Ralf Gerkmann

Mathematisches Institut
Ludwig-Maximilians-Universität München

Vorlesung im Sommersemester 2022

Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Teil II: Funktionentheorie

Zusammenfassung

Gegenstand der Funktiontheorie sind die komplex differenzierbaren Funktionen. Die Definition der komplexen Ableitung einer Funktion verhält sich rein von ihrer Formulierung her vollkommen analog zur gewöhnlichen reellen Ableitung, die wir bereits im ersten Semester kennengelernt haben. Umso erstaunlicher ist es, wie fundamental sich holomorphe Funktionen, wie komplex differenzierbare Funktionen auch genannt werden, in ihren Eigenschaften von den reell differenzierbaren unterscheiden. Beispielsweise besagt das sog. Permanenzprinzip, dass eine holomorphe Funktion aus einem winzigen Teil ihrer Werte vollständig rekonstruiert werden kann (wodurch sich die Namensgebung "holomorph" erklären lässt). Eine weitere Besonderheit der holomorphen Funktionen besteht darin, dass sie sich in der Umgebung jedes Punktes ihres Definitionsbereichs in eine Potenzreihe entwickeln lassen.

Wir beginnen diesen Teil der Vorlesung mit der Definition der komplexen Differenzierbarkeit, wobei auch den Zusammenhang mit dem Begriff der totalen Ableitung untersuchen, der im letzten Semester eingef"uhrt wurde. Eine ganze wichtiger holomorpher Funktionen werden vorgestellt, darunter die komplexe Exponential- und Logarithmusfunktion, komplexe Wurzeln, die komplexen trigonometrischen Funktionen und die Arkusfunktionen. Neben der Potenzreihendarstellung werden wir eine weitere "aquivalente Charakterisierung der komplexen Differenzierbarkeit kennenlernen, die im sog. Cauchyschen Integralsatz zum Ausdruck kommt.

Aus dieser Charakterisierung leiten sich weitere wichtige Sätze der Funktionentheorie ab, nämlich die Cauchysche Intgegralformel, der Satz von Liouville, das Maximumsprinzip und der Satz von der Gebietstreue. Weitere wichtige Themen dieses Vorlesungsteils sind holomorphe Funktionen mit isolierten Singularitäten und der Residuensatz. Durch Letzteren wird uns unter anderem ein neuer Ansatz zur Berechnung reellwertiger Integrale zur Verfügung gestellt.

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Komplexe Differenzierbarkeit

Zusammenfassung. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to C$ wird *komplex differenzierbar* an einer Stelle $w \in \mathbb{C}$ genannt, wenn der Differenzialquotient $(f(z) - f(w))/(z - w)$ einen Grenzwert für $z \to w$ besitzt. Zur Unterscheidung spricht man von lediglich *reeller Differenzierbarkeit*, wenn f als Funktion auf dem zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ total differenzierbar im Sinne der Analysis mehrerer Variablen ist. Ob eine reell differenzierbare Funktion auch komplex differenzierbar ist, lässt sich an den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erkennen. Eine Funktion, die in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs komplex differenzierbar ist, nennt man auch *holomorph*.

Viele wichtige Beispiele komplex differenzierbarer Funktionen sind durch Potenzreihen gegeben. Später werden wir sehen, dass darüber hinaus jede komplex differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ zumindest lokal in eine komplexe Potenzreihe entwickelt werden kann. Wir wiederholen kurz den Begriff der Potenzreihe und die Definition ihres Konvergenzradius; diese Dinge sind im Wesentlichen schon aus der Analysis einer Variablen bekannt, wenngleich wir uns dort auf reellwertige Funktionen konzentriert haben. Anschließend zeigen wir, dass Funktionen, die durch eine konvergente komplexe Potenzreihe definiert sind, stets komplex differenzierbar sind, und dass dann auch die Ableitung als Potenzreihe darstellbar ist. Zum Abschluss betrachten wir eine bekannter Beispiele holomorpher Funktionen.

Wichtige Grundbegriffe

- Argument und Polarkoordinaten von $z \in \mathbb{C}$
- Folgenkonvergenz und Cauchyfolgen in $\mathbb{C}$
- Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit bei komplexen Funktionen
- komplexe Differenzierbarkeit in einem Punkt, holomorphe Funktion
- reelle Differenzierbarkeit in einem Punkt
- partielle Ableitungen und Wirtinger-Ableitungen
- formale Ableitung einer Potenzreihe
- Exponential-, Logarithmus-, Wurzel-, Sinus-, Kosinus- und Arkusfunktionen im Komplexen

Zentrale Sätze

- Vollständigkeit von $\mathbb{C}$
- komplexe Ableitungsregeln
- Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen
- komplexe Differenzierbarkeit von Potenzreihenfunktionen
- Funktionen, die sich durch komplexe Potenzreihen definieren lassen, sind komplex differenzierbar.
- Die komplexe Ableitung ist dann ebenfalls durch eine Potenzreihe darstellbar.
- formale Ableitung einer Potenzreihe
- Anwendungsbeispiel: Expontential-, Sinus und Kosinusfunktion im Komplexen

Zu Beginn wiederholen wir die bekannten Fakten über komplexe Zahlen aus der Analysis einer Variablen.

(i) Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bilden einen Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$.

(ii) Es gibt ein ausgezeichnetes Element $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $i^2 = -1$, die sogenannte ***imaginäre Einheit***.

(iii) Jedes Element $z \in \mathbb{C}$ kann auf eindeutige Weise in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Man nennt a den ***Real-*** $\mathrm{Re}(z)$ und b den ***Imaginärteil*** $\mathrm{Im}(z)$ von z.

(iv) Auf $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\iota : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\iota(a + ib) = a - ib$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, die sogenannte ***komplexe Konjugation***. Es gilt $\iota(z+w) = \iota(z) + \iota(w)$, $\iota(zw) = \iota(z)\iota(w)$ und $\iota(\iota(z)) = z$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ sowie $\iota(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ nennt man $\iota(z)$ die zu z ***konjugierte*** komplexe Zahl. An Stelle von $\iota(z)$ ist auch die Schreibweise $\bar{z}$ für die konjugierte komplexe Zahl gebräuchlich.

(v) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ nennt man $|z| = \sqrt{z\bar{z}} \in \mathbb{R}_+$ den ***komplexen Absolutbetrag*** (kurz Betrag) von z. Ist $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt $|z|^2 = a^2 + b^2$. Weiter gilt $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$, $|zw| = |z||w|$ und $|z + w| \le |z| + |w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Satz 1.1 Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $0 \le \varphi < 2\pi$, das sogenannte ***Argument*** $\arg(z)$ von z, mit der Eigenschaft

$$z \quad = \quad |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Das Paar $(|z|, \varphi)$ bezeichnet man als die ***Polarkoordinaten*** von z.

Beweis: Sei $\rho : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\; \to \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$, $(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ die Polarkoordinaten-Abbildung aus der Analysis mehrerer Variablen. Wie dort gezeigt wurde, ist ρ eine Bijektion. Ist $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, dann gibt es also Paar (r, φ) mit $a = r\cos\varphi$ und $b = r\sin\varphi$, und es gilt

$$r^2 \quad = \quad (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 \quad = \quad a^2 + b^2 \quad = \quad |z|^2 \quad ,$$

also $r = |z|$. Dies beweist die Existenz von φ. Ist nun $\psi \in [0, 2\pi[$ ein weiteres Element mit $z = |z|(\cos\psi + i\sin\psi)$, dann liefert der Vergleich von Real- und Imaginärteil $|z|\cos\varphi = \mathrm{Re}(z) = |z|\cos\psi$ und $|z|\sin\varphi = \mathrm{Im}(z) = |z|\sin\psi$, also $\rho(|z|, \varphi) = \rho(|z|, \psi)$. Auf Grund der Injektivität von ρ folgt $\varphi = \psi$. Damit ist die Eindeutigkeit bewiesen. □

Bereits in der Analysis einer Variablen wurde definiert, dass eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gegen eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ ***konvergiert***, also

$$z \quad = \quad \lim_{n \to \infty} z_n$$

gilt, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|z_n - z| < \varepsilon$ für alle z_n mit $n \ge N$ erfüllt ist. Von einer ***Cauchyfolge*** in $\mathbb{C}$ spricht man, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|z_m - z_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \ge N$ gilt.

Proposition 1.2 Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ ein weiteres Element. Es sei $z_n = a_n + ib_n$ und $z = a + ib$ die Zerlegung der Zahlen in Real- und Imaginärteil, mit $a_n, b_n, a, b \in \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{C}$ gegen z.

(ii) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Ebenso ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beides Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind.

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Es gilt $z_n - z = (a_n - a) + i(b_n - b)$, also $|z_n - z|^2 = (a_n - a)^2 + (b_n - b)^2$ und somit $|a_n - a| \leq |z_n - z|$ und $|b_n - b| \leq |z_n - z|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

"$\Leftarrow$" Auch hier sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben. Auf Grund der Voraussetzung gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $|b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen $|z_n - z| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$ folgt $|z_n - z| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Also konvergiert $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gegen die Zahl z.

Der Beweis für die Cauchyfolgen verläuft analog, weshalb wir auf die Ausführung der Details verzichten. □

Aus der Analysis I ist bekannt, dass die Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ genau die konvergenten Folgen in $\mathbb{R}$ sind. In Verbindung mit dem soeben bewiesenen Satz folgt daraus unmittelbar

Satz 1.3 Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist ***vollständig***, d.h. die Cauchyfolgen in $\mathbb{C}$ sind genau die konvergenten Folgen.

Mit Hilfe des Konvergenzbegriffs können wir nun Stetigkeit und Grenzwerte für Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ definieren, wobei U eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{C}$ bezeichnet. Wir sagen, die Funktion f ist ***stetig*** im Punkt $z \in U$, wenn für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U, die gegen z konvergiert, jeweils

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) \quad = \quad f(z) \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Sei nun $w \in \mathbb{C} \setminus U$ und $b \in \mathbb{C}$. Wir bezeichnen b als ***Grenzwert*** der Funktion f für $z \to w$ und schreiben $\lim_{z\to w} f(z) = b$, wenn eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$ existiert und für jede solche Folge jeweils $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = b$ gilt.

Für jedes $w \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$ bezeichnen wir die Menge $B_r(w) = \{z \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r\}$ als ***offenen Ball*** vom Radius r um den Punkt w. Wird in der Ungleichung $|w - z| < r$ das "$<$" durch "$\leq$" ersetzt, dann sprechen wir von einem ***abgeschlossenen*** Ball, der mit $\bar{B}_r(w)$ bezeichnet wird. Wir bezeichnen eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ als ***offen***, wenn für jedes $z \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(z) \subseteq U$ existiert.

Als nächstes werden wir nun den Begriff der Differenzierbarkeit von den reellen auf die komplexen Zahlen übertragen. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $w \in U$. Dann können wir für jede Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ den ***Differenzialquotienten***

$$g(z) \quad = \quad \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

als komplexwertige Funktion auf $U \setminus \{w\}$ betrachten.

Definition 1.4 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $w \in U$. Wir bezeichnen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ als ***komplex differenzierbar*** im Punkt w, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

existiert. Wir bezeichnen diese gegebenenfalls als die ***komplexe Ableitung*** $f'(w)$ von f im Punkt w. Ist f in jedem Punkt $z \in U$ komplex differenzierbar, dann bezeichnen wir f als ***holomorphe Funktion*** auf der Menge U.

Genau wie in der Analysis einer Variablen beweist man die folgenden Rechenregeln für komplexe Ableitungen. Für die Abbildung $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$ gilt $\mathrm{id}'(z) = 1$, für alle $z \in \mathbb{C}$. Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konstant, gibt es also ein $w \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = w$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann folgt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Außerdem gilt

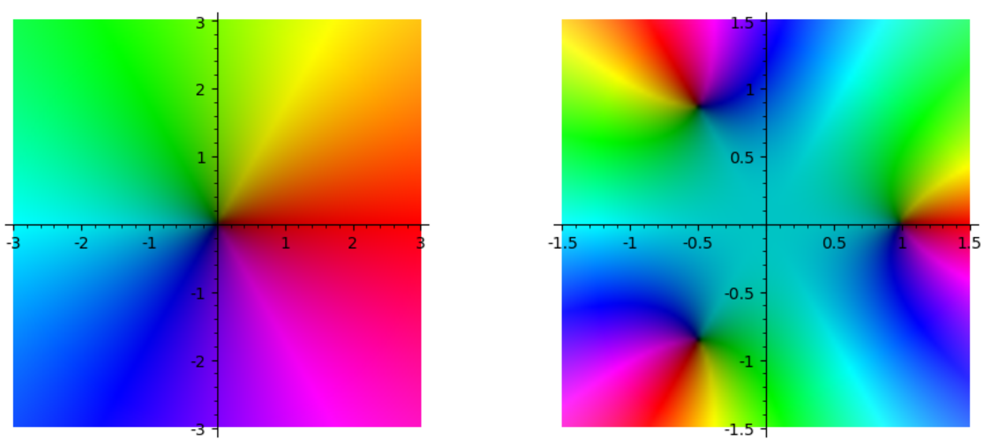
Proposition 1.5 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ Abbildungen. Sind f und g in einem Punkt $z \in U$ komplex differenzierbar, dann auch die Funktionen $f + g$ und fg. Es gilt

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z) \quad \text{und} \quad (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

Gilt darüber hinaus $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ im Punkt z komplex differenzierbar, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) \quad = \quad \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}.$$

Die Beweise sind wortwörtlich dieselben wie in der reellen Analysis, weshalb wir auf eine erneute Wiedergabe verzichten. Aus der Gültigkeit der Regeln ergibt sich unter anderem, dass alle Polynomfunktionen komplex differenzierbar sind.



Darstellung der komplexen Polynomfunktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto x^3 - 1$.
Die Helligkeit gibt jeweils den Absolutbetrag, die Farbe das Argument des Funktionswertes an. Punkte mit $\arg f(z) \approx 0$ werden rot, Punkt mit $\arg f(z) \approx \frac{1}{2}\pi$ hellgrün, Punkte mit $\arg f(z) \approx \pi$ türkis und Punkte mit $\arg f(z) \approx \frac{3}{2}\pi$ blauviolett dargestellt. Auf dem rechten Bild sind die drei Nullstellen des Polynoms, die dritten Einheitswurzeln 1, $e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ und $e^{\frac{4}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{-3}$ deutlich zu erkennen.

Für die komplexe Differenzierbarkeit existiert auch eine Kettenregel.

