi}) \leq \sum_{m=1}^{\infty} (\|g_m\|_1 + 2^{-m}\varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|_1 + \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass auch f eine Majorante besitzt, also in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ enthalten ist, und dass $\|f\|_1 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|_1 + \varepsilon$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt. Da ε beliebig klein gewählt werden kann, erhalten wir die Abschätzung $\|f\|_1 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|_1$. $\square$

Die folgende Notation hatten wir im letzten Semester bereits auf den Übungsblättern eingeführt: Ist $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion, dann setzen wir $\|g\|_{\infty} = \sup\{g(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

Folgerung 6.8

- (i) Ist $f \in \widehat{\mathcal{L}}_n$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, dann liegt auch fg in $\widehat{\mathcal{L}}_n$, und es gilt $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_{\infty}$.
- (ii) Die Menge $\widehat{\mathcal{L}}_n$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, der $\mathcal{C}_n$ als Untervektorraum enthält, und $\|\cdot\|_1$ ist eine Halbnorm auf $\widehat{\mathcal{L}}_n$.

Beweis: zu (i) Ist $\sum_{m=1}^{\infty} h_m$ eine Majorante von f , dann ist $\sum_{m=1}^{\infty} h_m \cdot \|g\|_{\infty}$ offenbar eine Majorante von fg , mit der Obersumme $\sum_{m=1}^{\infty} I(h_m \|g\|_{\infty}) = \|g\|_{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I(h_m) < +\infty$. Für die Abschätzung von $\|fg\|_1$ dürfen wir voraussetzen, dass g nicht die Nullfunktion und folglich $\|g\|_{\infty} \neq 0$ ist. Ist dann $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, so finden wir eine Majorante $\sum_{m=1}^{\infty} h_m$ von f mit $\sum_{m=1}^{\infty} I(h_m) \leq \|f\|_1 + \|g\|_{\infty}^{-1}\varepsilon$. Es folgt dann $\|fg\|_1 \leq \sum_{m=1}^{\infty} I(h_m \|g\|_{\infty}) \leq \|f\|_1 \|g\|_{\infty} + \varepsilon$, und weil diese Abschätzung für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gültig ist, folgt $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_{\infty}$.

zu (ii) Wir zeigen, dass $\widehat{\mathcal{L}}_n$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$ -Vektorraums aller $\mathbb{R}$ -wertigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ ist. Die Nullfunktion ist offenbar in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ enthalten, denn $\sum_{m=1}^{\infty} 0$ ist eine Majorante der Nullfunktion mit Obersumme null. Seien nun $f, g \in \widehat{\mathcal{L}}_n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Für beide Funktionen existieren nach Definition Majoranten $\sum_{m=1}^{\infty} h_m$ bzw. $\sum_{m=1}^{\infty} h'_m$. Wegen $|f+g| \leq |f| + |g| \leq \sum_{m=1}^{\infty} (h_m + h'_m)$ und $|\lambda f| = \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda| h_m$, und auf Grund der Endlichkeit von $\sum_{m=1}^{\infty} I(h_m + h'_m) = \sum_{m=1}^{\infty} I(h_m) + \sum_{m=1}^{\infty} I(h'_m)$ und $\sum_{m=1}^{\infty} I(|\lambda| h_m) = |\lambda| \sum_{m=1}^{\infty} I(h_m)$ sind auch $f+g$ und λf in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ enthalten. Dass $\mathcal{C}_n$ in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ enthalten und somit ein Untervektorraum ist, ist offensichtlich, denn jedes $f \in \mathcal{C}_n$ besitzt die Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit $g_1 = |f|$, $g_m = 0$ für $m \geq 2$ als Majorante, mit $I(|f|)$ als Obersumme.

Nun zeigen wir, dass durch $\|\cdot\|_1$ eine Halbnorm auf $\widehat{\mathcal{L}}_n$ definiert ist. Für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ können die beiden Majoranten von f und g so gewählt werden, dass $\sum_{m=1}^{\infty} I(h_m) \leq \|f\|_1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ und $\sum_{m=1}^{\infty} I(h'_m) \leq \|g\|_1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ gilt. Es folgt dann $\sum_{m=1}^{\infty} I(h_m + h'_m) \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 + \varepsilon$, also $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 + \varepsilon$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und damit $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$. Durch Anwendung von Teil (i) auf die konstante Funktion $g = \lambda$ erhalten wir auch die Ungleichung $\|\lambda f\|_1 \leq |\lambda| \|f\|_1$. Für den Beweis der umgekehrten Ungleichung dürfen wir $\lambda \neq 0$ voraussetzen. Auf

Grund der bereits bewiesenen Ungleichung gilt $\|f\|_1 = \|\lambda^{-1}(\lambda f)\|_1 \leq |\lambda|^{-1} \|\lambda f\|_1$. Durch Multiplikation mit $|\lambda|$ auf beiden Seiten erhalten wir $|\lambda| \|f\|_1 \leq \|\lambda f\|_1$, insgesamt also Gleichheit. $\square$

Um unseren Satz 6.4 anwenden zu können, benötigen wir noch die Stetigkeit des positiven linearen Funktional I auf $\mathcal{C}_n$. Dies erfordert ein wenig Vorbereitung.

Satz 6.9 (Satz von Dini)

Sei X ein kompakter metrischer Raum und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge stetiger Funktionen $f_m : X \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert. Dann konvergiert $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ auch gleichmäßig gegen f .

Beweis: Für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $m \in \mathbb{N}$ sei jeweils $U_m = \{x \in X \mid f(x) - f_m(x) < \varepsilon\}$. Auf Grund der Stetigkeit von f_m und f ist jedes U_m offen. Auf Grund der punktweisen Konvergenz bilden sie außerdem eine Überdeckung von X , denn für jedes $x \in X$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f(x) - f_m(x) < \varepsilon$, und dann gilt $x \in U_m$. Wegen $f - f_{m+1} \leq f - f_m$ gilt jeweils $U_m \subseteq U_{m+1}$. Weil X kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung von $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$, und wegen $U_m \subseteq U_{m+1}$ für alle m somit ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $U_\ell = X$. Für alle $m \geq \ell$ und $x \in X$ gilt also $f(x) - f_m(x) < \varepsilon$. Damit ist die gleichmäßige Konvergenz bewiesen. $\square$

Proposition 6.10

- (i) Für jedes $f \in \mathcal{C}_n$ mit $f \geq 0$ gilt $I(f) = \|f\|_1$.
- (ii) Das positive lineare Funktional $I : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_1$.

Beweis: zu (i) Bereits beim Beweis von Folgerung 6.8 (ii) hatten wir bemerkt, dass f eine Majorante mit Obersumme $I(f)$ besitzt. Daraus folgt $\|f\|_1 \leq I(f)$. Zum Beweis der Ungleichung $I(f) \leq \|f\|_1$ sei $\sum_{m=1}^{\infty} g_m$ eine beliebige Majorante von f . Für jedes $m \in \mathbb{N}$ definieren wir $h_m = f \wedge (\sum_{k=1}^m g_k)$. Nach Proposition 6.5 (ii) ist auch h_m jeweils in $\mathcal{C}_n$ enthalten. Offenbar gilt $\text{supp}(h_m) \subseteq \text{supp}(f)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Außerdem konvergiert die Folge $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen f . Sind nämlich $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann existiert wegen $\sum_{m=1}^{\infty} g_m(x) \geq f(x)$ ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^m g_k(x) > f(x) - \varepsilon$ für alle $m \geq M$, und es folgt $f(x) - \varepsilon < h_m(x) \leq f(x)$ für diese m .

Weil die Träger von f und h_m in der kompakten Menge $\text{supp}(f)$ enthalten und die Folge $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ außerdem monoton wachsend ist, können wir den Satz von Dini anwenden. Demnach konvergiert die Folge $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f , und nach Lemma 4.14 folgt daraus $\lim_m I(h_m) = I(f)$. Außerdem gilt $h_m \leq \sum_{k=1}^m g_k$ und somit $I(h_m) \leq \sum_{k=1}^m I(g_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} I(g_k)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Daraus wiederum folgt $I(f) \leq \sum_{m=1}^{\infty} I(g_m)$. Weil die Majorante $\sum_{m=1}^{\infty} g_m$ von f beliebig vorgegeben war, erhalten wir $I(f) \leq \|f\|_1$, wie gewünscht.

zu (ii) Dies ergibt sich unmittelbar aus Teil (i). Ist nämlich $f \in \mathcal{C}_n$ und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die bezüglich $\|\cdot\|_1$ gegen f konvergiert, dann gilt $\lim_m \|f_m - f\|_1 = 0$. Wegen $0 \leq |I(f_m - f)| \leq I(|f_m - f|) \leq \|f_m - f\|_1$ für alle $m \in \mathbb{N}$ folgt $\lim_m |I(f_m) - I(f)| = \lim_m |I(f_m - f)| = 0$ aus dem Sandwich-Lemma, also $\lim_m I(f_m) = I(f)$. $\square$

Damit sind die Vorbereitungen zur Einführung des Lebesgue-Integrals abgeschlossen. Es sei $\mathcal{L}_n$ der Abschluss von $\mathcal{C}_n$ im halbnormierten Raum $(\widehat{\mathcal{L}}_n, \|\cdot\|_1)$. Nach Satz 6.4 existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $\bar{I}$ der Funktion $I : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{L}_n$.