Proposition 1.6 Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offene Teilmengen und $f : U \to \mathbb{C}$ und $g : V \to \mathbb{C}$ Abbildungen, wobei wir $f(U) \subseteq V$ voraussetzen. Ist f in einem Punkt $z \in U$ und g im Punkt $w = f(z)$ komplex differenzierbar, dann ist auch $g \circ f$ in z komplex differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(z) \quad = \quad g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

Beweis: Auch hier ergeben sich keine Änderungen im Vergleich zum Reellen, anderseits kann aber etwas Wiederholung nicht schaden. Die wesentliche Beweisidee besteht darin, dass man für jeden Punkt $w \in U$ mit $f(w) \neq f(z)$ den Differenzialquotienten von $g \circ f$ in der Form

$$\frac{(g \circ f)(w) - (g \circ f)(z)}{w - z} \quad = \quad \frac{(g \circ f)(w) - (g \circ f)(z)}{f(w) - f(z)} \cdot \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

schreiben kann. Allerdings muss die Möglichkeit mitberücksichtigt werden, dass in unmittelbarer Umgebung von z auch Punkte $w \in U$ mit $f(w) = f(z)$ existieren. Definieren wir nun eine Hilfsfunktion $\tilde{g} : V \to \mathbb{C}$ durch

$$\tilde{g}(v) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{g(v) - g(f(z))}{v - f(z)} & \text{falls } v \neq f(z) \\ g'(f(z)) & \text{falls } v = f(z) \end{cases} \quad ,$$

dann ist $\tilde{g}$ auf Grund der komplexen Differenzierbarkeit von g im Punkt $f(z)$ stetig, und für alle $w \in U \setminus \{z\}$, gleichgültig ob $f(w) = f(z)$ oder $f(w) \neq f(z)$, gilt jeweils

$$\frac{(g \circ f)(w) - (g \circ f)(z)}{w - z} \quad = \quad \tilde{g}(w) \cdot \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Ist nun $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $U \setminus \{z\}$ mit $\lim_n w_n = z$, dann folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{(g \circ f)(w_n) - (g \circ f)(z)}{w_n - z} \quad &= \quad \left(\lim_{n \to \infty} \tilde{g}(w_n)\right)\left(\lim_{n \to \infty} \frac{f(w_n) - f(z)}{w_n - z}\right) \\ &= \quad \tilde{g}'(f(z)) \cdot f'(z) \quad = \quad g'(f(z)) \cdot f'(z). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $g \circ f$ im Punkt z differenzierbar ist, und dass $g'(f(z)) \cdot f'(z)$ die komplexe Ableitung an der z. □

Wir untersuchen nun, wie die komplexe Differenzierbarkeit mit dem Ableitungsbegriff aus der Analysis mehrerer Variablen zusammenhängt. Dazu betrachten wir $\mathbb{C}$ nun als zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum und die komplexen Zahlen 1 und i als Richtungsvektoren. Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $w = u + iv \in U$ ein vorgegebener Punkt, dann bezeichnen wir mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(w) \quad = \quad \partial_1 f(w) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(w) \quad = \quad \partial_i f(w)$$

die Richtungsableitungen von f im Punkt w bezüglich der Richtungen 1 und i. Nach Definition gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(w) \quad = \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(w + t) - f(w)}{t} \quad = \quad \lim_{x \to u} \frac{f(x + iv) - f(u + iv)}{x - u}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(w) \quad = \quad \lim_{t\to 0}\frac{f(w+it)-f(w)}{t} \quad = \quad \lim_{y\to v}\frac{f(u+iy)-f(u+iv)}{y-v}$$

wobei die Grenzwerte jetzt bezüglich einer *reellen* Variablen (t bzw. x oder y) gebildet werden. Schreiben wir f in der Form $f = g + ih$ mit reellwertigen Funktionen $g, h : U \to \mathbb{R}$, dann gilt offenbar

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad = \quad \frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \quad = \quad \frac{\partial g}{\partial y} + i\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Diese Richtungsableitungen lassen sich auch als gewöhnliche partielle Ableitungen interpretieren. Dazu betrachten wir die Abbildung $\iota : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $x + iy \mapsto (x, y)$. Es handelt sich bei ι um einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Setzen wir nun

$$f_{\mathbb{R}} \quad = \quad \iota \circ f \circ \iota^{-1} \quad ,$$

dann erhalten wir eine Abbildung von der offenen Teilmenge $\tilde{U} = \iota(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Für alle $(x, y) \in \iota(U)$ gilt

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{R}}(x,y) \quad &= \quad (\iota \circ f \circ \iota^{-1})(x,y) \quad = \quad (\iota \circ f)(x+iy) \quad = \quad \iota(g(x+iy)+ih(x+iy)) \\ &= \quad (g(x+iy), h(x+iy)). \end{aligned}$$

Die Komponenten von $f_{\mathbb{R}}$ sind also gegeben durch

$$(f_{\mathbb{R}})_1(x,y) = g(x+iy) \qquad \text{und} \qquad (f_{\mathbb{R}})_2(x,y) = \quad = \quad h(x+iy).$$

Setzen wir $w = u + iv$, dann sind die partiellen Ableitungen der Komponenten von $f_{\mathbb{R}}$ im Punkt (u, v) gegeben durch

$$\partial_1(f_{\mathbb{R}})_1(u,v) \quad = \quad \lim_{t\to 0}\frac{(f_{\mathbb{R}})_1(u+t,v)-(f_{\mathbb{R}})_1(u,v)}{t} \quad = \quad \lim_{t\to 0}\frac{g(w+t)-g(w)}{t} \quad = \quad \frac{\partial g}{\partial x}(w)$$

und

$$\partial_2(f_{\mathbb{R}})_1(u,v) \quad = \quad \lim_{t\to 0}\frac{(f_{\mathbb{R}})_1(u,v+t)-(f_{\mathbb{R}})_1(u,v)}{t} \quad = \quad \lim_{t\to 0}\frac{g(w+it)-g(w)}{t} \quad = \quad \frac{\partial g}{\partial y}(w).$$

Genauso beweist man die Gleichungen

$$\partial_1(f_{\mathbb{R}})_2(u,v) = \frac{\partial h}{\partial x}(w) \qquad \text{und} \qquad \partial_2(f_{\mathbb{R}})_2(u,v) = \frac{\partial h}{\partial y}(w).$$

Ist $f_{\mathbb{R}}$ an der Stelle (u, v) sogar total differenzierbar, dann gilt mit $w = u + iv$ also

$$f'_{\mathbb{R}}(u,v) \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(w) & \frac{\partial g}{\partial y}(w) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(w) & \frac{\partial h}{\partial y}(w) \end{pmatrix}.$$

Definition 1.7 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ wird ***reell differenzierbar*** im Punkt $w \in U$ genannt, wenn sie als Funktion auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ in w total differenzierbar ist.

Aus der mehrdimensionalen Kettenregel folgt unmittelbar, dass eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ genau dann im Punkt $w \in U$ reell differenzierbar ist, wenn die Funktion $f_{\mathbb{R}} = \iota \circ f \circ \iota^{-1}$ im Punkt $\iota(w)$ total differenzierbar ist.

Wir illustrieren die bisher durchgeführten Herleitungen an zwei konkreten Beispielen. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z^2$. Wegen

$$(x+iy)^2 \quad = \quad x^2+2x(iy)+i^2y^2 \quad = \quad (x^2-y^2)+i(2xy) \qquad \text{für alle} \quad x,y \in \mathbb{R}$$

gilt $f = g + ih$ mit den Funktionen $g(x+iy) = x^2 - y^2$ und $h(x+iy) = 2xy$. Die Ableitung von $f_{\mathbb{R}}$ im Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist somit gegeben durch

$$f'_{\mathbb{R}}(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Sei nun $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \bar{z}$, die komplexe Konjugation. In diesem Fall gilt $f = g + ih$ mit $g(x+iy) = x$ und $h(x+iy) = -y$. Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ erhalten wir diesmal

$$f'_{\mathbb{R}}(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beide angebenen Funktionen f sind reell differenzierbar, denn $f'_{\mathbb{R}}$ ist in beiden Fällen offenbar stetig differenzierbar, woraus die totale Differenzierbarkeit von $f_{\mathbb{R}}$ und f in jedem Punkt des Definitionsbereichs folgt.

Proposition 1.8 Ist $f : U \to \mathbb{C}$ im Punkt $w \in U$ komplex differenzierbar, dann ist sie im selben Punkt auch reell differenzierbar. Die totale Ableitung von f in w ist durch die lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f'(w)z$ gegeben.

Beweis: Nach Definition der komplexen Differenzierbarkeit gilt $\lim_{z \to 0} \varphi(z) = 0$ für die Funktion

$$\varphi(z) \quad = \quad \frac{f(w+z)-f(w)}{z} - f'(w).$$

Es gilt also $f(z+w) = f(w) + f'(w)z + \varphi(z)z$, wobei der „Fehlerterm“ $\psi(z) = \varphi(z)z$ auch nach Division durch $|z|$ noch gegen Null läuft. Außerdem ist die Abbildung $z \mapsto f'(w)z$ ein Endomorphismus im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass f im Punkt w total differenzierbar ist. □

Wir formulieren nun ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit.

Satz 1.9 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $w \in U$ ein Punkt, in dem f reell differenzierbar ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Die Funktion f ist in w komplex differenzierbar.

(ii) Es gelten die ***Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen***

$$\frac{\partial h}{\partial y}(w) = \frac{\partial g}{\partial x}(w) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(w) = -\frac{\partial g}{\partial y}(w).$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, dass ist die komplexe Ableitung von f im Punkt w gegeben durch

$$f'(w) \quad = \quad \frac{\partial g}{\partial x}(w) + i\frac{\partial h}{\partial x}(w).$$

Beweis: „(i) ⇒ (ii)“ Nach Satz 1.8 ist die totale Ableitung von f an der Stelle w die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f'(w)z$. Sei $f'(w) = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wie aus der Analysis mehrerer Variablen bekannt, erhält man die Richtungsableitungen einer Funktion, indem man die Richtungsvektoren in die totale Ableitung einsetzt. Deshalb gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(w) + i\frac{\partial h}{\partial x}(w) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x}(w) \quad = \quad f'(w)\cdot 1 \quad = \quad (a+ib)\cdot 1 \quad = \quad a+ib.$$

Es folgt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(w) = a \qquad , \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(w) = b.$$

Durch Einsetzen des Richtungsvektors i erhalten wir

$$\frac{\partial g}{\partial y}(w) + i\frac{\partial h}{\partial y}(w) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial y}(w) \quad = \quad f'(w)(i) \quad = \quad (a+ib)\cdot i \quad = \quad (-b)+ia$$

und somit

$$\frac{\partial g}{\partial y}(w) = -b \qquad , \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(w) = a.$$

Ingesamt erhalten wir somit

$$\frac{\partial h}{\partial y}(w) = a = \frac{\partial g}{\partial x}(w) \qquad , \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(w) = b = -\frac{\partial g}{\partial y}(w) \quad ,$$

die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind also im Punkt w erfüllt.

„(ii) ⇒ (i)“ Da f im Punkt w reell differenzierbar ist, gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und eine Abbildung $\psi : U \to \mathbb{C}$ mit

$$f(w+z) \quad = \quad f(w) + \phi(z) + \psi(z) \tag{1.1}$$

für alle z in einer Umgebung vom Nullpunkt und $\lim_{z\to 0} \psi(z)/|z| = 0$. Dann gilt auch $\lim_{z\to 0} \psi(z)/z = 0$.
Sei nun

$$a = \frac{\partial g}{\partial x}(w) = \frac{\partial h}{\partial y}(w) \qquad \text{und} \qquad b = \frac{\partial h}{\partial x}(w) = -\frac{\partial g}{\partial y}(w).$$

Weil die Richtungsableitungen von f durch Einsetzen der Richtungsvektoren 1 und i zu Stande kommen, gilt

$$\phi(1) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x}(w) \quad = \quad \frac{\partial g}{\partial x}(w) + i\frac{\partial h}{\partial x}(w) \quad = \quad a+ib$$

und

$$\phi(i) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial y}(w) \quad = \quad \frac{\partial g}{\partial y}(w) + i\frac{\partial h}{\partial y}(w) \quad = \quad (-b)+ia \quad = \quad i(a+ib).$$

Weil ϕ eine lineare Abbildung auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist, erhalten wir für jedes $z = x + iy \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \phi(z) \quad &= \quad \phi(x+iy) \quad = \quad x\phi(1) + y\phi(i) \\ &= \quad x(a+ib) + yi(a+ib) \quad = \quad (x+iy)(a+ib) \quad = \quad z(a+ib). \end{aligned}$$

Durch Divison von (1.1) durch z und Einsetzen von $\phi(z) = (a+ib)z$ erhalten wir für alle z in einer Umgebung von Null die Gleichung

$$\frac{\psi(z)}{z} \quad = \quad \frac{f(w+z) - f(w)}{z} - (a+ib).$$

Aus $\lim_{z\to 0} \psi(z)/z = 0$ folgt also

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(w+z)-f(w)}{z} \quad = \quad a+ib.$$

Also ist f im Punkt w komplex differenzierbar, und die Ableitung $f'(w)$ hat den angegebenen Wert. □

Häufig werden zur Untersuchung der komplexen Differenzierbarkeit die ***Wirtinger-Ableitungen***

$$\frac{\partial f}{\partial z} \quad = \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar z} \quad = \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Durch Einsetzen der Komponenten $f = g + ih$ erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} \quad = \quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x} + \tfrac{1}{2}i\frac{\partial h}{\partial x} + \tfrac{1}{2}i\frac{\partial g}{\partial y} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial y} \quad = \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y}\right) + \tfrac{1}{2}i\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right).$$

Nach 1.9 ist f in einem Punkt w also genau dann komplex differenzierbar, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(w) \quad = \quad 0 \qquad \text{gilt.}$$

Die komplexe Ableitung ist in diesem Fall gegeben durch

$$f'(w) \quad = \quad \frac{\partial g}{\partial x}(w) + i\frac{\partial h}{\partial x}(w) \quad = \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(w) + \frac{\partial h}{\partial y}(w)\right) + \tfrac{1}{2}i\left(\frac{\partial h}{\partial x}(w) - \frac{\partial g}{\partial y}(w)\right) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial z}(w).$$

Für die Funktion $f(z) = z^2$ gilt beispielsweise in jedem Punkt $z = x + iy$ jeweils

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(z) = 2z.$$

Für die Funktion $f(z) = \bar z$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(z) = 0.$$

Zu beachten ist, dass die Wirtinger-Ableitungen ***keine*** Richtungsableitungen im Sinne der Analysis mehrerer Variablen sind. Insbesondere ist $\frac{\partial f}{\partial z}$ nicht die Ableitung von f in Richtung des Vektors z, wie man auf Grund der Notation vermuten könnte. Es handelt sich um ein rein formales Hilfsmittel.

Wir ergänzen die bisher aufgestellten komplexen Ableitungsregeln noch um eine weitere.

Satz 1.10 *(komplexe Umkehrregel)*
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine injektive, komplex differenzierbare Funktion mit stetiger, nichtverschwindender Ableitung, d.h. es gelte $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Dann ist auch $U = f(G)$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$, die Umkehrfunktion $g : U \to \mathbb{C}$ von f ist auf ganz U komplex differenzierbar, und für alle $w \in U$ gilt $g'(w) = f'(g(w))^{-1}$.

Beweis: Wir betrachten $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum, mit dem komplexen Absolutbetrag als Norm. Die Voraussetzung $f'(z) \neq 0$ impliziert für alle $z \in G$, dass die lineare Abbildung auf dem $\mathbb{R}$-Vektoraum $\mathbb{C}$ gegeben durch $\phi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, u \mapsto f'(z)u$ jeweils invertierbar ist, mit $v \mapsto f'(z)^{-1}v$ als Umkehrabbildung. Aus dem

Satz über die lokale Umkehrbarkeit hatten wir gefolgert, dass die Bildmenge $f(G)$ von G unter einer solchen Abbildung wiederum offen, und dass durch f ein C^1-Diffeomorphismus zwischen G und $f(G)$ gegeben ist. (Die Aussage hatten wir seinerzeit nur für offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ formuliert, aber offensichtlich gilt die Aussage genauso für beliebige endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume.) Dies zeigt, dass die Umkehrfunktion g jedenfalls reell differenzierbar ist. Als Bildmenge einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung ist auch $f(G)$ zusammenhängend, insgesamt also ein Gebiet.

Die Umkehrregel aus der Analysis mehrerer Variablen besagt, dass für jedes $w \in U$ und jedes $z \in G$ mit $f(z) = w$ jeweils $g'(w) = \phi_z^{-1}$ gilt, wobei ϕ_z die totale Ableitung von f im Punkt z bezeichnet. Die Umkehrabbildung von ϕ_z ist, wie wir bereits oben festgestellt haben, gegeben durch $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $v \mapsto f'(z)^{-1}$. Diese Abbildung ist nicht nur eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, sondern eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, und wie wir im Beweis von Satz 1.9 gesehen haben, ist diese $\mathbb{C}$-Linearität bei bereits vorhanderener reeller Differenzierbarkeit in w jeweils gleichbedeutend mit der Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, also mit der komplexen Differenzierbarkeit. Desweiteren ist die bestimmte Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\phi_z^{-1}(v) = \lambda v$ dann die komplexe Ableitung im Punkt w, im vorliegenden Fall also die komplexe Zahl $\lambda = f(z)^{-1}$. □

Wir werden in Kürze sehen, dass die komplexe Ableitung einer komplex differenzierbaren Funktion auf einer offenen Menge automatisch stetig ist. Es genügt also, bei der Formulierung der Umkehrregel die komplexe Differenzierbar zu fordern.

Bisher haben wir, abgesehen von Polynomfunktionen, noch keine konkreten Beispiele für komplex differenzierbare Funktionen zu sehen bekommen. Wir werden nun aber zeigen, wie man mit Hilfe *komplexer Potenzreihen* eine Vielzahl von Beispielen erhält.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wie in der Analysis einer Variablen verwenden wir die Notation $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Summen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und nennen sie die ***Reihe*** über $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Zahlen s_n werden die ***Partialsummen*** der Reihe genannt. Konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine komplexe Zahl a, dann wird die Bezeichnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch für den Grenzwert a verwendet. Man nennt die Reihe ***absolut konvergent***, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ in den reellen Zahlen konvergiert. Wie in der Analysis einer Variablen beweist man auch hier, dass jede komplexe absolut konvergente Reihe konvergent im herkömmlichen Sinn ist.

Die ***Potenzreihen*** wurden bereits in der Analysis mehrerer Variablen definiert. Ist $a \in \mathbb{C}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, dann bezeichnet der Ausdruck $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ die Potenzreihe über $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im ***Entwicklungspunkt*** a. Sei $\alpha = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Dann nennt man

$$\rho \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha = +\infty \\ \alpha^{-1} & \text{falls } \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ +\infty & \text{falls } \alpha = 0 \end{cases}$$

den ***Konvergenzradius*** der Potenzreihe. Der folgende Satz aus der Analysis mehrerer Variablen gilt auch im Komplexen; beim Beweis ergeben sich keine wesentlichen Änderungen.

Satz 1.11 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, $a \in \mathbb{C}$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ die zugehörige komplexe Potenzreihe im Entwicklungspunkt a. Sei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe.

(i) Im Fall $\rho = 0$ konvergiert f nur im Punkt a.

(ii) Im Fall $\rho = +\infty$ konvergiert f in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ absolut.

(iii) Sei nun $0 < \rho < +\infty$. Dann ist f in allen Punkte $z \in B_\rho(a)$ absolut konvergent und in allen Punkten $z \notin \bar{B}_\rho(a)$ divergent.

Gilt (iii), dann definiert f auf $B_\rho(a)$ eine stetige $\mathbb{C}$-wertige Funktion. Im Fall (ii) ist diese Funktion sogar auf ganz $\mathbb{C}$ definiert.

Die sogenannte ***formale Ableitung*** einer Potenzreihe $f(z)$ wie oben ist gegeben durch die Potenzreihe

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-a)^n.$$

Wie in der reellen Analysis zeigt man auch hier, dass f und f' denselben Konvergenzradius besitzen. Der folgende Satz zeigt, dass die formale Ableitung zugleich die komplexe Ableitung der durch f definierten $\mathbb{C}$-wertigen Funktion liefert.

Satz 1.12 Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und $f : B_r(a) \to \mathbb{C}$ eine Funktion, deren Werte durch eine Potenzreihe im Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$ mit Konvergenzradius $\rho \geq r$ gegeben sind. Dann ist f auf $B_r(a)$ eine holomorphe Funktion, und die Ableitung von f ist in jedem Punkt $z \in B_r(a)$ der Wert der formalen Ableitung.

Beweis: Zur Vereinfachung der Notation beschränken wir uns beim Beweis auf den Entwicklungspunkt $a = 0$. Sei $z \in B_r(0)$ vorgegeben. Die komplexe Differenzierbarkeit von f und die Aussage über den Wert der Ableitung ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass die Differenz zwischen dem Differentialquotienten und dem Wert der formalen Ableitung

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} \quad = \quad \frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} \quad =$$

$$\frac{1}{h}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z+h)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right) - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{h}(z+h)^n - \frac{1}{h}z^n - nz^{n-1}\right)$$

für $h \to 0$ gegen Null konvergiert. Für den Ausdruck im Inneren der Klammer gilt nach dem Binomischen Lehrsatz

$$\frac{1}{h}(z+h)^n - \frac{1}{h}z^n - nz^{n-1} \quad = \quad \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k z^{n-k} - \frac{1}{h}z^n - nz^{n-1} \quad =$$

$$\frac{1}{h}z^n + nz^{n-1} + \frac{1}{h}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k z^{n-k} - \frac{1}{h}z^n - nz^{n-1} \quad = \quad \frac{1}{h}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k z^{n-k}.$$

Diese Summe können wir weiter abschätzen. Für $0 \le k \le n-2$ gilt

$$\binom{n}{k+2} \quad \le \quad (k+1)(k+2)\binom{n}{k+2} \quad = \quad (k+1)(k+2)\frac{n!}{(k+2)!(n-k-2)!} \quad = \quad \frac{n!}{k!(n-k-2)!}$$
$$= \quad n(n-1)\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} \quad = \quad n(n-1)\binom{n-2}{k}$$

und somit

$$\left|\frac{1}{h}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k z^{n-k}\right| \quad = \quad |h|^{-1}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|h|^k|z|^{n-k} \quad = \quad |h|^{-1}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k+2}|h|^{k+2}|z|^{n-(k+2)}$$
$$= \quad |h|\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k+2}|h|^k|z|^{(n-2)-k} \quad \le \quad n(n-1)|h|\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}|h|^k|z|^{(n-2)-k}$$
$$= \quad n(n-1)|h|(|h|+|z|)^{n-2}.$$

Wir erhalten also die Abschätzung

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right| \quad \le \quad |h|\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)|a_n|(\,|h|+|z|\,)^{n-2}.$$

Seien nun $\delta, s \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $|z| + \delta < s < r$ erfüllt ist. Dann erhalten wir insgesamt für $0 < |h| < \delta$ die Abschätzung

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right| \quad \le \quad |h|\left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|s^{n-2}\right). \tag{1.2}$$

Die zweite formale Ableitung von f ist gegeben durch

$$f'' \quad = \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}.$$

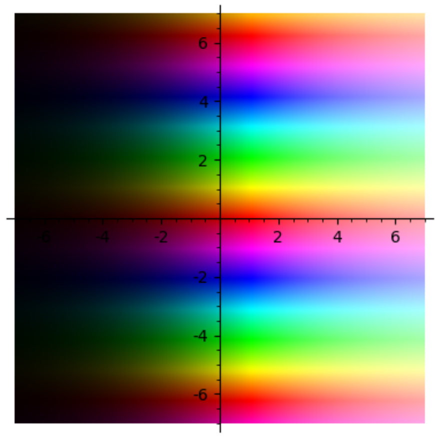
Weil die Konvergenzradien von f, f' und f'' übereinstimmen, ist f'' im Punkt s absolut konvergent. Deshalb ist auch der Ausdruck in der Klammer auf der rechten Seite von (1.2) konvergent, und wir erhalten für $h \to 0$ die gewünschte Konvergenz gegen Null. □

Definition 1.13 Die ***komplexe Exponentialfunktion*** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\exp(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Wie man mit dem Quotientenkriterium leicht überprüft, hat die angegebene Reihe einen unendlichen Konvergenzradius. Somit ist die komplexe Exponentialfunktion tatsächlich auf ganz $\mathbb{C}$ definiert. Wie in der Analysis einer Variablen beweist man mit Hilfe von Cauchyprodukten, dass $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ erfüllt ist. Insbesondere gilt $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z+(-z)) = \exp(0) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dies zeigt, dass exp nur Werte in $\mathbb{C}^\times$ annimmt. Auf

$\mathbb{R}$ stimmt die komplexe Exponentialfunktion mit der bereits bekannten (reellen) Exponentialfunktion überein. Statt $\exp(z)$ verwendet man die etwas komfortablere Schreibweise e^z für alle $z \in \mathbb{C}$. Desweiteren ist die Exponentialreihe identisch mit ihrer eigenen formalen Ableitung. Dies zeigt, dass die Exponentialfunktion gleich ihrer komplexen Ableitung ist, dass also $\exp'(z) = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.



Darstellung der komplexen Exponentialfunktion

In der Analysis einer Variablen hatten wir die Kosinus- und die Sinusfunktion durch die auf ganz $\mathbb{R}$ konvergenten Reihen

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{und} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

definiert. Auch diese Funktionen werden nun auf ganz $\mathbb{C}$ ausgedehnt.

Definition 1.14 Die ***komplexe Kosinus- und Sinusfunktion*** sind auf ganz $\mathbb{C}$ definiert durch

$$\cos(z) = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \qquad \text{und} \qquad \sin(z) = \tfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

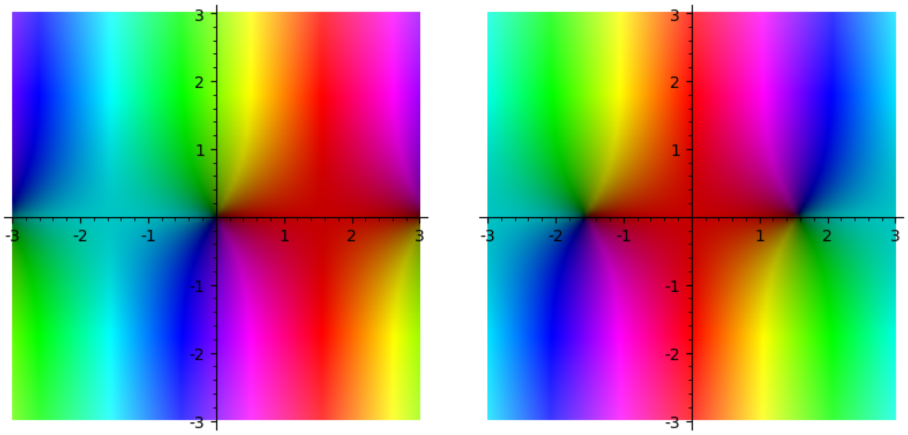
Die Reihendarstellung der komplexen Exponentialfunktion liefert unmittelbar eine komplexe Reihenentwicklung für Kosinus- und Sinusfunktion. Ist n gerade, $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, dann gilt jeweils $\frac{1}{2}((iz)^n + (-iz)^n) = (iz)^{2k} = (-1)^k z^{2k}$, und für ungerades n erhalten wir $\frac{1}{2}((iz)^n + (-iz)^n) = 0$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt somit

$$\cos(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2}\left(\frac{(iz)^n}{n!} + \frac{(-iz)^n}{n!}\right) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Eine ähnliche Rechnung liefert $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dies zeigt, dass die Funktionen tatsächlich die bereits bekannten reellen Kosinus- und Sinusfunktionen auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt wie im Reellen $\sin'(z) = \frac{1}{2i} i e^{iz} - (\frac{1}{2i}(-i)e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, und ebenso $\cos'(z) = -\sin(z)$. Außerdem gilt jeweils

$$\cos(z) + i\sin(z) \quad = \quad \left(\tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})\right) + i \cdot \left(\tfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})\right) \quad = \quad \tfrac{1}{2}e^{iz} + \tfrac{1}{2}e^{-iz} + \tfrac{1}{2}e^{iz} - \tfrac{1}{2}e^{-iz} \quad = \quad e^{iz}.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ erhalten ist $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ die berühmte ***Eulersche Formel***.



Darstellung der komplexen Sinus- und Cosinusfunktion
(Wie man sieht, sind auch die komplexen Funktionen 2π-periodisch.)

Unmittelbar anhand der Definition können auch die Additionstheoreme $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ und $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ nachgerechnet werden. Insbesondere folgt daraus, wie im Reellen, $\sin(z + \frac{1}{2}\pi) = \sin(z)\cos(\frac{1}{2}\pi) + \cos(z)\sin(\frac{1}{2}\pi) = \sin(z) \cdot 0 + \cos(z) \cdot 1 = \cos(z)$, und $1 = \cos(0) = \cos(z + (-z)) = \cos(z)\cos(-z) - \sin(z)\sin(-z) = \cos(z)^2 + \sin(z)^2$, für alle $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.15 Die komplexe Exponentialfunktion wird injektiv, wenn man sie auf $D = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) \le \pi\}$ einschränkt, und sie bildet die Menge D bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ab. Die Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to D$ wird der ***komplexe Logarithmus*** genannt.

Beweis: Zunächst beweisen wir die Injektivität. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $-\pi < b, d \le \pi$ und $e^{a+ib} = e^{c+id}$. Auf Grund der Eulerschen Formel folgt daraus

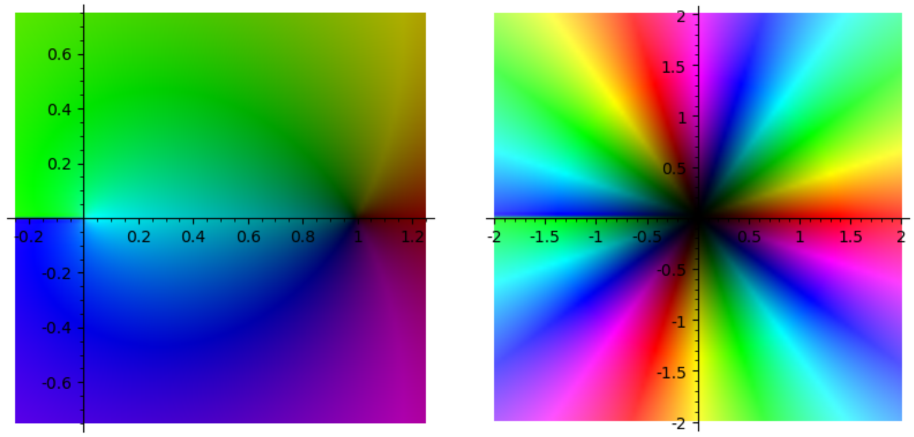
$$e^a(\cos(b) + i\sin(b)) \quad = \quad e^c(\cos(d) + i\sin(d)).$$

Bildet auf beiden Seiten den komplexen Absolutbetrag, dann folgt $e^a = e^c$ und $a = c$. Aus $\cos(b) + i\sin(b) = \cos(d) + i\sin(d)$ erhalten wir $\cos(b) = \cos(d)$ und $\sin(b) = \sin(d)$. Dies zeigt, dass sich b und d höchstens um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden können. Da aber $-\pi < b, d \le \pi$ vorausgesetzt wurde, folgt $b = d$.

Die Surjektivität ergibt sich direkt aus der Polarkoordinaten-Darstellung komplexer Zahlen, wie sie in Satz 1.1 beschrieben wurde: Jedes $z \in \mathbb{C}^\times$ hat die Form $z = re^{i\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}^+$ und $0 \le \varphi < 2\pi$. Die Gleichung bleibt erhalten, wenn wir φ um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π abändern; wir können deshalb $-\pi < \varphi \le \pi$ annehmen. Setzen wir $a = \ln(r)$, wobei ln den reellen natürlichen Logarithmus bezeichnet, dann gilt $z = e^a \cdot e^{i\varphi} = e^{a+i\varphi}$, und $a + i\varphi$ ist in D enthalten. Damit ist die Surjektivität nachgewiesen. □

Genauer spricht man vom ***Hauptzweig*** des komplexen Logarithmus, denn es gibt viele weitere Möglichkeiten, eine lokale Umkehrung der komplexen Exponentialfunktion zu definieren. Entfernen wir aus D die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) = \pi$, so erhält man eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, die bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ abgebildet wird, mit $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\}$. Auf Grund der komplexen Umkehrregel, Satz 1.10, ist die Ableitung des komplexen Logarithmus für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ definiert durch

$$\ln'(z) \quad = \quad \frac{1}{\exp'(\ln(z))} \quad = \quad \frac{1}{\exp(\ln(z))} \quad = \quad \frac{1}{z}.$$



Darstellung der komplexen Logarithmusfunktion und der Funktion $z \mapsto z \mapsto \sqrt[3]{z^{10}}$

(Die Nullstelle der Logarithmusfunktion im Punkt 1 ist deutlich zu erkennen. Weniger deutlich zeigt sich die Singularität im Nullpunkt. Da $\ln(z)$ für $z \to 0$ nur logarithmisch gegen $-\infty$ läuft, nimmt die Helligkeit in der Nähe des Nullpunkts nur geringfügig zu. Der Farbwechsel am linken Rand von grün nach blau zeigt den Sprung des Imaginärteils von $\ln(x)$ von $\frac{1}{2}\pi i$ nach $-\frac{1}{2}\pi$ beim Überqueren der negativen reellen Achse an.)