Definition 6.11 Wir nennen die Elemente von $\mathcal{L}_n$ die **Lebesgue-integrierbaren** Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, und für jedes $f \in \mathcal{L}_n$ wird $\int_{\mathcal{L}} f(x) dx = \bar{I}(f)$ das **Lebesgue-Integral** von f genannt.

Unmittelbar aus der Definition ergibt sich: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn f in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ liegt und eine Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_n$ mit $\lim_m \|f_m - f\|_1 = 0$ existiert. Das Lebesgue-Integral von f ist in diesem Fall durch den Grenzwert

$$\int_{\mathcal{L}} f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m(x) dx \quad \text{gegeben.}$$

Für alle $f \in \mathcal{C}_n$ stimmt $\int_{\mathcal{L}} f(x) dx$ mit dem Riemann-Integral $I(f)$ überein, denn in diesem Fall wird $\lim \|f_m - f\|_1 = 0$ von der konstanten Folge gegeben durch $f_m = f$ für alle $m \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Proposition 6.12

- (i) Die Menge $\mathcal{L}_n$ ist ein Untervektorraum von $\widehat{\mathcal{L}}_n$.
- (ii) Ist $f \in \widehat{\mathcal{L}}_n$ und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}_n$ mit $\lim_m \|f_m - f\|_1 = 0$, dann ist auch f in $\mathcal{L}_n$ enthalten.
- (iii) Sind $f, g \in \mathcal{L}_n$, dann sind auch die Funktionen $|f|$, $f \wedge g$ und $f \vee g$ in $\mathcal{L}_n$ enthalten.
- (iv) Sei $f \in \mathcal{L}_n$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Ist g zusätzlich stetig oder $g \in \mathcal{L}_n$, dann folgt $f g \in \mathcal{L}_n$.

Beweis: zu (i) Dies ergibt sich unmittelbar aus Lemma 6.3.

zu (ii) Wegen $f_m \in \mathcal{L}_n$ existiert jeweils ein $g_m \in \mathcal{C}_n$ mit $\|g_m - f_m\|_1 < \frac{1}{m}$. Wegen $\|g_m - f\|_1 \leq \|g_m - f_m\|_1 + \|f_m - f\|_1$ folgt aus $\lim_m \|f_m - f\|_1 = 0$ auch $\lim_m \|g_m - f\|_1 = 0$. Dies zeigt, dass f in $\mathcal{L}_n$ liegt.

zu (iii) Die Funktion $|f|$ ist jedenfalls in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ enthalten, weil mit f auch $|f|$ eine Majorante besitzt. Sei nun $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}_n$ mit $\lim_m \|f_m - f\|_1 = 0$. Wegen $\||f| - |f_m|\| \leq |f - f_m|$ gilt dann auch $\lim_m \||f_m| - |f|\|_1 = 0$. Weil die Funktionen $|f_m|$ in $\mathcal{C}_n$ enthalten sind, folgt daraus $|f| \in \mathcal{L}_n$. Die anderen beiden Aussagen ergeben sich nun unmittelbar aus den Gleichungen $f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ und $f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$.

zu (iv) Sei $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ wiederum eine Folge in $\mathcal{C}_n$ mit $\lim_m \|f_m - f\|_1 = 0$. Nach Folgerung 6.8 (i) gilt

$$\|f g - f_m g\|_1 \leq \|g\|_{\infty} \|f_m - f\|_1$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Ist g stetig, dann liegen die Funktionen $f_m g$ alle in $\mathcal{C}_n$. Aus dem Sandwich-Lemma folgt $\lim_m \|f g - f_m g\|_1 = 0$, und dies wiederum bedeutet, dass $f g$ in $\mathcal{L}_n$ enthalten ist. Ist g statt dessen ein Element aus $\mathcal{L}_n$, dann wählen wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $g_m \in \mathcal{C}_n$ mit $\|g_m - g\|_1 \leq \frac{1}{m \|f_m\|_{\infty}}$ falls $f_m \neq 0$ und setzen ansonsten $g_m = 0$. Dann folgt $\|f_m g - f_m g_m\|_1 \leq \|f_m\|_{\infty} \|g_m - g\|_1 \leq \frac{1}{m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Zusammen mit der Abschätzung

$$\|f_m g_m - f g\|_1 \leq \|f_m g_m - f_m g\|_1 + \|f_m g - f g\|_1 \leq \|f_m g_m - f_m g\|_1 + \|g\|_{\infty} \|f_m - f\|_1$$

erhalten wir $\lim_m \|f_m g_m - f g\|_1 = 0$ und somit $f g \in \mathcal{L}_n$. □

Proposition 6.13 (Rechenregeln für das Lebesgue-Integral)

- (i) Seien $f, g \in \mathcal{L}_n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\int_{\mathcal{L}} (f + g)(x) dx = \int_{\mathcal{L}} f(x) dx + \int_{\mathcal{L}} g(x) dx$ und $\int_{\mathcal{L}} (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_{\mathcal{L}} f(x) dx$.
- (ii) Für alle $f \in \mathcal{L}_n$ gilt $\left| \int_{\mathcal{L}} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathcal{L}} |f(x)| dx = \|f\|_1$.
- (iii) Ist $f \in \mathcal{L}_n$ und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}_n$, so dass $\lim_m \|f_m - f\|_1 = 0$ gilt, dann ist $\lim_m \int_{\mathcal{L}} f_m(x) dx = \int_{\mathcal{L}} f(x) dx$.
- (iv) Aus $f \geq 0$ folgt $\int_{\mathcal{L}} f(x) dx \geq 0$.
- (v) Sei $f \in \mathcal{L}_n$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und außerdem stetig oder in $\mathcal{L}_n$ enthalten. Dann gilt die Abschätzung $\left| \int_{\mathcal{L}} f(x)g(x) dx \right| \leq \|g\|_{\infty} \int_{\mathcal{L}} |f(x)| dx$.

Beweis: zu (i) Dies folgt direkt aus Satz 6.4, denn die Abbildung $\bar{I} : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_{\mathcal{L}} f(x) dx$ ist die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung von $I : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{R}$, und diese ist auf Grund des Satzes eine lineare Abbildung.

zu (ii) Wir führen die Aussage auf die Ungleichungen $|I(f)| \leq I(|f|) = \|f\|_1$ für $f \in \mathcal{C}_n$ zurück. Sei also $f \in \mathcal{C}_n$ und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}_n$ mit $\lim_m \|f_m - f\|_1 = 0$. Nach Definition des Lebesgue-Integrals gilt $\lim_m I(f_m) = \int_{\mathcal{L}} f(x) dx$. Wegen $\|f_m| - |f|\| \leq \|f_m - f\|$ gilt $\|f_m| - |f|\|_1 \leq \|f_m - f\|_1$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und damit $\lim_m I(|f_m|) = \int_{\mathcal{L}} |f(x)| dx$. Nun gilt

$$\left| \int_{\mathcal{L}} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{\mathcal{L}} f(x) dx - I(f_m) \right| + |I(f_m)| \leq \left| \int_{\mathcal{L}} f(x) dx - I(f_m) \right| + I(|f_m|).$$

Für $m \rightarrow \infty$ läuft der erste Summand auf der rechten Seite gegen Null und der zweite gegen $\int_{\mathcal{L}} |f(x)| dx$. Daraus folgt die erste behauptete Ungleichung. Für die Gleichung betrachten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} |f(x)| dx &= \int_{\mathcal{L}} |f_m(x)| dx + \left(\int_{\mathcal{L}} |f(x)| dx - \int_{\mathcal{L}} |f_m(x)| dx \right) = \\ I(|f_m|) + \left(\int_{\mathcal{L}} |f(x)| dx - I(|f_m|) \right) &= \|f_m\|_1 + \left(\int_{\mathcal{L}} |f(x)| dx - I(|f_m|) \right). \end{aligned}$$

Für $m \rightarrow \infty$ konvergiert der erste Summand gegen $\|f\|_1$ und der zweite gegen Null.

zu (iii) Dies folgt direkt aus Teil (ii), denn für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \int_{\mathcal{L}} f_m(x) dx - \int_{\mathcal{L}} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathcal{L}} |f_m(x) - f(x)| dx = \|f - f_m\|_{\mathcal{L}}.$$