Definition 1.16 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist die ***komplexe n-te Wurzelfunktion*** definiert durch

$$z^{1/n} \quad = \quad \begin{cases} e^{\frac{1}{n}\ln(z)} & \text{falls } z \neq 0 \\ 0 & \text{falls } z = 0 \end{cases}.$$

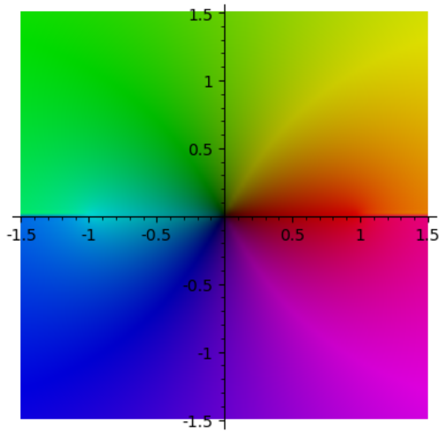
Im Fall $n = 2$ schreibt man an Stelle von $z^{1/2}$ auch $\sqrt{z}$.

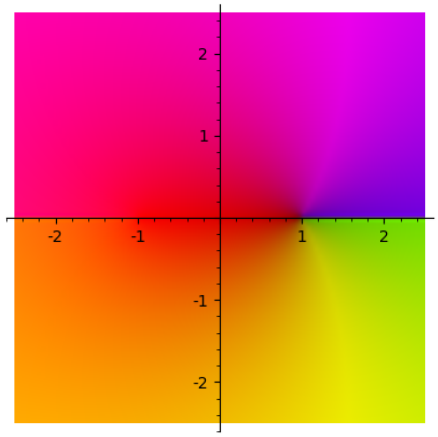
Aus der Gleichung $e^{z+w} = e^z e^w$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ folgt durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $e^{nz} = (e^z)^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dies zeigt, dass für alle $z \in \mathbb{C}^\times$ jeweils $(\sqrt[n]{z})^n = (e^{\frac{1}{n}\ln(z)})^n = e^{n \cdot \frac{1}{n}\ln(z)} = e^{\ln(z)} = z$ gilt, und natürlich ist diese Gleichung auch für $z = 0$ erfüllt. Dies zeigt, dass $z^{1/n}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ tatsächlich stets eine n-te komplexe Wurzel von z ist. Auf $\mathbb{C}^\times$ erhalten wir für die Funktion $z \mapsto z^{1/n}$ mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $z \mapsto \frac{1}{n}z^{-1}e^{\frac{1}{n}\ln(z)} = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}$. Zu beachten ist, dass die Gleichung $(wz)^{1/n} = w^{1/n}z^{1/n}$ im Gegensatz zur Situation bei positiven reellen Zahlen für $w, z \in \mathbb{C}$ im Allgemeinen ***nicht*** erfüllt ist.

Proposition 1.17

(i) Die komplexe Sinusfunktion wird injektiv, wenn man sie auf die Teilmenge $D' = \{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2}\pi < \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}\pi\}$ einschränkt, und sie bildet diese Menge bijektiv auf das Gebiet $G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$ ab. Die Umkehrfunktion $\arcsin : G \to D'$ wird der ***komplexe Arcus sinus*** genannt.

(ii) Die komplexe Kosinusfunktion wird injektiv, wenn man sie auf die Teilmenge $D'' = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$ einschränkt, und sie bildet diese Menge bijektiv auf das Gebiet G aus Teil (i) ab. Die Umkehrfunktion $\arccos : G \to D''$ wird der ***komplexe Arcus cosinus*** genannt.





Darstellung des komplexen Arcus sinus und Arcus cosinus

Beweis: Auf Grund der Gleichung $\sin(z+\frac{1}{2}\pi) = \cos(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ genügt es, die Aussagen für die komplexe Sinusfunktion zu beweisen. Wie man leicht überprüft, wird durch die Funktion $z \mapsto e^{iz}$ die Menge D' bijektiv auf $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ abgebildet. Die Umkehrfunktion dieser Abbildung ist gegeben durch $D_1 \to D'$, $z \mapsto (-i)\ln(z)$.

Die komplexe Sinusfunktion ist die Komposition dieser Funktion mit $f : D_1 \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$. Offenbar gilt $f(z) \in \mathbb{R}$ mit $z \in D_1$ nur dann, wenn $z - z^{-1}$ rein imaginär ist. Schreiben wir $z = a + ib$ mit $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$, dann gilt $\mathrm{Re}(z - z^{-1}) = a - \frac{a}{a^2+b^2}$. Aus $\mathrm{Re}(z - z^{-1}) = 0$ folgt also $a^2 + b^2 = 1$, und dann ist $f(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i} \cdot 2i \cdot b = b$ und $|b| < 1$. Dies zeigt, dass f die Menge D_1 nach G abbildet. Für alle $z \in D_1$ und alle $w \in G$ gilt nun die Äquivalenz

$$w = \tfrac{1}{2i}(z - z^{-1}) \quad\Leftrightarrow\quad 2izw = z^2 - 1 \quad\Leftrightarrow\quad z^2 - 2iwz - w^2 = 1 - w^2 \quad\Leftrightarrow\quad (z - iw)^2 = 1 - w^2$$
$$\Leftrightarrow\quad z - iw = \pm\sqrt{1 - w^2} \quad\Leftrightarrow\quad z = iw + \pm\sqrt{1 - w^2}.$$

Wir betrachten nun die Abbildung $g : G \to \mathbb{C}$, $w \mapsto iw + \sqrt{1 - w^2}$. Es gilt $g(0) = 1$. Hätte $g(w)$ für ein $w \in G$ negativen Realteil, dann müsste es aus Stetigkeitsgründen auch ein $w \in G$ mit $\mathrm{Re}\, g(w) = 0$ geben. Die Umformung zeigt, dass aus $z = g(w)$ jeweils $w = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$ folgt. Wegen $z = it$ mit $t \in \mathbb{R}$ wäre $w = \frac{1}{2i}(it + it^{-1}) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$. Aber auf Grund der Äquivalenz $\frac{1}{2}(t + t^{-1}) \ge 1 \Leftrightarrow t^2 + 1 \ge 2t \Leftrightarrow (t-1)^2 \ge 0$ würde $|w| \ge 1$ gelten, im Widerspruch zu $w \in G$. Damit ist gezeigt, dass $g(G) \subseteq D_1$ gilt.

Aus der Umformung ergibt sich auch, dass $f \circ g = \mathrm{id}_G$ gilt. Also ist die Abbildung f surjektiv. Darüber hinaus ist f injektiv. Sind nämlich $z, z_1 \in D_1$ mit $f(z) = f(z_1)$, dann folgt $z + z^{-1} = z_1 + z_1^{-1}$, was zu $(z - z_1)(1 + \frac{1}{zz_1}) = 0$ umgeformt werden kann. Aus $z \neq z_1$ würde also $zz_1 = -1$ folgen. Ist $z = a + ib$ die Zerlegung von z in Real- und Imaginärteil, dann wäre $z_1 = -z^{-1} = -\frac{a-ib}{a^2+b^2}$. Aber dies ist unmöglich, weil z und z_1 als Elemente von D_1 beide einen positiven Realteil haben. Insgesamt ist damit nachgewiesen, dass $g : G \to D_1$ die Umkehrfunktion von $f : D_1 \to G$ ist. □

Auch hier können wir mit der komplexe Umkehrregel die Ableitungsfunktionen bestimmen. Für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt wegen $\cos(w)^2 + \sin(w)^2 = 1$ jeweils $\cos(w) \in \{\pm\sqrt{1 - \sin(w)^2}\}$. Für alle $z \in G$ erhalten wir somit

$$\arcsin'(z) \quad=\quad \frac{1}{\sin'(\arcsin(z))} \quad=\quad \frac{1}{\cos(\arcsin(z))} \quad=\quad \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(z))^2}} \quad=\quad \pm\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Für reelles $z \in G$ wissen wir bereits aus der Analysis einer Variablen, dass die Gleichung mit einem Pluszeichen erfüllt ist. Weil G wegzusammenhängend und $\arcsin'$ stetig ist und für kein $z \in G$ den Wert null annimmt, muss somit

$$\arcsin'(z) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

für alle $z \in G$ gelten. Durch eine ähnliche Überlegung zeigt

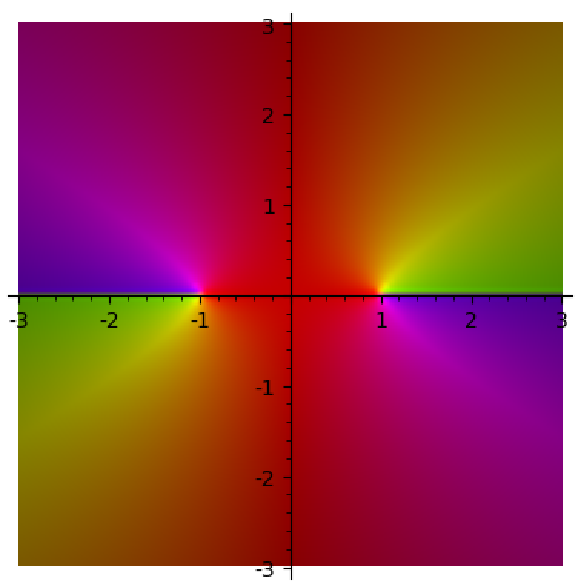
$$\arccos'(z) \quad = \quad -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, die Ableitung des komplexen Arcus sinus zu bestimmen. Aus dem Beweis von Prop. 1.17 geht hervor, dass $\arcsin : G \to D'$ explizit gegeben ist durch die Komposition der dort definierten Abbildung g mit $z \mapsto (-i)\ln(z)$. Es gilt also

$$\arcsin(z) \quad = \quad (-i)\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Bestimmt man die Ableitung dieses Ausdrucks mit Hilfe der komplexen Ableitungsregeln, so erhält man

$$\begin{aligned}\arcsin'(z) \quad &= \quad (-i)\cdot\frac{i - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}}{iz + \sqrt{1-z^2}} \quad = \quad (-i)\cdot\frac{i\sqrt{1-z^2}-z}{iz\sqrt{1-z^2}+1-z^2} \quad = \quad \frac{\sqrt{1-z^2}+z}{iz\sqrt{1-z^2}+1-z^2} \\ &= \quad \frac{(\sqrt{1-z^2}+z)(\sqrt{1-z^2}-iz)}{(iz\sqrt{1-z^2}+1-z^2)(\sqrt{1-z^2}-iz)} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.\end{aligned}$$



Darstellung der Ableitung $z \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ **der komplexen Arcus sinus-Funktion**

Hier erkennt man den hellen Punkten deutlich die Singularitäten bei -1 und 1.

§ 2. Der Cauchysche Integralsatz

Zusammenfassung. Den Begriff des komplexen Wegintegrals haben wir bereits im ersten Teil der Vorlesung, der mehrdimensionalen Integrationstheorie, eingeführt. Für diese Integrale werden wir nun den *Cauchyschen Integralsatz* beweisen, der in der Funktionentheorie eine ganz zentrale Rolle spielt. Im nächten Kapitel werden wir eine Vielzahl von Anwendungen zu sehen bekommen.

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbb{C}$, dann besagt dieser Satz, dass Integrale von f über geschlossene Wege in G gleich null sind, vorausgesetzt die Menge G erfüllt gewisse topologische Bedingungen. Wir beschäftigen uns zunächst mit diesen Bedingungen; die Eigenschaften, die wir hier betrachten, sind *Konvexität*, *Sternförmigkeit* und *einfacher Zusammenhang*, in aufsteigender Allgemeinheit. Ein weiteres wichtiges Thema ist die Definition komplexer Stammfunktionen mit Hilfe komplexer Wegintegrale. Wir beweisen wir den Cauchyschen Integralsatz zunächst für Dreieckskurven und verallgemeinern ihn dann schrittweise.

Wichtige Grundbegriffe

- konvexes bzw. sternförmiges Gebiet
- Homotopie (von Kurven mit festen Endpunkten)
- freie Homotopie
- zusammenziehbare Kurve
- einfach zusammenhängendes Gebiet

Zentrale Sätze

- Cauchyscher Integralsatz

Wir wiederholen kurz die Definition der komplexen Kurvenintegrale. Unter einem ***Integrationsweg*** in $\mathbb{C}$ verstehen wir in diesem und den nachfolgenden Kapiteln eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ auf einem endlichen Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ (mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Ist $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg mit $\gamma([a,b]) \subseteq U$, dann hatten wir das ***komplexe Kurvenintegral*** von f über γ definiert durch

$$\int_\gamma f(z)\,dz \quad = \quad \int_a^b (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)\,dt.$$

Für die Berechnung dieser Integrale wird jeweils eine Stammfunktion von $t \mapsto (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)$ benötigt, also eine stückweise stetig differenzierbare Funktion $f_\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass $f_\gamma'(t) = (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)$ für alle bis auf endlich viele $t \in [a,b]$ erfüllt ist. Es gilt dann

$$\int_\gamma f(z)\,dz \quad = \quad f_\gamma(b) - f_\gamma(a).$$

Wir notieren einige Rechenregeln für das komplexe Kurvenintegral.

Satz 2.1 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, und seien $\gamma : [a,b] \to U$ und $\delta : [c,d] \to U$ zwei Integrationswege, wobei wir $\gamma(b) = \delta(c)$ voraussetzen.

(i) Für die Summe $\gamma + \delta$ und die Umkehrung $-\gamma$ gilt

$$\int_{\gamma+\delta} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\delta f(z)\,dz \quad \text{und} \quad \int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

(ii) Ist $C \in \mathbb{R}_+$ eine Konstante mit $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in \gamma([a,b])$, so gilt für das komplexe Kurvenintegral die Abschätzung

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \quad \leq \quad C\,\ell(\gamma)$$

wobei $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$ die ***Länge*** des Integrationsweges γ bezeichnet.

(iii) Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $F : U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Stammfunktion von f, dann ist das komplexe Kurvenintegral gegeben durch

$$\int_\gamma f(z)\,dz \quad = \quad (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a).$$

Insbesondere gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, wenn der Integrationsweg γ geschlossen ist, also $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt.

Beweis: zu (i) Wir beschränken uns auf den Beweis für die Umkehrung und hierbei auf den Fall, dass γ auf das Intervall $[0,1]$ normiert ist. Zunächst bemerken wir, dass die (eindimensionale) Substitutionsregel problemlos von reell- auf komplexwertige Funktionen übertragen werden kann. Ist nämlich $f_1 : I \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit Zerlegung $f = g_1 + ih_1$ in Real- und Imaginärteil, und ist $u : J \to I$ eine stetig differenzierbare, streng monoton wachsende oder fallende Funktion auf einem offenen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$, dann gilt für alle $a, b \in J$ mit $a < b$ auf Grund der reellwertigen Substitutionsregel

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f_1(x)\,dx \quad = \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g_1(x)\,dx + i\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} h_1(x)\,dx \quad = \quad \int_a^b (g_1 \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\,dt + i\int_a^b (h_1 \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\,dt$$

$$= \quad \int_a^b (f_1 \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Wenden wir dies auf $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(t) = 1-t$ und die Funktion $t \mapsto (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)$ an, so erhalten wir wegen $-\gamma = \gamma \circ u$ für das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = \int_0^1 (f \circ (-\gamma)(t)(-\gamma)'(t)\,dt = \int_0^1 (f \circ \gamma \circ u)(t)(\gamma \circ u)'(t)\,dt = \int_{u(0)}^{u(1)} (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)\,dt = \int_1^0 (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)\,dt = -\int_0^1 (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)\,dt = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

zu (ii) Wir zeigen zunächst, dass für jede stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ die Abschätzung $|\int_a^b g(t)\,dt| \le \int_a^b |g(t)|\,dt$ gilt. Wir haben in den Übungen gezeigt, dass auch für Integrale $\mathbb{C}$-wertiger Funktionen die Produktregel der Differentiation gültig ist. Daraus folgt $\int_a^b (\lambda g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b g(t)\,dt$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Damit erhalten wir für jedes $s \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\mathrm{Re}\left(e^{is}\int_a^b g(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{is}g(t))\,dt \le \int_a^b |e^{is}g(t)|\,dt \le \int_a^b |g(t)|\,dt.$$

Sei nun $z = \int_a^b g(t)\,dt$. Ist $z = 0$, dann ist die behauptete Abschätzung offensichtlich erfüllt. Ansonsten sei $s = -\arg(z)$. Dann ist $e^{is}\int_a^b g(t)\,dt$ reell und positiv, und wir erhalten

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| = \left|e^{is}\int_a^b g(t)\,dt\right| = e^{is}\int_a^b g(t)\,dt = \mathrm{Re}\left(e^{is}\int_a^b g(t)\,dt\right) \le \int_a^b |g(t)|\,dt \quad ,$$

wodurch die Behauptung bewiesen ist. Die Aussage (ii) selbst erhält man nun durch die einfache Rechnung

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |(f \circ \gamma)(t)||\gamma'(t)|\,dt \le C\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = C\,\ell(\gamma).$$

zu (ii) Sei $\mathcal{Z} = \{t_1, ..., t_{m-1}\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ derart, dass $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ jeweils stetig differenzierbar ist, für $1 \le k \le n$. Es ist leicht zu überprüfen, dass die Kettenregel für $\mathbb{R}$-wertige Funktionen aus der Analysis einer Variablen auch für $\mathbb{C}$-wertige Funktionen gültig ist. Damit erhalten wir $(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)$ für alle $t \in [a,b]$ mit $t \ne t_k$ für $0 \le k \le m$, und es folgt $\int_\gamma f(z)\,dz = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a)$. Offenbar ist die Differenz im Fall $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$. □

Unser wichtigstes Ziel in diesem Abschnitt ist der Nachweis, dass Integrale holomorpher Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ auf einem konvexen Gebiet G über ***geschlossene*** Integrationswege (also Integrationswege $\gamma : [a,b] \to G$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$) stets gleich null sind. Der Begriff der Konvexität ist bereits aus der Analysis mehrerer Variablen bekannt: Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt ***konvex***, wenn für je zwei Punkte $p, q \in U$ auch die Spur der Verbindungsstrecke $[p,q]$ in U enthalten ist. Wir ergänzen dies um einen weiteren Begriff.

Definition 2.2 Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt ***sternförmig*** bezüglich eines Punktes $z \in U$, wenn für alle $w \in U$ die Spur der Verbindungsstrecke $[z,w]$ in U enthalten ist.

Offenbar ist eine konvexe Teilmenge sternförmig bezüglich all ihrer Punkte. Wir benötigen im weiteren Verlauf noch die folgende topologische Aussage.

Satz 2.3 In einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ können je zwei Punkte p, q jeweils durch einen ***Polygonzug*** in G, also durch eine Summe von Verbindungsstrecken, miteinander verbunden werden.

Beweis: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in G$ ein beliebig gewählter Punkt. Wir müssen zeigen, dass für jeden Punkt $z \in G$ ein Polygonzug von a nach z existiert. Sei $U \subseteq G$ die Teilmenge aller Punkte z, für die ein solcher Weg tatsächlich existiert. Zu zeigen ist, dass $U = G$ gilt.

Um dies zu erreichen, beweisen wir zunächst, dass U offen ist. Sei $z_1 \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $B_r(z_1) \subseteq G$; ein solches r existiert auf Grund der Offenheit von G. Da $B_r(z_1)$ als offene Kreisscheibe konvex ist, liegt für jedes $z \in B_r(z_1)$ die Spur der Verbindungsstrecke $[z_1, z]$ in $B_r(z_1)$. Wegen $z_1 \in U$ existiert ein in G verlaufender Polygonzug γ von a nach z_1. Insgesamt ist dann durch die Summe $\gamma + [z_1, z]$ ein in G verlaufender Polygonzug von a nach z definiert. Es folgt $z \in U$, und insgesamt ist damit $B_r(z_1) \subseteq U$ nachgewiesen. Die Teilmenge $U \subseteq G$ ist also tatsächlich offen.

Nun zeigen wir, dass auch das Komplement $G \setminus U$ von U offen ist. Sei dazu $z_2 \in G \setminus U$ und $s \in \mathbb{R}^+$ mit $B_s(z_2) \subseteq G$. Wäre ein Punkt $z \in B_s(z_2)$ in U enthalten, dann würde ein Polygonzug δ in G von a nach z existieren, und $\delta + [z, z_2]$ wäre ein Polygonzug in G von a nach z_2. Aber dies würde bedeuten, dass z_2 in U liegt, im Widerspruch zur Annahme. Die Teilmenge $U \subseteq G$ ist wegen $a \in U$ nicht leer. Wäre auch $G \setminus U$ nichtleer, dann würden wir durch $G = U \cup (G \setminus U)$ eine disjunkte Zerlegung von G in nichtleere und offene (und damit auch in G relativ offene) Teilmengen erhalten. Weil aber G als Gebiet zusammenhängend ist, existiert eine solche Zerlegung nicht. Somit muss $G \setminus U = \varnothing$ und $U = G$ gelten. □

Aus dem Satz folgt somit, dass zwischen zwei Punkten ein in G verlaufender Integrationsweg existiert, denn Polygonzüge sind stückweise stetig differenzierbar. Insbesondere sind Gebiete in $\mathbb{C}$ also stets wegzusammenhängend.

Definition 2.4 Seien $u, v, w \in \mathbb{C}$ drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen affinen Geraden liegen. Dann bezeichnen wir die Menge

$$\Delta \quad = \quad \Delta(u, v, w) \quad = \quad \{\lambda u + \mu v + \nu w \mid \lambda, \mu, \nu \in [0, 1], \lambda + \mu + \nu = 1\}$$

als ***Dreieck*** mit den Eckpunkten u, v, w. Als ***Randkurve*** des Dreiecks definieren wir die zusammengesetzte Kurve $\partial\Delta = [u, v] + [v, w] + [w, u]$.

Aus der Definition der Konvexität folgt unmittelbar, dass für jede konvexe Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $u, v, w \in U$ auch das Dreieck $\Delta = \Delta(u, v, w)$ in U enthalten ist. Ist $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, dann gilt auf Grund der Rechenregel für die Summe von Integrationswegen jeweils

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \quad = \quad \int_u^v f(z)\, dz + \int_v^w f(z)\, dz + \int_w^u f(z)\, dz.$$

Die Länge von $\partial\Delta$, also die Zahl $|v - u| + |w - v| + |u - w|$, bezeichnen wir als ***Umfang*** des Dreiecks.

Proposition 2.5 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, und seien $u, v, w \in U$ Punkte, die nicht auf einer affinen Geraden liegen. Sei $\Delta = \Delta(u, v, w)$, und seien $u' = \frac{1}{2}(v + w)$, $v' = \frac{1}{2}(u + w)$, $w' = \frac{1}{2}(u + v)$ die Seitenmittelpunkte von Δ. Dann können wir Δ in die vier kleineren Dreiecke

$$\Delta_1 = \Delta(u, w', v') \quad , \quad \Delta_2 = \Delta(v, u', w') \quad , \quad \Delta_3 = \Delta(w, v', u') \quad \text{und} \quad \Delta_4 = \Delta(u', v', w')$$

zerlegen. Für jede stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz \quad = \quad \int\limits_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz + \int\limits_{\partial\Delta_3} f(z)\,dz + \int\limits_{\partial\Delta_4} f(z)\,dz.$$

Beweis: Die Gleichung erhält man durch mehrfache Anwendung der Rechenregeln für Konkatenation und Inversion. Nach Definition der Verbindungsstrecken gilt allgemein $\int_{w_2}^{w_1} f(z)\,dz = \int_{-[w_1,w_2]} f(z)\,dz \quad = \quad -\int_{w_1}^{w_2} f(z)\,dz$ $w_1, w_2 \in U$. Daraus folgt

$$\int\limits_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz + \int\limits_{\partial\Delta_3} f(z)\,dz + \int\limits_{\partial\Delta_4} f(z)\,dz \quad =$$

$$\left(\int_u^{w'} f(z)\,dz + \int_{w'}^{v'} f(z)\,dz + \int_{v'}^{u} f(z)\,dz\right) + \left(\int_v^{u'} f(z)\,dz + \int_{u'}^{w'} f(z)\,dz + \int_{w'}^{v} f(z)\,dz\right) +$$

$$\left(\int_w^{v'} f(z)\,dz + \int_{v'}^{u'} f(z)\,dz + \int_{u'}^{w} f(z)\,dz\right) + \left(\int_{u'}^{v'} f(z)\,dz + \int_{v'}^{w'} f(z)\,dz + \int_{w'}^{u'} f(z)\,dz\right) \quad =$$

$$\int_u^{w'} f(z)\,dz + \int_{v'}^{u} f(z)\,dz + \int_v^{u'} f(z)\,dz + \int_{w'}^{v} f(z)\,dz + \int_w^{v'} f(z)\,dz + \int_{u'}^{w} f(z)\,dz \quad =$$

$$\int_u^{v} f(z)\,dz + \int_v^{w} f(z)\,dz + \int_w^{u} f(z)\,dz \quad = \quad \int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz. \qquad \square$$

Satz 2.6 *(Cauchyscher Integralsatz für Dreiecke)*
Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\Delta \subseteq U$ ein Dreieck, dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \quad = \quad 0.$$

Beweis: Wie in Prop. 2.5 unterteilen wir das Dreieck Δ in vier Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Sei $\Delta^{(1)}$ von diesen vier Dreiecken dasjenige mit dem maximalen Betrag

$$\left|\int_{\partial\Delta_i} f(z)\,dz\right| \quad , \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

des Kurvenintegrals. Setzen wir $\Delta^{(0)} = \Delta$, dann gilt $\Delta^{(0)} \supseteq \Delta^{(1)}$ und

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz\right| \quad = \quad \left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_4} f(z)\,dz\right| \quad \leq$$

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial\Delta_3} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial\Delta_4} f(z)\,dz\right| \quad \leq \quad 4\left|\int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z)\,dz\right|.$$

Indem wir dieselbe Konstruktion wie zuvor auf Δ auf das Dreieck $\Delta^{(1)}$ anwenden, erhalten wir ein Dreieck $\Delta^{(2)} \subseteq \Delta^{(1)}$, und Iteration dieses Vorgangs liefert eine Folge $\Delta^{(0)} \supseteq \Delta^{(1)} \supseteq \Delta^{(2)} \supseteq \Delta^{(3)} \supseteq \ldots$ von Dreiecken mit

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz\right| \quad \leq \quad 4^n\left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\right|.$$

Bezeichnen wir jeweils mit ℓ_n den Umfang und mit δ_n den Durchmesser von Δ_n, dann gilt $\ell_n = 2^{-n}\ell_0$ und $\delta_n = 2^{-n}\delta_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Weil die Dreiecke kompakt sind und sich gegenseitig enthalten, gibt es nach dem Schachtelungsprinzip aus der Analysis mehrer Variablen einen Punkt $w \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta^{(n)} = \{w\}$. Auf Grund der komplexen Differenzierbarkeit von f im Punkt w existiert eine Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) \quad = \quad f(w) + (z-w)f'(w) + h(z) \qquad \text{mit} \quad \lim_{z\to w} \frac{h(z)}{|z-w|} = 0.$$

Die Funktion $g(z) = f(w) + (z-w)f'(w)$ besitzt $G(z) = f(w)z + \frac{1}{2}(z-w)^2 f'(w)$ als komplexe Stammfunktion. Mit Satz 2.1 (iii) erhalten wir somit

$$\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz \quad = \quad \int_{\partial\Delta^{(n)}} (g+h)(z)\,dz \quad = \quad \int_{\partial\Delta^{(n)}} g(z)\,dz + \int_{\partial\Delta^{(n)}} h(z)\,dz$$

$$= \quad 0 + \int_{\partial\Delta^{(n)}} h(z)\,dz \quad = \quad \int_{\partial\Delta^{(n)}} h(z)\,dz.$$

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben. Auf Grund der Grenzwerteigenschaft der Funktion h gilt $|h(z)| \leq \varepsilon|z-w|$ für z in einer hinreichend kleinen Umgebung $V \subseteq U$ von w. Da der Durchmesser δ_n von $\Delta^{(n)}$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert, ist das Dreieck $\Delta^{(n)}$ für hinreichend großes n in V enthalten. Für alle $z \in \Delta^{(n)}$ gilt dann $|z-w| \leq \delta_n$ und somit $|h(z)| \leq \varepsilon\delta_n$. Weil der Dreiecksumfang zugleich die Länge des Integrationsweges ist, erhalten wir mit Satz 2.1 (ii) die Abschätzung

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\right| \quad = \quad \left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} h(z)\,dz\right| \quad \leq \quad \varepsilon\delta_n\ell_n \quad = \quad 4^{-n}\delta_0\ell_0\varepsilon.$$

Es folgt $\left|\int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz\right| \leq 4^n\left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\right| \leq \delta_0\ell_0\varepsilon$. Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig klein gewählt werden kann, erhalten wir schließlich $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$. □

Beim Beweis der Verallgemeinerungen des Cauchyschen Integralsatzes stellt es sich häufig als günstig heraus, wenn man auf die Holomorphie der Funktion f in einem Punkt des Definitionsbereichs verzichten kann.