Läuft der Ausdruck rechts gegen Null, dann also auch der linke.

zu (iv) Dies erhält man durch $\int_{\mathcal{L}} f(x) dx = \int_{\mathcal{L}} |f(x)| dx = \|f\|_1 \geq 0$.

zu (v) Nach Proposition 6.12 ist $f g$ jedenfalls Lebesgue-integrierbar. Außerdem gilt

$$\left| \int_{\mathcal{L}} f(x)g(x) dx \right| \leq \int_{\mathcal{L}} |f(x)g(x)| dx = \|f g\|_1 \leq \|g\|_{\infty} \cdot \|f\|_1 = \|g\|_{\infty} \cdot \int_{\mathcal{L}} |f(x)| dx. \quad \square$$

Definition 6.14 Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **endlich Lebesgue-messbar**, wenn die charakteristische Funktion χ_B Lebesgue-integrierbar ist. In diesem Fall nennt man

$$\nu_{\mathcal{L}}(B) = \int_{\mathcal{L}} \chi_B(x) dx \quad \text{das \textbf{Lebesgue-Maß} von } B.$$

Die Menge B wird **Lebesguesche Nullmenge** genannt, wenn $\|\chi_B\|_1 = 0$ gilt.

Unmittelbar aus der Definition folgt, dass jede Teilmenge M einer Lebesgueschen Nullmenge N wiederum eine Lebesguesche Nullmenge ist. Aus $M \subseteq N$ folgt $\chi_M \leq \chi_N$ und damit $0 \leq \|\chi_M\|_1 \leq \|\chi_N\|_1 = 0$. Man sagt üblicherweise, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Eigenschaft **fast überall** besitzt, wenn die Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$, auf der diese Eigenschaft nicht gilt, eine Lebesguesche Nullmenge ist.

Proposition 6.15

- (i) Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Lebesguesche Nullmenge, wenn sie endlich Lebesgue-messbar ist und $\nu_{\mathcal{L}}(N) = 0$ gilt.
- (ii) Jede Nullmenge (wie in § 2 definiert) ist eine Lebesguesche Nullmenge.

Beweis: zu (i) „ $\Rightarrow$ “ Ist $\|\chi_N\|_1 = 0$, dann hat die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_n$ gegeben durch $f_m = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft $\lim_m \|f_m - \chi_N\|_1 = 0$. Dies zeigt, dass χ_N Lebesgue-integrierbar ist. Außerdem gilt

$$\nu_{\mathcal{L}}(N) = \int_{\mathcal{L}} \chi_N(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{L}} f_m(x) dx = 0$$

nach Definition des Lebesgue-Integrals.

„ $\Leftarrow$ “ Aus $\chi_N \in \mathcal{L}_n$ und $\int_{\mathcal{L}} \chi_N(x) dx = 0$ folgt $\|\chi_N\|_1 = \int_{\mathcal{L}} |\chi_N(x)| dx = \int_{\mathcal{L}} \chi_N(x) dx = 0$ nach Proposition 6.13.

zu (ii) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Definition der Nullmengen gibt es eine Familie $(Q_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Quadern mit $N \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$ und $\sum_{m=1}^{\infty} \nu(Q_m) < \varepsilon$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ können wir ein $\varepsilon_m \in \mathbb{R}^+$ wählen, so dass $I(\chi_{Q_m, \varepsilon_m}) < \nu(Q_m) + \varepsilon 2^{-m}$ gilt. Es ist dann $\sum_{m=1}^{\infty} \chi_{Q_m, \varepsilon_m}$ eine Majorante von χ_N , und es gilt

$$\sum_{m=1}^n I(\chi_{Q_m, \varepsilon_m}) \leq \sum_{m=1}^n \nu(Q_m) + \sum_{m=1}^n \varepsilon 2^{-m} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Weil ε beliebig vorgegeben war, folgt daraus $\|\chi_N\|_1 = 0$. □

Umgekehrt kann man zeigen, dass jede Lebesguesche Nullmenge eine Nullmenge ist, die beiden Begriffe sind also äquivalent. Wir werden dieses Resultat aber nicht verwenden. Genau wie für die Riemann-integrierbaren Funktionen gilt auch hier

Proposition 6.16 Seien $f \in \mathcal{L}_n$, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \notin N$. Dann ist auch $\tilde{f}$ Lebesgue-integrierbar, und die Lebesgue-Integrale von f und $\tilde{f}$ stimmen überein.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $|\tilde{f}-f| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \chi_N$, und wegen $\|\chi_N\|_1 = 0$ folgt daraus $\|\tilde{f}-f\|_1 = 0$ nach Proposition 6.7. Dies zeigt, dass $\tilde{f}-f$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion mit Lebesgue-Integral Null ist. Daraus wiederum folgt auch die Lebesgue-Integrierbarkeit von $\tilde{f} = (\tilde{f}-f) + f$ sowie die Gleichheit der Integrale. $\square$

Für die spätere Anwendung bemerken wir noch, dass Proposition 6.7 gültig bleibt, wenn die Ungleichung $|f| \leq \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ nur fast überall erfüllt ist. Sei nämlich $N \subseteq \mathbb{R}^n$ die Nullmenge, auf der die Ungleichung nicht gilt und f_N die Funktion gegeben durch $f_N(x) = 0$ für alle $x \in N$ und $f_N(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Nach Proposition 6.7 in $\widehat{\mathcal{L}}_n$, und es gilt

$$\|f_N\|_1 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|_1.$$

Die Funktion $|f-f_N|$ stimmt fast überall mit der Nullfunktion überein und ist somit nach Proposition 6.16 Lebesgue-integrierbar, mit $\|f-f_N\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f-f_N|(x) dx = 0$. Daraus folgt $\|f\|_1 \leq \|f_N\|_1 + \|f-f_N\|_1 = \|f_N\|_1$.

Definition 6.17 Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q . Wir bezeichnen $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ als **Treppenfunktion** bezüglich $\mathcal{Z}$, wenn $f|_K$ für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ konstant ist. Wir bezeichnen diesen konstanten Wert dann jeweils mit c_K .

Unser nächstes Ziel besteht darin, eine Verbindung zwischen dem Riemann- und dem Lebesgue-Integral herzustellen.

Lemma 6.18 Sei Q ein Quader und $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q .

- (i) Die charakteristische Funktion χ_Q liegt in $\mathcal{L}_n$, und es gilt $\int_Q \chi_Q(x) dx = v(Q)$.
- (ii) Ist $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bezüglich Q , dann liegt auch f in $\mathcal{L}_n$, und es gilt $\int_Q f(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_K v(K)$.

Beweis: zu (i) Sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, wobei wir ausnahmsweise auch $a = b$ zulassen. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ definieren wir eine Funktion $\chi_{I,\varepsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\chi_{I,\varepsilon} = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < a - \varepsilon \text{ oder } x > b + \varepsilon \\ 1 & \text{falls } a \leq x \leq b \\ \frac{1}{\varepsilon}(x - a + \varepsilon) & \text{falls } a - \varepsilon < x < a \\ \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon - x + b) & \text{falls } b < x < b + \varepsilon. \end{cases}$$

Außerdem setzen wir $\delta_{I,\varepsilon} = \chi_{\{a\},\varepsilon} + \chi_{\{b\},\varepsilon}$. Offenbar sind diese Funktionen stetig, und sie haben einen kompakten Träger. Die Riemann-Integrale über diese Funktionen haben die Werte

$$\begin{aligned} \int \chi_{I,\varepsilon}(x) dx &= \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \chi_{I,\varepsilon}(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{a-\varepsilon}^a (x - a + \varepsilon) dx + \int_a^b 1 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_b^{b+\varepsilon} (\varepsilon - x + b) dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} x^2 + (\varepsilon - a)x \right]_{a-\varepsilon}^a + [x]_a^b + \frac{1}{\varepsilon} \left[(b + \varepsilon)x - \frac{1}{2} x^2 \right]_b^{b+\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2} a^2 + (\varepsilon - a)a - \frac{1}{2} (a - \varepsilon)^2 + (a - \varepsilon)^2 \right) + (b - a) + \frac{1}{\varepsilon} \left((b + \varepsilon)^2 - \frac{1}{2} (b + \varepsilon)^2 - (b + \varepsilon)b + \frac{1}{2} b^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}(a - \varepsilon)^2) + (b - a) + \frac{1}{\varepsilon}(\frac{1}{2}(b + \varepsilon)^2 - \varepsilon b - \frac{1}{2}b^2) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 - \varepsilon a + \frac{1}{2}\varepsilon^2) + (b - a) + \frac{1}{\varepsilon}(\frac{1}{2}b^2 + \varepsilon b + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \varepsilon b - \frac{1}{2}b^2) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon + (b - a) + \frac{1}{2}\varepsilon = (b - a) + \varepsilon
\end{aligned}$$

und $\int \chi_{I_j, \varepsilon}(x) dx = \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Ist nun $Q = I_1 \times \dots \times I_n$, mit $I_j = [a_j, b_j]$ für $1 \leq j \leq n$, dann definieren wir $\chi_{Q, \varepsilon} = \prod_{j=1}^n \chi_{I_j, \varepsilon}$ und $\delta_{Q, \varepsilon} = \delta_{I_1, \varepsilon} \vee \dots \vee \delta_{I_n, \varepsilon}$. Die Funktionen $\chi_{Q, \varepsilon}$ und $\delta_{Q, \varepsilon}$ sind beide in $\mathcal{L}_n$ enthalten. Offenbar gilt $\chi_{Q, \varepsilon} \geq \chi_Q$. Somit ist die Reihe mit $\chi_{Q, \varepsilon}$ als einzigem Glied ungleich null eine Majorante von χ_Q . Dies zeigt, dass χ_Q im Raum $\widehat{\mathcal{L}}_n$ enthalten ist.