Proposition 2.7 Sei $\Delta = \Delta(u,v,w)$ ein Dreieck, $a \in \Delta$ ein Punkt, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $U \supseteq \Delta$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige und auf $U \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Beweis: Zunächst betrachten wir den Fall, dass a mit einem der Eckpunkte des Dreiecks übereinstimmt; sei etwa $a = u$. Seien ferner v_1 und w_1 zwei beliebige Punkte auf den an u anliegenden Dreiecksseiten $[u, v]$ bzw. $[u, w]$. Definieren wir $\Delta_1 = \Delta(u, v_1, w_1)$, $\Delta_2 = \Delta(w, w_1, v_1)$ und $\Delta_3 = \Delta(v_1, v, w)$, dann erhalten wir eine Unterteilung des Dreiecks Δ in drei kleinere Dreiecke. Wie im Beweis von Prop. 2.5 rechnet man nach, dass

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \quad = \quad \int_{\partial\Delta_1} f(z)\, dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\, dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)\, dz$$

erfüllt ist. Weil f auf Δ_2 und Δ_3 holomorph ist, verschwindet das Integral für diese beiden Dreiecke, und es folgt

$$\int_{\partial\Delta} f\, dz \quad = \quad \int_{\partial\Delta_1} f\, dz. \tag{2.1}$$

Weil Δ kompakt ist, nimmt die stetige Funktion $z \mapsto |f(z)|$ auf Δ ein Maximum $m \in \mathbb{R}_+$ an. Auf Grund von 2.1 (ii) gilt die Abschätzung

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\, dz \right| \quad \leq \quad \ell(\partial\Delta_1) m.$$

Nach Gleichung (2.1) ist das Integral über $\partial\Delta_1$ von der Lage der Punkte v_1, w_1 auf den Dreiecksseiten unabhängig. Lassen wir nun v_1 und w_1 gegen $a = u$ laufen, dann konvergiert der Umfang $\ell(\partial\Delta_1)$ von Δ_1 gegen Null. Es folgt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \quad = \quad \int_{\partial\Delta_1} f(z)\, dz \quad = \quad 0.$$

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass a zwar auf einer Seite des Dreiecks liegt, etwa in $[u, v]$, aber mit keinem der Eckpunkte übereinstimmt. Wir bilden dann die Dreiecke $\Delta_1 = \Delta(u, a, w)$ und $\Delta_2 = \Delta(v, w, a)$. Wieder zeigt man durch eine Rechnung wie in Prop. 2.5, dass

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \quad = \quad \int_{\partial\Delta_1} f(z)\, dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\, dz \quad \text{gilt.}$$

Nach Konstruktion ist a ein Eckpunkt sowohl von Δ_1 als auch von Δ_2. Wir können also die Aussage im bereits bewiesenen Fall anwenden und erhalten

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \quad = \quad \int_{\partial\Delta_1} f(z)\, dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\, dz \quad = \quad 0 + 0 \quad = \quad 0.$$

Schließlich betrachten wir noch den Fall, dass a im Inneren des Dreiecks enthalten ist. Dann gibt es $\lambda, \mu, \nu \in\,]0, 1[$ mit $\lambda + \mu + \nu = 1$ und $a = \lambda u + \mu v + \nu w$. Der Punkt $b = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} u + \frac{\mu}{\lambda+\mu} v$ liegt dann auf der Verbindungsstrecke $[u, v]$, stimmt aber weder mit u noch mit v überein, und a ist wegen

$$\begin{aligned}(1-\nu)b + \nu w \quad &= \quad (1-\nu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} u + \frac{\mu}{\lambda+\mu} v\right) + \nu w \quad = \quad (\lambda+\mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} u + \frac{\mu}{\lambda+\mu} v\right) + \nu w \\ &= \quad \lambda u + \mu v + \nu w \quad = \quad a\end{aligned}$$

in der Verbindungsstrecke $[b, w]$ enthalten. Es sind dann $\Delta_1 = \Delta(u, b, w)$ und $\Delta_2 = \Delta(v, w, b)$ Dreiecke mit der Eigenschaft, dass a auf einer ihrer Seiten liegt. Wiederum ist die Aussage damit auf einen bereits bewiesenen Fall zurückgeführt, und wir erhalten

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \quad = \quad \int_{\partial\Delta_1} f(z)\, dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\, dz \quad = \quad 0 + 0 \quad = \quad 0. \qquad \square$$

Wie wir weiter oben gesehen haben, spielen komplexe Stammfunktionen bei der Berechnung komplexer Wegintegrale eine wichtige Rolle. Wir sehen uns nun an, wie umgekehrt mit Hilfe von Wegintegralen komplexe Stammfunktionen gewonnen werden können.

Proposition 2.8 Sei G ein bezüglich des Punktes $a \in G$ sternförmiges Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige und auf $G \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion. Dann ist durch $F : G \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_a^z f(w)\,dw$ eine komplexe Stammfunktion von f definiert.

Beweis: Sei $b \in G$ vorgegeben. Weil G offen ist, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(b) \subseteq G$. Wir zeigen nun, dass für jedes $z \in B_\varepsilon(b)$ das Dreieck Δ mit den Eckpunkten z, a, b in G enthalten ist. Jeder Punkt p im Dreieck hat die Form $p = \lambda a + \mu b + \nu z$ mit $\lambda, \mu, \nu \in [0,1]$ und $\lambda + \mu + \nu = 1$. Dabei können wir $\lambda < 1$ voraussetzen, denn ansonsten wäre $p = a$, und dieser Punkt liegt auf jeden Fall in G. Weil $B_\varepsilon(b)$ konvex ist, liegt der Punkt $w = \frac{\mu}{1-\lambda} b + \frac{\nu}{1-\lambda} z$ auf der Strecke $\mathrm{sp}([b,z])$ in $B_\varepsilon(b) \subseteq G$. Auf Grund der Sterneigenschaft ist auch die Strecke $\mathrm{sp}([a,w])$ in G enthalten, und deshalb liegt der Punkt $p = \lambda a + (1-\lambda)w$ in G. Damit ist die Inklusion $\Delta \subseteq G$ nachgewiesen.

Wir wenden nun den Cauchyschen Integralsatz, Satz 2.6, auf das Dreieck Δ an. Wir erhalten $\int_{\partial\Delta} f(w)\,dw = 0$, also

$$F(b) + \int_b^z f(w)\,dw - F(z) \quad = \quad \int_a^b f(w)\,dw + \int_b^z f(w)\,dw + \int_z^a f(w)\,dw \quad = \quad 0$$

und somit

$$F(z) - F(b) \quad = \quad \int_b^z f(w)\,dw \quad = \quad \int_0^1 f((1-t)b + tz)(z-b)\,dt \quad = \quad (z-b)g(z)$$

mit $g(z) = \displaystyle\int_0^1 f((1-t)b + tz)\,dt$. Wenn wir nun zeigen, dass diese Funktion g im Punkt b stetig ist, dann folgt

$$\lim_{z \to b} \frac{F(z) - F(b)}{z - b} \quad = \quad \lim_{z\to b} g(z) \quad = \quad g(b) \quad = \quad \int_0^1 f(b)\,dt \quad = \quad f(b) \quad ,$$

und der Beweis ist abgeschlossen. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $B_\varepsilon(b)$ mit $\lim_n z_n = b$. Es genügt zu zeigen, dass die Folge der Funktionen gegeben durch $t \mapsto f((1-t)b + tz_n)\,dt$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion $t \mapsto f(b)$ konvergiert, denn dann konvergiert das Integral, durch das $g(z_n)$ definiert ist, gegen das Integral über die konstante Funktion $t \mapsto f(b)$, also gegen den Wert $f(b) = g(b)$.

Ist nun $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann gibt es auf Grund der Stetigkeit von f ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(z) - f(b)| < \varepsilon_1$ für alle $z \in G$ mit $|z - b| < \delta$. Ist nun $N \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass $|z_n - b| < \delta$ für alle $n \geq N$ gilt, dann gilt auch $|((1-t)b + tz_n) - b| < \delta$ für alle $t \in [0,1]$, denn $(1-t)b + tz_n$ liegt in der Spur der Verbindungsstrecke $[b, z_n]$. Daraus wiederum folgt $|f((1-t)b + tz_n) - f(b)| < \varepsilon_1$ für alle $t \in [0,1]$ und alle $n \geq N$, wodurch die gleichmäßige Konvergenz nachgewiesen ist. □

Satz 2.9 *(Cauchyscher Integralsatz für sternförmige Gebiete)*
Sei G ein bezüglich $a \in G$ sternförmiges Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige und auf $G \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt für jeden in G verlaufenden, geschlossenen Integrationsweg γ jeweils

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Beweis: Weil f auf G nach Prop. 2.8 eine komplexe Stammfunktion F besitzt, können wir Satz 2.1 (iii) anwenden. Für jeden geschlossene Kurve $\gamma : [a,b] \to G$ gilt demnach $\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\gamma(a)) - F(\gamma(a)) = 0$.
□

Folgerung 2.10 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Genau dann existiert für f eine komplexe Stammfunktion $F : G \to \mathbb{C}$, wenn $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G gilt.

Beweis: Die Gültigkeit der Implikationsrichtung „⇒" haben wir bereits in Satz 2.1 (v) festgestellt. Zum Beweis von „⇐" setzen wir nun umgekehrt voraus, dass $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg gilt. Um eine komplexe Stammfunktion auf G zu definieren, wählen wir einen Punkt $a \in G$. Nach Satz 2.3 existiert für jeden Punkt $z \in \Gamma$ ein Polygozug γ_z von a nach z, und wir definieren $F : G \to \mathbb{C}$, in dem wir jeweils $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$ setzen. Sei nun $z \in G$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, dass F in z komplex differenzierbar ist und $F'(z) = f(z)$ gilt. Dazu wählen wir für z eine bezüglich z sternförmige (oder konvexe) Umgebung $G_z \subseteq G$. Nach Proposition 2.8 ist $\tilde{F} : G \to \mathbb{C}$, $z_1 \mapsto \int_z^{z_1} f(w)\,dw$ eine komplexe Stammfunktion von f, insbesondere gilt $\tilde{F}'(z) = f(z)$. Desweiteren stimmen F und $\tilde{F}$ auf G_z bis auf eine Konstante überein. Denn für jedes $z_1 \in G_z$ ist $\gamma_z + [z, z_1] - \gamma_{z_1}$ ein geschlossener Integrationsweg in G. Es gilt also

$$F(z) + \tilde{F}(z_1) - F(z_1) \quad = \quad \int_{\gamma_z} f(w)\,dw + \int_z^{z_1} f(w)\,dw - \int_{\gamma_{z_1}} f(w)\,dw \quad = \quad 0 \quad ,$$

was zu $\tilde{F}(z_1) = F(z_1) - F(z)$ umgeformt werden kann. Mit $\tilde{F}$ ist also auch F im Punkt z komplex differenzierbar, und es gilt $F'(z) = \tilde{F}'(z) = f(z)$. □

Wir werden nun eine allgemeine Bedingung an Gebiete $G \to \mathbb{C}$ formulieren, auf denen die beiden in Folgerung 2.10 (ii) genannten äquivalenten Aussagen stets erfüllt sind.

Definition 2.11 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und seien $\gamma, \delta : [a,b] \to G$ zwei Integrationswege.

(i) Ist $\gamma(a) = \delta(a)$ und $\gamma(b) = \delta(b)$, dann ist eine ***Homotopie in G zwischen γ und δ mit festen Endpunkten*** eine stetige Abbildung $H : [a,b] \times [0,1] \to G$, so dass $H(s,0) = \gamma(s)$ und $H(s,1) = \delta(s)$ für alle $s \in [a,b]$ und $H(a,t) = \gamma(a) = \delta(a)$, $H(b,t) = \gamma(b) = \delta(b)$ für alle $t \in [0,1]$ erfüllt ist.

(ii) Sind γ und δ geschlossene Kurven, dann ist eine ***freie Homotopie in G zwischen γ und*** δ eine stetige Abbildung $H : [a,b] \times [0,1] \to G$ mit $H(s,0) = \gamma(s)$, $H(s,1) = \delta(s)$ für alle $s \in [a,b]$ und $H(a,t) = H(b,t)$ für alle $t \in [0,1]$

Das Gebiet G wird ***einfach zusammenhängend*** genannt, wenn jeder geschlossene Integrationsweg frei homotop zu einem konstanten Weg ist (dessen Spur also nur aus einem einzigen Punkt besteht).

Anschaulich lässt sich eine Homotopie interpretieren als „stetige Deformation“ der Kurve γ in die Kurve δ, die sich die ganze Zeit über im Gebiet H abspielt. Jeden „Zeitpunkt“ $t \in [0,1]$ kann eine Kurve $\gamma_t : [a,b] \to G$ gegeben durch $\gamma_t(s) = H(s,t)$ zugeordnet werden. Die Deformation startet mit der Kurve $\gamma_0 = \gamma$ und endet mit $\gamma_1 = \delta$.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass sternförmige Gebiete einfach zusammenhängend sind. Ist nämlich G sternförmig bezüglich $z \in G$ und $\gamma : [a,b] \to G$ eine geschlossene Kurve, dann können wir durch $H(s,t) = (1-t)\gamma(s) + tz$ eine Homotopie zwischen γ und dem konstanten Weg bestehend aus dem Punkt z definieren. Insbesondere sind konvexe Teilmengen einfach zusammenhägend.

Ein Beispiel für ein *nicht* einfach zusammenhängendes Gebiet ist $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dies zeigt man am einfachsten durch Anwendung des unten angegebenen Cauchyschen Integralsatzes für einfach zusammenhängende Gebiete.

Proposition 2.12 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und seien $\gamma, \delta : [a,b] \to G$ zwei Integrationswege. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Existiert zwischen γ und δ eine Homotopie mit festen Endpunkten oder sind γ und δ geschlossen, und existiert eine freie Homotopie zwischen γ und δ, dann gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\delta f(z)\,dz$.

Leider können wir diese Proposition hier nicht beweisen. Eine Schwierigkeit beim Beweis besteht darin, dass die oben definierten Kurven γ_t, die mittels H definiert werden, nur stetig, aber keine Integrationswege sind. Für den Beweis muss man diesen Kurven dennoch ein Integral $\int_{\gamma_t} f(z)\,dz$ zuordnen, was bei einer holomorphen (im Gegensatz zu einer beliebigen stetigen Funktion) f möglich, aber mit einigem Aufwand verbunden ist.

Wir können nun den Cauchyschen Integralsatz in voller Allgemeinheit formulieren.

Satz 2.13 *(Cauchyscher Integralsatz für einfach zusammenhägende Gebiete)*

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg in G.

Beweis: Sei γ ein geschlossener Integrationsweg in G. Weil G einfach zusammenhängend ist, existiert eine Homotopie zwischen γ und einem konstanten Weg δ_c. Weil δ_c konstant ist, gilt $\int_{\delta_c} f(z)\,dz = 0$. Nach Prop. 2.12 gilt also auch $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. □

Anhang: Die Homotopieinvarianz der komplexe Wegintegrale

Die Hauptschwierigkeit beim Beweis von Prop. 2.12 besteht darin, dass die „Zwischenwege" $\gamma_t(s) = H(s,t)$, die im Zusammenhang mit einer Homotopie H auftreten, im Allgemeinen nur stetig, aber keine Integrationswege, also nicht stückweise differenzierbar, sind. Wir müssen deshalb die Definition des komplexen Kurvenintegrals auf stetige Wege ausdehnen, was mit einigem Aufwand verbunden ist und in dieser Form auch nur für holomorphe Funktionen möglich ist. Unsere Darstellung folgt weitestgehend der Arbeit [Ne], die ihrerseits auf einem älteren Vorlesungsskript basiert.

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Die Definition des komplexen Kurvenintegrals

$$\int_\gamma f(z)\,dz \quad = \quad \int_a^b (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)\,dt$$

ist nur sinnvoll, wenn diejenigen Punkte $t \in [a,b]$, in denen $\gamma'(t)$ nicht existiert, auf eine Nullmenge beschränkt bleiben. Bei einem Integrationsweg γ ist diese Menge endlich, die Bedingung also erfüllt. Steht für die Funktion f eine komplexe Stammfunktion $F : U \to \mathbb{C}$ zur Verfügung, so ist das komplexe Kurvenintegral nach Satz 2.1 (iii) auch durch $\int_\gamma f(z)\,dz = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a)$ gegeben. Ist $\mathcal{Z} = \{t_1, ..., t_{k-1}\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$, dann stimmt dieser Wert überein mit der Telekopsumme $\sum_{k=1}^n ((F \circ \gamma)(t_k) - (F \circ \gamma)(t_{k-1}))$.

Dies ist unser Ansatzpunkt für eine Verallgemeinerung. In § 3 werden wir zeigen, dass f für jeden Punkt $z \in U$ auf einer Kreisscheibe $B_r(z)$ in eine Potenzreihe entwickelt werden, vorausgesetzt, dass $r \in \mathbb{R}^+$ so gewählt wurde, dass $B_r(z) \subseteq U$ gilt. Auf dieser Kreisscheibe hat f dann also die Form $f(w) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-w)^n$, mit einer geeigneten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{C}$. Auf $B_r(z)$ besitzt f dann auch eine komplexe Stammfunktion, die ist gegeben durch $F(w) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n+1}(z-w)^{n+1} = \sum_{n=1}^\infty a_{n-1}(z-w)^n$; die Potenzreihenentwicklung ist auf der gesamten Kreisscheibe $B_r(z)$ gültig, weil die Entwicklungen von F und der formalen Ableitung f denselben Konvergenzradius haben.