Außerdem gilt $\chi_{Q, \varepsilon} - \chi_Q \leq \delta_{Q, \varepsilon}$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ist nämlich $x \in Q$, dann gilt $\chi_{Q, \varepsilon} = 1 = \chi_Q$, die Differenz ist also gleich null. Für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q$ gilt dagegen $\chi_{I_j, \varepsilon}(x) = \delta_{I_j, \varepsilon}(x) < 1$ für mindestens ein $j \in \{1, \dots, n\}$, weil die beiden Funktionen $\chi_{I_j, \varepsilon}$ und $\delta_{I_j, \varepsilon}$ auf $]-\infty, a_j]$ und $[b_j, +\infty[$ übereinstimmen, sobald $\varepsilon < \frac{1}{2}(b_j - a_j)$ erfüllt ist. Daraus wiederum folgt

$$\chi_{Q, \varepsilon}(x) - \chi_Q(x) = \chi_{Q, \varepsilon}(x) \leq \chi_{I_j, \varepsilon}(x) = \delta_{I_j, \varepsilon}(x) \leq \delta_{Q, \varepsilon}(x).$$

Die Ungleichung zeigt, dass die Reihe mit $\delta_{Q, \varepsilon}$ als einzigem Term eine Majorante von $\chi_{Q, \varepsilon} - \chi_Q$ ist. Die Funktion $\delta_{Q, \varepsilon}$ nimmt nur im Bereich $\prod_{j=1}^n [a_j - \varepsilon, b_j + \varepsilon] \setminus \prod_{j=1}^n [a_j + \varepsilon, b_j - \varepsilon]$ Werte ungleich null an, die alle zwischen 0 und 1 liegen. Deshalb kann das Integral $\int \delta_{Q, \varepsilon}(x) dx$ durch die Differenz $\prod_{j=1}^n (b_j - a_j + 2\varepsilon) - \prod_{j=1}^n (b_j - a_j - 2\varepsilon)$ abgeschätzt werden. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ erhalten wir durch Einsetzen von $\varepsilon = \frac{1}{m}$ die Ungleichung

$$\|\chi_{Q, \frac{1}{m}} - \chi_Q\|_1 \leq \int \delta_{Q, \varepsilon}(x) dx \leq \prod_{j=1}^n (b_j - a_j + \frac{2}{m}) - \prod_{j=1}^n (b_j - a_j - \frac{2}{m}),$$

und dieser Ausdruck läuft für $m \rightarrow \infty$ gegen null. Dies zeigt, dass χ_Q in $\mathcal{L}_n$ enthalten ist. Der Satz von Fubini liefert außerdem $I(\chi_{Q, \varepsilon}) = \prod_{j=1}^n I(\chi_{I_j, \varepsilon}) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j + \varepsilon)$. Wegen $\lim_m \|\chi_{Q, \frac{1}{m}} - \chi_Q\|_1 = 0$ ergibt sich damit für das Lebesgue-Integral von χ_Q nach Definition der Wert

$$\int_{\mathcal{L}} \chi_Q(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} I(\chi_{Q, \frac{1}{m}}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n (b_j - a_j + \frac{1}{m}) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) = v(Q).$$

zu (ii) Abgesehen von einer (Jordanschen) Nullmenge stimmt die Treppenfunktion f mit $g = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_K \chi_K$ überein. Nach Teil (i), und weil $\mathcal{L}_n$ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist, liegt die Funktion g in $\mathcal{L}_n$. Nach Satz ... liegt damit auch f in $\mathcal{L}_n$, und die Lebesgue-Integrale stimmen überein. Auf Grund der Linearität des Lebesgue-Integrals erhalten wir schließlich

$$\int_{\mathcal{L}} f(x) dx = \int_{\mathcal{L}} g(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_K \int_{\mathcal{L}} \chi_K(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c_K v(K). \quad \square$$

In den vorherigen Kapiteln hatten wir die Riemann-Integrierbarkeit zunächst nur für Funktionen auf Quadern definiert und die Definition später auf Funktionen mit einem Jordan-messbaren Definitionsbereich ausgedehnt. Entsprechend soll hier nun die Lebesgue-Integrierbarkeit für Funktionen mit allgemeinerem Definitionsbereich eingeführt werden.

Definition 6.19

- (i) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ wird **Lebesgue-messbar** genannt, wenn sie als abzählbare Vereinigung von endlich Lebesgue-messbaren Mengen darstellbar ist.
- (ii) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Wir bezeichnen eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ als **Lebesgue-integrierbar**, wenn die Nullfortsetzung $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ von f Lebesgue-integrierbar ist. Wir setzen in diesem Fall $\int_{A, \mathcal{L}} f(x) dx = \int_{\mathcal{L}} f_0(x) dx$.

Nun können wir den Zusammenhang zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral formulieren und beweisen.

Satz 6.20

- (i) Jede Riemann-integrierbare Funktion auf einem Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-Integrierbar, und das Riemann-Integral stimmt mit dem Lebesgue-Integral überein.
- (ii) Jede Jordan-messbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist endlich Lebesgue-messbar, und der Jordan-Inhalt $v(A)$ stimmt mit dem Lebesgue-Maß $v_{\mathcal{L}}(A)$ überein.

Beweis: Offenbar folgt Teil (ii) sofort aus Teil (i), denn nach Definition ist der Jordan-Inhalt von A gleich dem Riemann-Integral über die charakteristische Funktion χ_A , und das Lebesgue-Maß gleich dem Lebesgue-Integral über χ_A . Zum Beweis von (i) sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dabei können wir uns auf den Fall $f \geq 0$ beschränken, denn aus der Lebesgue-Integrierbarkeit und der Übereinstimmung der Integrale für f^+ und f^- folgen direkt die entsprechenden Aussagen für f .

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben. Auf Grund der Riemann-Integrierbarkeit gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q mit $S_f^+(\mathcal{Z}) - S_f^-(\mathcal{Z}) < \varepsilon$. Wir definieren zwei Treppenfunktionen $g, h : Q \rightarrow \mathbb{R}$, indem wir für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ und jeden Punkt $x \in K^\circ$ jeweils $g(x) = c_{K,f}^-$ und $h(x) = c_{K,f}^+$ setzen. Für alle Punkte $x \in Q$, die nicht im Inneren eines Teilquaders K liegen, setzen wir $g(x) = h(x) = f(x)$. Dann gilt $0 \leq g \leq f \leq h$. Nach Lemma 6.18 gilt $g, h \in \mathcal{L}_n$. Jede Majorante von h ist offenbar auch eine Majorante von f . Dies zeigt, dass f zumindest in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ enthalten ist. Wegen $f - g \leq h - g$ folgt außerdem

$$\|f - g\|_1 \leq \|h - g\|_1 = \int_{\mathcal{L}} (h - g)(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} (c_{K,f}^+ - c_{K,f}^-) v(K) = S_f^+(\mathcal{Z}) - S_f^-(\mathcal{Z}) < \varepsilon.$$

Wählen wir nun für jedes $m \in \mathbb{N}$ jeweils eine Zerlegung $\mathcal{Z}_m$, so dass die Differenz von Ober- und Untersumme durch $\frac{1}{m}$ beschränkt ist, und bilden wir die entsprechenden Treppenfunktionen g_m und f_m , dann gilt $\lim_n \|f - g_m\|_1 = 0$, und wir erhalten $f \in \mathcal{L}_n$ nach Proposition 6.12. Das Riemann-Integral von f liegt jeweils zwischen der Unter- und der Obersumme von f bezüglich $\mathcal{Z}_m$, also zwischen dem Lebesgue-Integralen von g_m und h_m . Wegen $g_m \leq f \leq h_m$ liegt das Riemann-Integral gilt nach Proposition 6.13 (iii) dasselbe auch für das Lebesgue-Integral von f . Weil die Differenz von Unter- und Obersumme für $m \rightarrow \infty$ gegen null läuft, folgt daraus mit dem Sandwich-Lemma die Übereinstimmung von Riemann- und Lebesgue-Integral von f . $\square$

Auf Grund dieses Satzes werden wir von nun an in der Notation nicht mehr zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral bzw. Jordan-Inhalt und Lebesgue-Maß unterscheiden und den Index $\mathcal{L}$ entsprechend weglassen. Eine unmittelbare Konsequenz des Satzes ist auch die Übereinstimmung des Riemann-Integrals auf einer Jordan-messbaren Menge mit dem Lebesgue-Integral auf dieser Menge.

Kommen wir nun zum Beweis zweier wichtiger Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral.

Proposition 6.21 Sei (g_k) eine Folge in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_1 < +\infty$. Dann gilt

- (i) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$ konvergiert fast überall.
- (ii) Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass fast überall die Gleichung $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ erfüllt ist. Dann liegt g in $\widehat{\mathcal{L}}_n$, und es gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| g - \sum_{k=1}^m g_k \right\|_1 = 0.$$

- (iii) Gilt $g_k \in \mathcal{L}_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann folgt $g \in \mathcal{L}_n$ und

$$\int g(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int g_k(x) dx.$$

Beweis: zu (i) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ die Menge der Punkte, in denen die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$ divergiert. Dann gilt $\chi_D \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |g_k|$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Nach Proposition 6.7 gilt $\|\chi_D\|_1 \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_1$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und auf Grund der Gleichung $\lim_m \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_1 = 0$ folgt daraus $\|\chi_D\|_1 = 0$. Also ist D eine Lebesguesche Nullmenge.

zu (ii) Nach Voraussetzung gilt $|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$ fast überall. Auf Grund der Vorbemerkung können wir Proposition 6.7 auch in dieser Situation anwenden und erhalten $g \in \widehat{\mathcal{L}}_n$. Wegen $\lim_m \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_1 = 0$ und $\|g - \sum_{k=1}^m g_k\|_1 \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_1$ gilt auch die zweite Aussage.

zu (iii) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{k=1}^m g_k$ in $\mathcal{L}_n$ erhalten, es gibt deshalb ein $f_m \in \mathcal{C}_n$ mit der Eigenschaft $\|\sum_{k=1}^m g_k - f_m\|_1 < \frac{1}{m}$. Ist nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann können wir $m \in \mathbb{N}$ so wählen, dass sowohl $\frac{1}{m} < \frac{1}{2}\varepsilon$ als auch die Ungleichung $\sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_1 < \frac{1}{2}\varepsilon$ gilt. Es folgt dann

$$\|g - f_m\|_1 \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_1 + \left\| \sum_{k=1}^m g_k - f_m \right\|_1 < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Daraus folgt sowohl die Lebesgue-Integrierbarkeit von g als auch die Gleichung

$$\int g(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \int g_k(x) dx. \quad \square$$

Satz 6.22 (Satz von Beppo Levi über die monotone Konvergenz)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine fast überall monoton wachsende Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Folge der Integrale $\int_A f_m(x) dx$ beschränkt ist. Dann gibt es eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ fast überall gegen die Funktion f konvergiert, mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_A f_m(x) dx = \int_A f(x) dx.$$

Beweis: Offenbar können wir uns beim Beweis auf den Fall $A = \mathbb{R}^n$ beschränken, indem wir die Elemente der Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ durch ihre Nullfortsetzungen ersetzen. Sei die Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ definiert durch $g_1 = f_1$ und $g_m = f_m - f_{m-1}$ für $m \geq 2$ und $c \in \mathbb{R}^+$ eine obere Schranke für die Integrale über f_m . Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^m \|g_k\|_1 = \|f_1\|_1 + \sum_{k=2}^m \int_{\mathbb{R}^n} (f_k - f_{k-1})(x) dx = \|f_1\|_1 + \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) dx \leq 2\|f_1\|_1 + c.$$

Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|_1$ ist also konvergent, außerdem gilt $f_m = \sum_{k=1}^m g_k$ für alle $m \in \mathbb{N}$ nach Definition der Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Wir können somit Proposition 6.21 anwenden und erhalten die beiden gewünschten Aussagen. $\square$

Das Beispiel der Folge $(\chi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ vom Anfang dieses Kapitels zeigt, dass ein entsprechender Satz für Riemann-integrierbare Funktionen falsch ist.

Der Satz über die monotone Konvergenz gilt auch für monoton fallende Folgen Lebesgue-integrierbarer Funktionen: Man erhält ihn dadurch, dass man den ursprünglichen Satz auf die Folge $(-f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ anwendet. Hierbei muss man dann natürlich fordern, dass die Folge der Integrale nach unten beschränkt ist.

Satz 6.23 (Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$, die fast überall gegen eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Sei ferner $g : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion mit $|f_m| \leq g$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann ist auch f Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_A f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A f_m(x) dx.$$

Beweis: Wie beim Beweis des Satzes von Beppo-Levi können wir uns auf den Fall $A = \mathbb{R}^n$ beschränken. Nach Abänderung der Funktionen f_m , f und g auf einer Nullmenge können wir zusätzlich davon ausgehen, dass $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ überall gegen f konvergiert. Nun definieren wir für alle $m, \nu \in \mathbb{N}$ die Funktion $g_{m,\nu} = \max\{f_m, f_{m+1}, \dots, f_{m+\nu}\}$. Mit den f_m sind auch die $g_{m,\nu}$ integrierbar. Definieren wir $g_m(x) = \lim_{\nu} g_{m,\nu}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dann gilt $g_m = \sup\{f_i \mid i \geq m\}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Die Funktionenfolge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert also monoton wachsend gegen g_m , und die Folge

der Integrale ist durch $\int g(x) dx$ beschränkt. Aus dem Satz 6.22 von Beppo Levi folgt nun, dass alle g_m Lebesgue-integrierbar sind, und dass jeweils

$$\int g_m(x) dx = \lim_{v \rightarrow \infty} \int g_{m,v}(x) dx \quad \text{gilt.}$$

Die Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert monoton fallend gegen f und ist betragsmäßig ebenfalls durch das Integral über g beschränkt. Wir können Satz 6.22 also erneut anwenden und erhalten sowohl $f \in \mathcal{L}_n$ als auch die Gleichung

$$\int f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int g_m(x) dx.$$

Sei schließlich für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Funktion h_m definiert durch $h_m(x) = \inf \{f_i(x) \mid i \geq m\}$. Genau wie zuvor zeigt man, dass die h_m alle Lebesgue-integrierbar sind und $\int f(x) dx = \lim_m \int h_m(x) dx$ gilt. Wenden wir nun das Lebesgue-Integral auf die Ungleichungen $h_m \leq f_m \leq g_m$ an und betrachten den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$, dann erhalten wir insgesamt die gewünschte Gleichung $\int f(x) dx = \lim_m \int f_m(x) dx$. $\square$

Wir leiten aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz noch zwei wichtige Folgerungen ab: Die Stetigkeit parametrisierter Integrale und die Vertauschbarkeit von Lebesguescher Integration mit partieller Differentiation. Beide Ergebnisse sind für Riemann-Integrale nur sehr mühsam unter stärkeren Voraussetzungen erzielbar.

Satz 6.24 Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, $x_0 \in X$ und $f : A \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften.

- (i) Die Funktion $A \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t, x)$ ist Lebesgue-integrierbar für alle $x \in X$.
- (ii) Es gibt eine nicht-negative, Lebesgue-integrierbare Funktion g auf A , so dass für alle $x \in X$ jeweils $|f(t, x)| \leq g(t)$ erfüllt ist, für fast alle $t \in A$.
- (iii) Die Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(t, x)$ ist für fast alle $t \in A$ stetig in x_0 .

Dann ist die Funktion $F(x) = \int_A f(t, x) dt$ stetig in x_0 .

Beweis: Sei $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim_m x_m = x_0$. Wir definieren eine Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ reellwertiger Funktionen durch $f_m(t) = f(t, x_m)$ für alle $t \in A$ und $m \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $f_0(t) = f(t, x_0)$. Auf Grund der Voraussetzung (iii) konvergiert $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ fast überall punktweise gegen f_0 . Wegen (i) handelt es sich um eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen, und wegen (ii) gilt $|f_m| \leq g$ fast überall, für jedes $m \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz 6.23 über die majorisierte Konvergenz gilt somit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F(x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A f(t, x_m) dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A f_m(t) dt = \int_A f_0(t) dt = \int_A f(t, x_0) dt = F(x_0).$$

Damit ist die Stetigkeit von F in x_0 bewiesen. $\square$

Für den folgenden Satz legen wir die folgende Notation fest: Ist V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum, $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig und $f : A \times U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dann bezeichnen wir für jeden Punkt $(t, x) \in A \times U$ und jedes $v \in V$ durch $\partial_v f(t, x)$ die Richtungsableitung von f nach v , sofern diese existiert.