Definition 2.14 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a,b] \to U$ ein stetiger Weg. Wir bezeichnen eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{t_1, ..., t_{m-1}\}$ von $[a,b]$ als ***zulässig*** für γ, wenn für $1 \le k \le m$ jeweils eine offene Kreisscheibe $B_k \subseteq U$ existiert, so dass $\gamma([t_{k-1}, t_k])$ jeweils in B_k enthalten ist. Für jede holomorphe Funktion f ordnen wir $\mathcal{Z}$ dann die Summe

$$\mathcal{S}^{\mathbb{C}}_{f,\gamma}(\mathcal{Z}) \quad = \quad \sum_{k=1}^m ((F_k \circ \gamma)(t_k) - (F_k \circ \gamma)(t_{k-1}))$$

zu, wobei $F_k : B_k \to \mathbb{C}$ jeweils eine (beliebig gewählte) komplexe Stammfunktion von $f|_{B_k}$ bezeichnet.

Unser Ziel besteht darin, der holomorphen Funktion f und dem stetigen Weg γ mit Hilfe dieser Summen ein Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$ zuzuordnen, welches das bisherige komplexe Kurvenintgral verallgemeinert. Dazu müssen wir nachweisen, dass die Summen $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}_{f,\gamma}(\mathcal{Z})$ von allen willkürlich gewählten Größen unabhängig ist.

Lemma 2.15 Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$, dann ist f konstant.

Beweis: Nach Satz 2.3 können je zwei Punkte $p, q \in G$ durch einen Polygonzug miteinander verbunden werden. Jeder Polygonzug besteht aus endlich vielen Einzelstrecken. Gilt $f(p) \neq f(q)$, so können p und q also durch Punkte ersetzt werden, bei denen $[p,q]$ in G enthalten ist, und für die ebenfalls $f(p) \neq f(q)$ gilt. Aus $f(p) \neq f(q)$ folgt $\mathrm{Re}(f)(p) \neq \mathrm{Re}(f)(q)$ oder $\mathrm{Im}(f)(p) \neq \mathrm{Im}(f)(q)$. Es genügt, den ersten Fall zu betrachten, weil die Argumentation im zweiten Fall vollkommen analog verläuft.

Weil f komplex differenzierbar ist, handelt es sich bei $g = \mathrm{Re}(f)$ um eine total differenzierbare Funktion, und wegen $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$ gilt auch jeweils $g'(z) = 0$. Hierbei bezeichnet $g'(z) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ allerdings nicht die komplexe, sondern die totale Ableitung von g, und ist als solche Element des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-wertigen linearen Abbildungen auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$. Nach dem Mittelwertsatz für Richtungsableitungen aus der Analysis mehrerer Variablen existiert ein Punkt $p' \in]p,q[$ mit $\partial_v g(p') = g(q) - g(p)$, wobei $\partial_v g$ die Richtungsableitung von g bezüglich des Vektors $v = q - p \in \mathbb{C}$ bezeichnet. Auf Grund der Verbindung zwischen Richtungsableitung und totaler Ableitung erhalten wir $g(q) - g(p) = \partial_v g(p') = g(p')(v) = 0$, im Widerspruch zur Feststellung $g(p) \neq g(q)$ von oben. □

Lemma 2.16 Die Summe $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}_{f,\gamma}(\mathcal{Z})$ ist unabhängig von der Wahl der Kreisscheiben B_k und der komplexen Stammfunktionen F_k.

Beweis: Ist $\tilde{F}_k : B_k \to \mathbb{C}$ eine weitere komplexe Stammfunktion von f, dann gilt $(\tilde{F}_k - F_k)'(z) = \tilde{F}_k'(z) - F_k'(z) = f(z) - f(z) = 0$ für alle $z \in B_k$. Wegen Lemma 2.15 unterscheiden sich $\tilde{F}_k$ und F_k auf B_k somit nur um eine Konstante $\alpha \in \mathbb{C}$, und es folgt

$$\begin{aligned} ((\tilde{F}_k \circ \gamma)(t_k) - (\tilde{F}_k \circ \gamma)(t_{k-1}) - ((F_k \circ \gamma)(t_k) - (F_k \circ \gamma)(t_{k-1}) \quad &= \\ ((\tilde{F}_k \circ \gamma)(t_k) - (F_k \circ \gamma)(t_k)) - ((\tilde{F}_k \circ \gamma)(t_{k-1}) - (F_k \circ \gamma)(t_{k-1})) \quad &= \quad \alpha - \alpha \quad = \quad 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Unabhängigkeit von der Wahl der komplexen Stammfunktionen F_k nachgewiesen. Sei nun $(\tilde{B}_k)_{1 \le k \le m}$ eine weitere Familie von offenen Kreisscheiben mit der Eigenschaft, dass $\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k) \in \tilde{B}_k$ für $1 \le k \le n$ erfüllt ist, und es sei $\tilde{F}_k : \tilde{B}_k \to \mathbb{C}$ jeweils ein komplexe Stammfunktion von f auf $\tilde{B}_k$. Dann gilt für alle k jeweils $\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k) \in B_k \cap \tilde{B}_k$, und sowohl F_k als auch $\tilde{F}_k$ kann zu einer komplexen Stammfunktion von f auf $B_k \cap \tilde{B}_k$ eingeschränkt werden, und die beiden komplexen Stammfunktionen unterscheiden sich wiederum nur um eine Konstante voneiander. Die Schnittmenge $B_k \cap \tilde{B}_k$ ist ebenfalls ein (sogar konvexes) Gebiet, und die Rechnung von eben zeigt, dass es keine Rolle spielt, ob die Summe $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}_{f,\gamma}(\mathcal{Z})$ mit F_k oder $\tilde{F}_k$ gebildet wird. □

Lemma 2.17 Der Wert der Summe $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}_{f,\gamma}(\mathcal{Z})$ ist auch unabhängig von der Wahl der zulässigen Zerlegung $\mathcal{Z}$.

Beweis: Seien $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ zwei zulässige Zerlegungen von $[a,b]$. Beim Beweis der Gleichung $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}_{f,\gamma}(\mathcal{Z}) = \mathcal{S}^{\mathbb{C}}_{f,\gamma}(\mathcal{Z}')$ genügt es, sich auf den Fall zu beschränken, dass $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$ gilt, dass also $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$ ist. Ist der Beweis nämlich in dieser Situation erbracht und sind $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ zwei beliebige Zerlegungen, dann ist $\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}'$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$, und die als bereits bewiesen angenommene Aussage liefert dann $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}_{f,\gamma}(\mathcal{Z}) = \mathcal{S}^{\mathbb{C}}_{f,\gamma}(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}')\mathcal{S}^{\mathbb{C}}_{f,\gamma}(\mathcal{Z}')$.

Setzen wir nun $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}'$ voraus, so entsteht $\mathcal{Z}'$ aus $\mathcal{Z}$ durch sukzessive Hinzunahme von Punkten. Wir können uns deshalb auf den Fall beschränken, dass sich $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ nur um einen einzigen Punkt unterscheiden, also $\mathcal{Z}' = \mathcal{Z} \cup \{t^*\}$ für ein $t^* \in]a,b[\setminus \mathcal{Z}$ gilt. Ist $\mathcal{Z} = \{t_1,...,t_{m-1}\}$, und setzen wir wie immer $t_0 = a$ und $t_m = b$, dann gilt $t_{\ell-1} < t^* < t_\ell$ für ein eindeutig bestimmtes $\ell \in \{1,...,m\}$. Weil $\mathcal{Z}$ eine zulässige Zerlegung ist, gibt es offene Kreisscheiben $B_k \subseteq U$ für $1 \le k \le m$, so dass jeweils $\gamma([t_{k-1},t_k]) \subseteq B_k$ erfüllt ist. Wegen $\gamma([t_{\ell-1},t_\ell]) \subseteq B_\ell$ gilt insbesondere $\gamma([t_{\ell-1},t^*]) \subseteq B_\ell$ und $\gamma([t^*,t_\ell]) \subseteq B_\ell$. Bezeichnet $F_k : B_k \to \mathbb{C}$ jeweils eine komplexe Stammfunktion von $f|_{B_k}$, dann erhalten wir

$$\mathcal{S}^{\mathbb{C}}_{f,\gamma}(\mathcal{Z}') \quad = \quad \sum_{k=1}^{\ell-1}((F_k \circ \gamma)(t_k) - (F_k \circ \gamma)(t_{k-1})) \; + \; ((F_\ell \circ \gamma)(t^*) - (F_\ell \circ \gamma)(t_{\ell-1}))$$

$$+ \, ((F_\ell \circ \gamma)(t_\ell) - (F_\ell \circ \gamma)(t_{\ell-1})) \; + \; \sum_{k=\ell+1}^{m}((F_k \circ \gamma)(t_k) - (F_k \circ \gamma)(t_{k-1})) \quad =$$

$$\sum_{k=1}^{\ell-1}((F_k \circ \gamma)(t_k) - (F_k \circ \gamma)(t_{k-1})) \; + \; ((F_\ell \circ \gamma)(t_\ell) - (F_\ell \circ \gamma)(t_{\ell-1})) \; + \; \sum_{k=\ell+1}^{m}((F_k \circ \gamma)(t_k) - (F_k \circ \gamma)(t_{k-1}))$$

$$= \quad \sum_{k=1}^{\ell-1}((F_k \circ \gamma)(t_k) - (F_k \circ \gamma)(t_{k-1})) \quad = \quad \mathcal{S}^{\mathbb{C}}_{f,\gamma}(\mathcal{Z}). \qquad \square$$

Lemma 2.18 Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a,b] \to U$ ein stetiger Weg, dann existiert eine zulässige Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$.

Beweis: In einem ersten Schritt zeigen wir, dass ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass für jedes $t \in [a,b]$ jeweils die offene Kreisscheibe $B_\varepsilon(\gamma(t))$ in U enthalten ist. Weil U offen ist, existiert für jedes $t \in [a,b]$ zunächst ein $\varepsilon_t \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{2\varepsilon_t}(\gamma(t)) \subseteq U$. Die Kreisscheiben $B_{\varepsilon_t}(\gamma(t))$ bilden eine offene Überdeckung von $\gamma([a,b])$. Weil diese Menge aber eine kompakte Teilmenge von U ist, wird $\gamma([a,b])$ bereits von endlich vielen dieser Kreisscheiben überdeckt. Es gibt also ein $r \in \mathbb{N}$ und $t_1,...,t_r \in [a,b]$ mit $\bigcup_{j=1}^r B_{\varepsilon_{t_j}}(\gamma(t_j)) \supseteq \gamma([a,b])$.

Sei nun $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{t_1},...,\varepsilon_{t_r}\}$; wir überprüfen, dass $B_\varepsilon(\gamma(t)) \subseteq U$ für jedes $t \in [a,b]$ gilt. Ist ein solches t vorgegeben und $z \in B_\varepsilon(\gamma(t))$, dann gilt $|z - \gamma(t)| < \varepsilon$. Desweiteren existiert ein $j \in \{1,...,r\}$ mit $\gamma(t) \in B_{\varepsilon_j}(\gamma(t_j))$, so dass also $|\gamma(t) - \gamma(t_j)| < \varepsilon_j$ gilt. Insgesamt gilt also $|z - \gamma(t_j)| \le |z - \gamma(t)| + |\gamma(t) - \gamma(t_j)| < \varepsilon + \varepsilon_j \le 2\varepsilon_j$, woraus sich wiederum $z \in B_{2\varepsilon_j}(\gamma(t_j)) \subseteq U$ ergibt. Damit ist der Nachweis von $B_\varepsilon(\gamma(t)) \subseteq U$ abgeschlossen.

Nun beweisen wir die Existenz einer zulässigen Zerlegung. Als stetige Abbildung auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ ist γ auch gleichmäßig stetig. Zu dem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, das wir im ersten Teil des Beweises konstruiert haben, existiert also ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass die Implikation $|t' - t| < \delta \Rightarrow |\gamma(t') - \gamma(t)| < \varepsilon$ für alle $t, t' \in [a,b]$ erfüllt ist. Sei nun $\mathcal{Z} = \{t_1,...,t_{m-1}\}$ eine Zerlegung mit $t_k - t_{k-1} < \delta$ für $1 \le k \le m$. Setzen wir $B_k = B_\varepsilon(\gamma(t_k))$ für jedes k, dann gilt jeweils $\gamma([t_{k-1},t_k]) \subseteq B_k$, denn für jedes $t \in [t_{k-1},t_k]$ ist $|t - t_k| \le t_k - t_{k-1} < \delta$ und somit $|\gamma(t) - \gamma(t_k)| < \varepsilon$, also $\gamma(t) \in B_\varepsilon(\gamma(t_k))$. Auf Grund der Konstruktion im ersten Teil des Beweises gilt außerdem $B_k \subseteq U$ für $1 \le k \le m$. Dies zeigt, dass es sich bei $\mathcal{Z}$ um eine zulässige Zerlegung des Intervalls handelt. $\square$

Die bisher erzielten Resultate zeigen nun, dass die folgende Definition sinnvoll ist.

Definition 2.19 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\gamma : [a,b] \to U$ ein stetiger Weg in U. Dann ist das ***komplexe Kurvenintegral*** von f über γ definiert durch $\int_\gamma f(z)\,dz = \mathcal{S}^{\mathbb{C}}_{f,\gamma}(\mathcal{Z})$, wobei $\mathcal{Z}$ eine beliebig gewählte zulässige Zerlegung von $[a,b]$ bezeichnet.

Als nächstes untersuchen wir, unter welchen Bedingungen solche komplexen Kurvenintegrale übereinstimmen. Dazu führen wir die folgende Notation ein: Sind $\gamma, \eta : [a,b] \to \mathbb{C}$ zwei stetige Wege mit demselben Definitionsintervall, dann setzen wir $\|\gamma - \eta\|_\infty = \max\{|\gamma(t) - \eta(t)| \mid t \in [a,b]\}$. Durch das Maximumsprinzip ist gewährleistet, dass die stetige Funktion $t \mapsto |\gamma(t) - \eta(t)|$ auf $[a,b]$ tatsächlich ihr Maximum annimmt. Wir bezeichnen zwei Wege $\gamma, \eta : [a,b] \to \mathbb{C}$ als ***benachbart***, wenn eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{t_1, ..., t_{m-1}\}$ existiert, die für γ und η zugleich zulässig ist. Dies bedeutet, dass offene Kreisscheiben $B_1, ..., B_m \subseteq U$ existieren, so dass für $1 \le k \le m$ jeweils $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subseteq B_k$ und $\eta([t_{k-1}, t_k]) \subseteq B_k$ erfüllt ist.

Lemma 2.20 Sei $\gamma : [a,b] \to U$ ein stetiger Weg. Dann existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass jeder stetige Weg $\eta : [a,b] \to U$ mit $\|\gamma - \eta\|_\infty < \varepsilon$ jeweils zu γ benachbart ist.