Satz 6.25 Sei V ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum, $U \subseteq V$ offen, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $f : A \times U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir setzen voraus, dass f die folgenden Eigenschaften besitzt.

- (i) Für alle $x \in U$ ist die Funktion $A \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t, x)$ Lebesgue-integrierbar.
- (ii) Es gibt eine Nullmenge $N \subseteq A$ und eine nicht-negative, Lebesgue-integrierbare Funktion g auf A , so dass die Richtungsableitung $\partial_v f(t, x)$ für alle $t \in A \setminus N$ und alle $x \in U$ existiert und jeweils $|\partial_v f(t, x)| \leq g(t)$ erfüllt ist.

Dann besitzt $F(x) = \int_A f(t, x) dt$ auf ganz U eine Richtungsableitung nach v , und es gilt

$$\partial_v F(x) = \int_A \partial_v f(t, x) dt \quad \text{für alle } x \in U.$$

Beweis: Sei $x_0 \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass die offene Kugel vom Radius r um x_0 ganz in U enthalten ist. Sei $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 < |h_m| < r$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\lim_m h_m = 0$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ definieren wir eine reellwertige Funktion f_m auf A durch

$$f_m(t) = \frac{1}{h_m} (f(t, x_0 + h_m v) - f(t, x_0)).$$

Wegen (i) ist jedes f_m Lebesgue-integrierbar. Nach Definition der Richtungsableitung $\partial_v f$ und auf Grund der Voraussetzung (ii) konvergiert $f_m(t)$ außerdem für alle $t \in A \setminus N$ gegen $\partial_v f(t, x_0)$. Nach dem Mittelwertsatz für Richtungsableitungen existiert für alle $t \in A \setminus N$ jeweils ein $\theta_{t,m} \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta_{t,m} < 1$ und $f_m(t) = \partial_v f(t, x_0 + \theta_{t,m} h_m v)$. Daraus folgt $|f_m(t)| \leq g(t)$ für alle $t \in A \setminus N$. Insgesamt ist damit Satz 6.23 über die majorisierte Konvergenz anwendbar. Demnach ist die Funktion $t \mapsto \partial_v f(t, x_0)$ auf A Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_A \partial_v f(t, x_0) dt &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A f_m(t) dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{h_m} \left(\int_A f(t, x_0 + h_m v) dt - \int_A f(t, x_0) dt \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{h_m} (F(x_0 + h_m v) - F(x_0)) = \partial_v F(x_0). \end{aligned} \quad \square$$

Ein alternativer Weg zum Lebesgue-Integral:

Komplettierung des Raums $\mathcal{R}_n$ der Riemann-integrierbaren Funktionen

Ausgangspunkt bei unserer Konstruktion des Raums $\mathcal{L}_n$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen war der Raum $\mathcal{C}_n$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger gewesen. Mit dem Riemann-Integral hatten wir eine lineare Abbildung $I : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert und diese auf $\mathcal{L}_n$ ausgedehnt. Allerdings konnten wir ja schon vorher einer viel größeren Klasse von Funktionen als $\mathcal{C}_n$ ein Integral zuordnen: Wie wir aus § 2 wissen, kann eine Riemann-integrierbare Funktionen durchaus unendlich viele (sogar überabzählbar viele) Unstetigkeitsstellen haben. Es sich die Frage, warum wir unser Integral zunächst auf $\mathcal{C}_n$ eingeschränkt haben, um es dann anschließend über den bereits vorhandenen Raum hinaus auszudehnen. Das wir diesen Weg gewählt haben, liegt allein an den verwendeten Hilfsmitteln: Um die Stetigkeit der Integralfunktion auf unserem Funktionenraum $\mathcal{C}_n$ nachzuweisen, haben wir den Satz 6.9 von Dini verwendet, der eben nur für stetige Funktionen gültig ist.

An Stelle von $\mathcal{C}_n$ betrachten wir nun den Raum $\mathcal{R}_n$ aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und der Eigenschaft, dass $f|_Q$ für eine Quader Q mit $Q \supseteq \text{supp}(f)$ Riemann-integrierbar ist. (Wie wir in § 3 gesehen haben, ist $f|_{Q'}$ dann für *jeden* Quader Q' mit $Q' \supseteq \text{supp}(f)$ Riemann-integrierbar.) In diesem Anhang soll gezeigt werden, dass das Riemann-Integral direkt von $\mathcal{R}_n$ auf $\mathcal{L}_n$ ausgedehnt werden kann, ohne den Umweg über $\mathcal{C}_n$. Dazu muss lediglich der Satz von Dini durch ein passendes Hilfsmittel ersetzt werden, in diesem Fall die monotone Konvergenz des Riemann-Integrals. Ein Vorteil dieser Methode besteht darin, dass dann sofort klar ist, dass jede Riemann-integrierbare Funktion Lebesgue-integrierbar ist, und dass die beiden Integrale auf $\mathcal{R}_n$ übereinstimmen. Insbesondere kann also auf den ziemlich technischen Beweis von Lemma 6.18 verzichtet werden.

Abgesehen von der Ersetzung des Satzes von Dini bleibt die Beweisführung nahezu unverändert. Bei der folgenden Proposition muss lediglich der Nachweis der Verbandseigenschaft angepasst werden.

Proposition 6.26

- (i) Die Menge $\mathcal{R}_n$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, mit der punktweisen Addition und Multiplikation.
- (ii) Die Menge $\mathcal{R}_n$ ist bezüglich der Halbordnung definiert durch $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq g(x)$ ein Verband, mit $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ und $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- (iii) Die Abbildung $I : \mathcal{R}_n \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int f(x) dx$ gegeben durch das Riemann-Integral ist ein positives lineares Funktional, und es gilt $|I(f)| \leq I(|f|)$ für alle $f \in \mathcal{R}_n$.

Beweis: zu (i) Seien $f, g \in \mathcal{R}_n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann existiert ein Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $Q \supseteq \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$ und der Eigenschaft, dass die Einschränkungen $f|_Q$ und $g|_Q$ Riemann-integrierbar sind. Nach Proposition 1.9 sind auch $(f + g)|_Q$ und $(\lambda f)|_Q$ Riemann-integrierbar, und es folgt $f + g \in \mathcal{R}_n$ sowie $\lambda f \in \mathcal{R}_n$.

zu (ii) Seien $f, g \in \mathcal{R}_n$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $Q \supseteq \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der Riemann-Integrierbarkeit von f und g existieren Zerlegungen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ von Q mit $S_f^+(\mathcal{Z}) - S_f^-(\mathcal{Z}) < \varepsilon$ und $S_g^+(\mathcal{Z}') - S_g^-(\mathcal{Z}') < \varepsilon$. Nach Übergang zu einer gemeinsamen Verfeinerung von f und g dürfen wir nach Lemma 1.5 annehmen, dass $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ übereinstimmen.

Um zu zeigen, dass auch die Funktionen $u, v : Q \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $u = \min\{f, g\}$ und $v = \max\{f, g\}$ Riemann-integrierbar sind, überprüfen wir, dass die Differenzen $S_u^+(\mathcal{Z}) - S_u^-(\mathcal{Z})$ und $S_v^+(\mathcal{Z}) - S_v^-(\mathcal{Z})$ jeweils durch $\max\{S_f^+(\mathcal{Z}) - S_f^-(\mathcal{Z}), S_g^+(\mathcal{Z}) - S_g^-(\mathcal{Z})\}$ abgeschätzt werden können. Wir beschränken uns auf die Funktion u , weil die Argumentation

für v vollkommen analog verläuft. Offenbar genügt es, für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ jeweils die Ungleichung $c_{K,u}^+ - c_{K,u}^- \leq \max\{c_{K,f}^+ - c_{K,f}^-, c_{K,g}^+ - c_{K,g}^-\}$ zu überprüfen. Dafür wiederum reicht es, die Ungleichungen $c_{K,u}^+ \leq \min\{c_{K,f}^+, c_{K,g}^+\}$ und $c_{K,u}^- \geq \min\{c_{K,f}^-, c_{K,g}^-\}$ zu verifizieren. Denn im Fall $c_{K,f}^- \leq c_{K,g}^-$ gilt dann $c_{K,u}^+ - c_{K,u}^- \leq c_{K,f}^+ - c_{K,f}^-$, und im Fall $c_{K,f}^- \geq c_{K,g}^-$ entsprechend $c_{K,u}^+ - c_{K,u}^- \leq c_{K,g}^+ - c_{K,g}^-$.

Für jedes $x \in K$ gilt $u(x) \leq f(x) \leq \sup f(K) = c_{K,f}^+$ und $u(x) \leq g(x) \leq \sup g(K) = c_{K,g}^+$. Dies zeigt, dass $\min\{c_{K,f}^+, c_{K,g}^+\}$ eine obere Schranke von $u(K)$ ist, und es folgt $c_{K,u}^+ = \sup u(K) \leq \min\{c_{K,f}^+, c_{K,g}^+\}$. Für jeden Beweis der zweiten Ungleichung bemerken wir, dass für jedes $x \in K$ jeweils $u(x) = f(x)$ oder $u(x) = g(x)$ gilt. Im ersten Fall ist $u(x) \geq \inf f(K) = c_{K,f}^-$, im zweiten Fall $u(x) \geq \inf g(K) = c_{K,g}^-$. Dies zeigt, dass $\min\{c_{K,f}^-, c_{K,g}^-\}$ eine untere Schranke von $u(K)$ ist, und es folgt $c_{K,u}^- = \inf u(K) \geq \min\{c_{K,f}^-, c_{K,g}^-\}$, wie gewünscht.

zu (iii) Dass I linear ist, folgt direkt aus Proposition 1.9, ebenso die Positivität. Die Gültigkeit der Ungleichung $|I(f)| \leq I(|f|)$ hatte sich als Nebenprodukt beim Beweis von Lemma 4.14 ergeben. $\square$

Definition 6.27 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{R}_n$ mit $g_m \geq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} g_m$ als **Majorante** von f , wenn die Bedingungen

$$|f| \leq \sum_{m=1}^{\infty} g_m \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} I(g_m) < +\infty$$

erfüllt sind. Die reelle Zahl $\sum_{m=1}^{\infty} I(g_m)$ bezeichnen wir dann als **Obersumme** von f .

Wieder bezeichnen wir mit $\widehat{\mathcal{L}}_n$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die eine Majorante besitzen, und für jedes solche f mit $\|f\|_1$ das Infimum der Menge aller Obersummen von f . Hierzu ist anzumerken

Proposition 6.28 Sowohl der $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\widehat{\mathcal{L}}_n$ als auch die Abbildung $\|\cdot\|_1$ stimmen mit den vorherigen Definitionen, bei denen von $\mathcal{C}_n$ statt von $\mathcal{R}_n$ ausgegangen wurde, überein.

Beweis: Um zu zeigen, dass die Definition von $\widehat{\mathcal{L}}_n$ unverändert bleibt, müssen wir nachweisen, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann eine Majorante bestehend aus $\mathcal{C}_n$ -Funktionen besitzt, wenn eine Majorante bestehend aus $\mathcal{R}_n$ -Funktionen existiert. Um die Definitionen von $I(\cdot)$ und $\|\cdot\|_1$ bezüglich $\mathcal{C}_n$ und $\mathcal{R}_n$ auseinander halten zu können, verwenden wir temporär die Bezeichnungen $I^{\mathcal{C}_n}(\cdot)$, $I^{\mathcal{R}_n}(\cdot)$, $\|\cdot\|_1^{\mathcal{C}_n}$ und $\|\cdot\|_1^{\mathcal{R}_n}$.

Die Implikationsrichtung „ $\Rightarrow$ “ ist wegen $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{R}_n$ offensichtlich. Für den Nachweis von „ $\Leftarrow$ “ sei nun $\sum_{m=1}^{\infty} g_m$ eine $\mathcal{R}_n$ -Majorante von f . Dies bedeutet im Einzelnen, dass $|f| \leq \sum_{m=1}^{\infty} g_m$ gilt, dass jedes g_m in $\mathcal{R}_n$ enthalten ist, und dass die Summe $\sum_{m=1}^{\infty} I^{\mathcal{R}_n}(g_m)$ endlich ist. Nach Satz 6.20 ist jede Riemann-integrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar, also insbesondere in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ enthalten. Nach Proposition 6.13 (ii), und auf Grund der Übereinstimmung von Riemann- und Lebesgue-Integral, gilt jeweils $\|g_m\|_1^{\mathcal{C}_n} = \int_{\mathcal{L}} g_m(x) dx = I^{\mathcal{R}_n}(g_m)$. Somit ist auch die Summe $\sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|_1^{\mathcal{C}_n}$ endlich, und nach Proposition 6.7 besitzt f somit auch eine $\mathcal{C}_n$ -Majorante.

Kommen wir nun zur Übereinstimmung von $\|\cdot\|_1^{\mathcal{C}_n}$ und $\|\cdot\|_1^{\mathcal{R}_n}$. Die Ungleichung $\|f\|_1^{\mathcal{R}_n} \leq \|f\|_1^{\mathcal{C}_n}$ für jedes $f \in \widehat{\mathcal{L}}_n$ ist wiederum offensichtlich, weil jede $\mathcal{C}_n$ -Majorante auch eine $\mathcal{R}_n$ -Majorante ist und das Infimum bei Übergang zu einer größeren Menge von Obersummen nur kleiner werden kann. Für den Beweis von $\|f\|_1^{\mathcal{R}_n} \geq \|f\|_1^{\mathcal{C}_n}$ sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben. Nach Definition von $\|\cdot\|_1^{\mathcal{R}_n}$ existiert eine $\mathcal{R}_n$ -Majorante $\sum_{m=1}^{\infty} g_m$ von f mit $\sum_{m=1}^{\infty} I^{\mathcal{R}_n}(g_m) < \|f\|_1^{\mathcal{R}_n} + \varepsilon$.

Wie wir bereits festgestellt haben, gilt jeweils $I^{\mathcal{R}_n}(g_m) = \|g_m\|_1^{\mathcal{C}_n}$, und nach Definition von $\|\cdot\|_1^{\mathcal{C}_n}$ finden wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ jeweils eine $\mathcal{C}_n$ -Majorante $(h_{mk})_{k \in \mathbb{N}}$ von g_m mit $\sum_{k=1}^{\infty} I^{\mathcal{C}_m}(h_{mk}) < \|g_m\|_1^{\mathcal{C}_m} + 2^{-m}\varepsilon$. Insgesamt erhalten wir damit die Abschätzung

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} I^{\mathcal{C}_n}(h_{mk}) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|_1^{\mathcal{C}_m} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\varepsilon = \sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|_1^{\mathcal{C}_m} + \varepsilon = \sum_{m=1}^{\infty} I^{\mathcal{R}_n}(g_m) + \varepsilon \leq \|f\|_1^{\mathcal{R}_n} + 2\varepsilon.$$

Somit ist durch $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_{mk}$ eine $\mathcal{C}_n$ -Majorante von f gegeben, und es folgt $\|f\|_1^{\mathcal{C}_n} \leq \|f\|_1^{\mathcal{R}_n} + 2\varepsilon$. Weil ε beliebig klein gewählt werden kann, erhalten wir $\|f\|_1^{\mathcal{C}_n} \leq \|f\|_1^{\mathcal{R}_n}$, und insgesamt Gleichheit. $\square$

Auf Grund dieser Aussage ist klar, dass Proposition 6.7 unverändert gültig bleibt. Man hätte diese Proposition allerdings auch wortwörtlich genauso beweisen können wie zuvor, da beim Beweis der Unterschied zwischen $\mathcal{C}_n$ und $\mathcal{R}_n$ keine Rolle gespielt hat. Auch bei der folgenden Aussage ergeben sich im Beweis keinerlei Änderungen, abgesehen davon, dass $\mathcal{C}_n$ durchweg durch $\mathcal{R}_n$ ersetzt wird.

Folgerung 6.29

- (i) Ist $f \in \widehat{\mathcal{L}}_n$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, dann liegt auch $f g$ in $\widehat{\mathcal{L}}_n$, und es gilt $\|f g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_{\infty}$.
- (ii) Die Menge $\widehat{\mathcal{L}}_n$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, der $\mathcal{C}_n$ als Untervektorraum enthält, und $\|\cdot\|_1$ ist eine Halbnorm auf $\widehat{\mathcal{L}}_n$.

Kommen wir nun zum entscheidenden Hilfsmittel, dass bei unserer Konstruktion die Rolle des Satzes von Dini übernehmen wird. Den Satz von Dini können wir in unserer Situation nicht anwenden, weil die Elemente aus $\mathcal{R}_n$ in der Regel keine stetigen Funktionen sind.

Satz 6.30 (monotone Konvergenz des Riemann-Integrals)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer Riemann-integrierbarer Funktionen auf Q , die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. (Dies soll bedeuten, dass die Bedingungen $f_m \geq f_{m+1} \geq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\lim_m f_m(x) = 0$ für alle $x \in Q$ erfüllt sind.) Für die Folge der Riemann-Integrale gilt dann $\lim_m \int_Q f_m(x) dx = 0$.

Beweis: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $N_m \subseteq Q$ jeweils die Menge der Unstetigkeitsstellen von f_m . Auf Grund des Lebesgueschen Integrierbarkeitskriteriums, Satz 2.6, ist N_m jeweils eine Nullmenge. Also ist auch $N = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} N_m$ eine Nullmenge. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben. Für jedes $x \in Q \setminus N$ sei $m(x)$ jeweils der kleinste Index $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $f_m(x) < \varepsilon$ erfüllt ist. Auf Grund der Monotonie gilt dann $f_m(x) < \varepsilon$ für alle $m \geq m(x)$. Weil jedes f_m in x stetig ist, existiert jeweils ein offener Quader $A_x \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x \in A_x$, so dass die Ungleichung $f_m(y) < \varepsilon$ sogar für alle $y \in A_x \cap Q$ und alle $m \geq m(x)$ erfüllt ist.

Nach Definition der Nullmengen existiert außerdem eine Folge $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ offener Quader, so dass $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m \supseteq N$ und $\sum_{m=1}^{\infty} \nu(B_m) < \varepsilon$ erfüllt ist. Nun ist durch $(A_x)_{x \in Q \setminus N}$ zusammen mit $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von Q gegeben.

Auf Grund der Kompaktheit von Q kann aus dieser offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung gewählt werden, bestehend aus $A_{x_1}, \dots, A_{x_r}$ und $B_{m_1}, \dots, B_{m_s}$. Wir setzen $m_0 = \max\{m(x_i) \mid 1 \leq i \leq r\}$. Die angegebenen Eigenschaften bleiben offenbar erhalten, wenn wir die offenen Quader durch ihren Abschluss ersetzen, und diesen Abschluss jeweils mit Q schneiden.

Insgesamt kommen wir damit zu folgendem Ergebnis: Es existieren kompakte Quader $A_1, \dots, A_r \subseteq Q$ und $B_1, \dots, B_s \subseteq Q$, so dass $f_m(x) < \varepsilon$ für alle $m \geq m_0$ und alle $x \in A_i$ mit $1 \leq i \leq r$ gilt und außerdem die Bedingungen $\bigcup_{j=1}^s B_j \supseteq N$ und $\sum_{j=1}^s v(B_j) < \varepsilon$ erfüllt sind. Wir setzen $F = \bigcup_{i=1}^r A_i$; dann gilt $f_m(x) < \varepsilon$ für alle $x \in F$ und alle $m \geq m_0$. Weil f_1 als Riemann-integrierbare Funktion beschränkt und die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist, existiert außerdem ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit $f_m(x) < c$ für alle $x \in Q$ und alle $m \in \mathbb{N}$. Für jedes $m \geq m_0$ erhalten wir nun wegen $Q = F \cup \bigcup_{j=1}^s B_j$ die Abschätzung

$$\int_Q f_m(x) dx \leq \int_F f_m(x) dx + \sum_{j=1}^s \int_{B_j} f_m(x) dx \leq \varepsilon v(F) + c \sum_{j=1}^s v(B_j) \leq \varepsilon v(F) + c\varepsilon \leq (v(Q) + c)\varepsilon.$$

Weil ε beliebig klein gewählt werden kann, ist damit $\lim_m \int_Q f_m(x) dx = 0$ nachgewiesen. $\square$

Proposition 6.31

- (i) Für jedes $f \in \mathcal{R}_n$ mit $f \geq 0$ gilt $I(f) = \|f\|_1$.
- (ii) Das positive lineare Funktional $I : \mathcal{R}_n \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_1$.

Beweis: zu (i) Definieren wir die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}_n$ durch $f_1 = f$ und $f_m = 0$ für alle $m \geq 2$, dann ist $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ offenbar eine Majorante von f , und $\sum_{m=1}^{\infty} f_m = f$ eine Obersumme. Daraus folgt $\|f\|_1 \leq I(f)$. Wir beweisen nun die Ungleichung $I(f) \leq \|f\|_1$ und bezeichnen dazu mit $\sum_{m=1}^{\infty} g_m$ eine beliebig vorgegebene Majorante von f . Für jedes $m \in \mathbb{N}$ definieren wir $h_m = f \wedge (\sum_{k=1}^m g_k)$. Nach Proposition 6.26 (ii) ist auch h_m jeweils in $\mathcal{R}_n$ enthalten. Offenbar gilt $\text{supp}(h_m) \subseteq \text{supp}(f)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, und die Folge $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Außerdem konvergiert sie punktweise gegen f . Sind nämlich $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann existiert wegen $\sum_{m=1}^{\infty} g_m(x) \geq f(x)$ ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^M g_k(x) > f(x) - \varepsilon$ für alle $m \geq M$, und es folgt $f(x) - \varepsilon < h_m(x) \leq f(x)$ für diese m .

Definieren wir eine neue Funktionenfolge $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$ durch $k_m = f - h_m$, dann gilt $\text{supp}(k_m) \subseteq \text{supp}(f)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, die Folge konvergiert monoton fallend punktweise gegen null, und sie besteht aus nicht-negativen Funktionen. Wir können somit Satz 6.30 über die monotone Konvergenz des Riemann-Integrals anwenden, und es folgt $\lim_m I(k_m) = 0$, was zu $\lim_m I(h_m) = I(f)$ äquivalent ist. Außerdem gilt $h_m \leq \sum_{k=1}^m g_k$ und somit $I(h_m) \leq \sum_{k=1}^m I(g_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} I(g_k)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Daraus wiederum folgt $I(f) \leq \sum_{m=1}^{\infty} I(g_m)$. Weil die Majorante $\sum_{m=1}^{\infty} g_m$ von f beliebig vorgegeben war, erhalten wir $I(f) \leq \|f\|_1$, wie gewünscht.

zu (ii) Dass dies unmittelbar aus Teil (i) folgt, zeigt man wortwörtlich wie im Beweis von Proposition 6.10 (ii). $\square$

Damit sind wir erneut an unserem Ziel angekommen: Wir definieren den Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}_n$ als den Abschluss, diesmal von $\mathbb{R}_n$, im halbnormierten Raum $(\widehat{\mathcal{L}}_n, \|\cdot\|_1)$. Wieder können wir Satz 6.4 anwenden und erhalten eine eindeutige stetige Fortsetzung $\bar{I}$ der Funktion $I : \mathcal{R}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{L}_n$. Nach dieser Definition ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nun genau dann in $\mathcal{L}_n$ enthalten, wenn f in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ liegt und eine Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}_n$ (an Stelle von $\mathcal{C}_n$) mit $\|f_m - f\|_1 = 0$ existiert. Das Lebesgue-Integral ist dann definiert durch $\int_{\mathcal{L}} f(x) dx = \lim_m I(f_m)$.

Durch Proposition 6.28 ist sichergestellt, dass unsere neue Konstruktion basierend auf dem Raum $\mathcal{R}_n$ denselben Raum $\mathcal{L}_n$ der Lebesgue-integrierbaren Funktionen liefert wie die Konstruktion im Hauptteil dieses Kapitels basierend auf dem Raum $\mathcal{C}_n$, und dass auch für jedes $f \in \mathcal{L}_n$ die zugeordneten Lebesgue-Integrale übereinstimmen.

Im Gegensatz zur $\mathcal{C}_n$ -basierten Konstruktion ist bei unserem neuen Ansatz von vornherein klar, dass jede Riemann-integrierbare Funktion Lebesgue-integrierbar ist, und dass die beiden Integrale übereinstimmen. Ist nämlich $f \in \mathcal{R}_n$ vorgegeben, und betrachten wir in $\mathcal{R}_n$ die konstante Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gegeben durch $f_m = f$ für alle $m \in \mathbb{N}$, dann gilt trivialerweise $\lim_m \|f_m - f\|_1 = \lim_m 0 = 0$ und $\int_{\mathcal{L}} f(x) dx = \lim_m I(f_m) = \lim_m I(f) = I(f)$. Der ziemlich komplizierte Beweis von Lemma 6.18, ebenso wie der Beweis von Satz 6.20, werden dadurch obsolet.

Literaturverzeichnis

- [Fo] Otto Forster, *Analysis 2*. vieweg studium - Grundkurs Mathematik.
- [He] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. 8. Auflage, Teubner-Verlag.
- [Hi] Stefan Hildebrandt, *Analysis 2*. Springer-Verlag 2002.
- [Ka] Winfried Kaballo, *Einführung in die Analysis III*. Spektrum Akademischer Verlag 1999.
- [Kö] Konrad Königsberger, *Analysis 2*. 2. Auflage, Springer-Verlag.