Beweis: Sei $\mathcal{Z} = \{t_1, ..., t_{m-1}\}$ eine zulässige Zerlegung für γ, und seien $B_1, ..., B_m$ offene Kreisscheiben mit der Eigenschaft $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subseteq B_k$ für $1 \le k \le m$, $B_k = B_{r_k}(z_k)$ mit $r_k \in \mathbb{R}^+$ und $z_k \in U$. Für jedes k setzen wir $s_k = \max\{|\gamma(t) - z_k| \mid t_{k-1} \le t \le t_k\}$; die Existenz dieser Maxima und die Ungleichungen $s_k < r_k$ ergeben sich auch hier aus dem Maximumsprinzip. Sei nun $\varepsilon = \min\{r_k - s_k \mid 1 \le k \le m\}$, und sei $\eta : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein stetiger Weg mit $\|\gamma - \eta\|_\infty < \varepsilon$. Für jedes $t \in [t_{k-1}, t_k]$ gilt $|\eta(t) - z_k| \le |\eta(t) - \gamma(t)| + |\gamma(t) - z_k| < \varepsilon + s_k \le (r_k - s_k) + s_k = r_k$. Also ist $\eta(t)$ in $B_{r_k}(z_k) = B_k$ enthalten. Damit ist $\eta([t_{k-1}, t_k]) \subseteq B_k$ nachgewiesen. Die Zerlegung $\mathcal{Z}$ ist also auch zulässig für η, und die Wege γ und η sind somit benachbart. □

Nun können wir ein Kriterium für die Gleichheit komplexer Kurvenintegrale formulieren.

Proposition 2.21 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und seien $\gamma, \eta : [a,b] \to U$ zwei benachbarte Wege. Außerdem setzen wir voraus, dass γ und η dieselben Endpunkte haben ($\gamma(a) = \eta(a)$, $\gamma(b) = \eta(b)$) oder beide geschlossen sind ($\gamma(a) = \gamma(b)$, $\eta(a) = \eta(b)$). Dann gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\delta f(z)\,dz$.

Beweis: Sei $\mathcal{Z} = \{t_1, ..., t_{m-1}\}$ eine Zerlegung, die für γ und η zugleich zulässig ist. Für $1 \le k \le m$ setzen wir $z_k = \gamma(t_k)$ und $w_k = \eta(t_k)$. Es sei $B_k \subseteq U$ jeweils eine offene Kreisscheibe mit $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \cup \eta([t_{k-1}, t_k]) \subseteq B_k$, und $F_k : B_k \to \mathbb{C}$ sei eine komplexe Stammfunktion von f. Außerdem setzen wir $a_k = F_k(z_k) - F_k(w_k)$ und $b_k = F_k(z_{k-1}) - F_k(w_{k-1})$ für alle k. Wir beweisen nun durch vollständige Induktion über k die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{k} (a_j - b_j) \quad = \quad a_k - b_1 \qquad \text{für } 1 \le k \le m. \tag{2.2}$$

Für $k = 1$ ist die Gleichung offensichtlich erfüllt. Für den Induktionsschritt von $k-1$ auf k müssen wir zeigen, dass $b_k - a_{k-1} = 0$ ist, denn dann erhalten wir mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{j=1}^{k} (a_j - b_j) \;=\; \sum_{j=1}^{k-1} (a_j - b_j) + (a_k - b_k) \;=\; a_{k-1} - b_1 + a_k - b_k \;=\; a_{k-1} - b_1 + a_k - b_k + (b_k - a_{k-1}) \;=\; a_k - b_1.$$

Diese Gleichung wiederum ist darauf zurückzuführen, dass F_{k-1} und F_k beides Stammfunktionen von f auf $B_{k-1} \cap B_k$ und deren Differenz somit konstant ist. Denn wegen $z_{k-1}, w_{k-1} \in B_{k-1} \cap B_k$ folgt daraus

$$\begin{aligned} b_k - a_{k-1} \quad &= \quad (F_k(z_{k-1}) - F_k(w_{k-1})) - (F_{k-1}(z_{k-1}) - F_{k-1}(w_{k-1})) \quad = \\ &(F_k(z_{k-1}) - F_{k-1}(z_{k-1})) - (F_k(w_{k-1}) - F_{k-1}(w_{k-1})) \quad = \quad 0. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis der Gleichung (2.2) abgeschlossen. Nun zeigen wir, dass sich aus dieser Gleichung in beiden betrachteten Fällen die Gleichheit der komplexen Kurvenintegrale ergibt. Zunächst betrachten wir den Fall, dass γ und η dieselben Eckpunkte besitzen. Dann gilt $z_0 = w_0$, $z_m = w_m$ und folglich $a_m = b_1 = 0$. Die Gleichung (2.2) liefert $\sum_{k=1}^{m}(a_k - b_k) = 0$, und dies ist gleichbedeutend mit der Übereinstimmung der komplexen Kurvenintegrale, wegen

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz - \int_\eta f(z)\,dz &= \sum_{k=1}^{m}((F_k\circ\gamma)(t_k)-(F_k\circ\gamma)(t_{k-1})) - \sum_{k=1}^{m}((F_k\circ\eta)(t_k)-(F_k\circ\eta)(t_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^{m}(((F_k\circ\gamma)(t_k)-(F_k\circ\eta)(t_k))-((F_k\circ\gamma)(t_{k-1})-(F_k\circ\eta)(t_{k-1}))) \\ &= \sum_{k=1}^{m}((F_k(z_k)-F_k(w_k))-(F_k(z_{k-1})-F_k(w_{k-1}))) \quad = \quad \sum_{k=1}^{m}(a_k-b_k).\end{aligned}$$

Nun betrachten wir noch den Fall, dass γ und η beides geschlossene Wege sind. Dann gilt $z_0 = z_m$ und $w_0 = w_m$. In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned}a_m - b_1 &= (F_m(z_m)-F_m(w_m))-(F_1(z_0)-F_1(w_0)) \quad = \quad (F_m(z_m)-F_1(z_0))-(F_m(w_m)-F_1(w_0)) \\ &= (F_m(z_0)-F_1(z_0))-(F_m(w_0)-F_1(w_0)) \quad ,\end{aligned}$$

und diese Differenz ist gleich null, weil F_1 und F_m beides komplexe Stammfunktionen von f auf der Menge $B_1 \cap B_m$ sind, die sowohl $z_0 = z_m$ als auch $w_0 = w_m$ enthält. □

Nun sind wir in der Lage, den Beweis von Proposition 2.12 aus dem Hauptteil des Kapitels abzuschließen. Wie dort angegeben, sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Weiter seien $\gamma, \eta : [a,b] \to G$ zwei Integrationswege. Wir setzen voraus, dass γ und η dieselbe Endpunkte haben, und dass zwischen den beiden Integrationswegen eine Homotopie $H : [a,b]\times[0,1] \to G$ mit festen Endpunkten existiert, oder dass γ und η geschlossen sind, und dass es zwischen ihnen eine freie Homotopie H gibt (mit demselben Definitionsbereich).

Als stetige Funktion auf der kompakten Menge $[a,b]\times[0,1]$ ist H gleichmäßig stetig. Für jedes $t \in [0,1]$ sei $\gamma_t : [a,b] \to U$ der stetige Weg definiert durch $\gamma_t(s) = H(s,t)$ für alle $s \in [a,b]$. Sei nun $t_0 \in [0,1]$ beliebig vorgegeben. Nach Lemma 2.20 existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $t \in [0,1]$ mit $\|\gamma_t - \gamma_{t_0}\|_\infty < \varepsilon$ der Weg γ_t zu γ_{t_0} benachbart ist. Nach Proposition 2.21 stimmen die komplexen Kurvenintegrale

$$\int_{\gamma_{t_0}} f(z)\,dz \qquad \text{und} \qquad \int_{\gamma_t} f(z)\,dz$$

dann überein. Auf Grund der gleichmäigen Stetigkeit existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $s, s' \in [a,b]$ und alle $t, t' \in [0,1]$ aus $\max\{|s'-s|, |t'-t|\} < \delta$ jeweils $|H(s',t')-H(s,t)| < \varepsilon$ folgt. Insbesondere gilt im Fall $|t-t_0| < \delta$ dann für alle $s \in [a,b]$ jeweils $|\gamma_t(s)-\gamma_{t_0}(s)| = |H(s,t)-H(s,t_0)| < \varepsilon$, also $\|\gamma_t - \gamma_{t_0}\|_\infty < \varepsilon$.

Dies zeigt, dass die Integralfunktion $I : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \int_{\gamma_t} f(z)\,dz$ lokal konstant, für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ die Urbildmenge $I^{-1}(\{\lambda\})$ in $[0,1]$ also relativ offen ist. Daraus folgt wie gewünscht die Gleichung

$$\int_\gamma f(z)\,dz \quad = \quad I(0) \quad = \quad I(1) \quad = \quad \int_\eta f(z)\,dz.$$

Denn wäre $I(0) \neq I(1)$ und $I(0) = \lambda$ dann könnten wir $[0,1]$ in die beiden relativ offenen Teilmengen $I^{-1}(\{\lambda\})$ und $I^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{\lambda\})$ zerlegen, was unmöglich ist, da es sich bei $[0,1]$ um einen wegzusammnhängenden metrischen Raum handelt. □

§ 3. Cauchysche Integralformel und Potenzreihenentwicklung

Zusammenfassung. Die Cauchysche Integralformel stellt die Werte $f(z)$ einer holomorphen Funktion für z im Inneren einer Kreisscheibe $B_r(a)$ durch ein Integral über den Rand $\partial B_r(a)$ dar. Wesentlicher Bestandteil des Beweises ist der Cauchysche Integralsatz aus dem vorherigen Kapitel. Eine wichtige Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel ist die Tatsache, dass holomorphe Funktionen beliebig oft komplex differenzierbar sind.

In § 1 hatten wir gezeigt, dass komplexe Potenzreihen auf ihrem Konvergenzbereich komplex differenzierbare Funktionen definieren. Hier zeigen wir, dass umgekehrt eine komplex differenzierbare Funktion zumindest in der unmittelbaren Umgebung jedes Punktes ihres Definitionsbereichs durch eine komplexe Potenzreihe dargestellt werden kann. Dabei lassen sich die Entwicklungskoeffizienten sowohl durch die höheren komplexen Ableitungen als auch durch geeignete Kurvenintegrale darstellen.

Zentrale Sätze

– Cauchysche Integralformel

– Holomorphe Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar.

– Ist $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $z \in U$, dann kann f auf einer hinreichend kleinen offenen Kreisscheibe $B_r(z)$ durch eine Potenzreihe dargestellt werden.

Als Vorbereitung für den Beweis des Cauchyschen Integralsatzes zeigen wir, dass Kurvenintegrale über stetige Funktionen, die von einem komplex differenzierbaren Parameter abhängen, selbst komplex differenzierbare Funktionen darstellen. Seien U eine offene, W eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $f : U \times W \to \mathbb{C}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für jedes $w \in W$ die Funktion $f_w : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z,w)$ eine reell differenzierbare Funktion ist. Dann setzen wir $\partial_z f(z,w) = \frac{\partial f_w}{\partial z}(z,w)$. Wir erhalten auf diese Weise eine Abbildung $\partial_z f : U \times W \to \mathbb{C}$. Entsprechend verwenden wir die Bezeichnungen $\partial_{\bar{z}} f$, $\partial_x f$ und $\partial_y f$.

Proposition 3.1 Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $W \subseteq \mathbb{C}$ beliebig und $f : U \times W \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Außerdem setzen wir voraus, dass $z \mapsto f(z,w)$ für jedes feste $w \in W$ eine stetige komplexe Ableitung besitzt. Sei $\gamma : [a,b] \to W$ ein Integrationsweg in W. Dann ist $F : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_\gamma f(z,w)\,dw$ eine holomorphe Funktion, und es gilt $F'(z) = \int_\gamma \partial_z f(z,w)\,dw$ für alle $z \in U$.

Beweis: Wesentliches Hilfsmittel ist der Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und partieller Differentiation aus der Analysis mehrerer Variablen. Sei $z_0 \in U$ vorgegeben und $C \subseteq U$ eine kompakte Umgebung von z_0. Wir betrachten die Abbildung

$$\tilde{f} : U \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad (z,t) \mapsto f(z,\gamma(t))\gamma'(t).$$

Jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten Intervall ist Lebesgue-integrierbar. Also sind Real- und Imaginärteil von $[a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \tilde{f}(z,t)$ für jedes $z \in U$ Lebesgue-integrierbar. Weil f in der ersten Variable komplex und somit insbesondere reell differenzierbar ist, existieren die Richtungsableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$. Für jedes Paar $(z,t) \in U \times [a,b]$ sind die Richtungsableitungen von $\tilde{f}$ in (z,t) gegeben durch die Ableitungen von $s \mapsto f(z+s,\gamma(t))\gamma'(t)$ bzw. $s \mapsto f(z+is,\gamma(t))\gamma'(t)$ im Nullpunkt und somit gegeben durch

$$\partial_x \tilde{f}(z,t) \quad = \quad \partial_x f(z,\gamma(t))\gamma'(t) \qquad \text{und} \qquad \partial_y \tilde{f}(z,t) \quad = \quad \partial_y f(z,\gamma(t))\gamma'(t).$$

Auf Grund unserer Voraussetzungen sind diese Abbildungen auf $U \times [a,b]$ stetig. Nach dem Maximumsprinzip sind Real- und Imaginärteil dieser Funktionen auf der kompakten Menge $C \times [a,b]$ durch eine gemeinsame Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ beschränkt. Die konstante Abbildung $[a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \gamma$ ist also für jedes $z \in C$ eine integrierbare Majorante von Real- und Imaginärteil der Funktionen $t \mapsto \partial_x \tilde{f}(z,t)$ und $t \mapsto \partial_y \tilde{f}(z,t)$. Sei nun $F : U \times W \to \mathbb{C}$ die Funktion

$$F(z) \quad = \quad \int_a^b \tilde{f}(z,t)\,dt \quad = \quad \int_a^b f(z,\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \quad = \quad \int_\gamma f(z,w)\,dw.$$

In der mehrdimensionalen Integrationstheorie haben wir als Anwendung der Lebesguetheorie den Satz über die Vertauschbarkeit von Integration mit Richtungsableitungen hergeleitet (Satz 6.25). Dieser Satz, angewendet auf Real- und Imaginärteil von $t \mapsto \tilde{f}(z,t)$, liefert für unseren Punkt $z_0 \in U$ die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z_0) \quad = \quad \int_a^b \partial_x \tilde{f}(z_0,t)\,dt \quad = \quad \int_a^b \partial_x f(z_0,\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \quad = \quad \int_\gamma \partial_x f(z_0,w)\,dw$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z_0) \quad = \quad \int_a^b \partial_y \tilde{f}(z_0,t)\,dt \quad = \quad \int_a^b \partial_y f(z_0,\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \quad = \quad \int_\gamma \partial_y f(z_0,w)\,dw \quad ;$$

insbesondere existieren die Richtungsableitungen im Punkt z_0. Weil $z \mapsto f(z,w)$ für jedes feste $w \in W$ komplex differenzierbar ist, gilt jeweils $\frac{1}{2}\partial_x f(z_0,w) + \frac{1}{2}i\partial_y f(z_0,w) = \partial_{\bar{z}} f(z_0,w) = 0$. Wir erhalten somit

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z_0) \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(z_0) + \frac{1}{2}i\frac{\partial F}{\partial y}(z_0) \quad = \quad \frac{1}{2}\int_\gamma \partial_x f(z_0,w)\,dw + \frac{1}{2}i\int_\gamma \partial_y f(z_0,w)\,dw \quad =$$
$$\int_\gamma \left(\tfrac{1}{2}\partial_x f(z_0,w) + \tfrac{1}{2}i\partial_y f(z_0,w)\right)\,dw \quad = \quad \int_\gamma \partial_{\bar{z}} f(z_0,w)\,dw \quad = \quad \int_\gamma 0\,dw \quad = \quad 0.$$

Dies zeigt, dass F im Punkt z_0 komplex differenzierbar ist. Für die komplexe Ableitung erhalten wir

$$F'(z_0) \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(z_0) - \frac{1}{2}i\frac{\partial F}{\partial y}(z_0) \quad = \quad \frac{1}{2}\int_\gamma \partial_x f(z_0,w)\,dw - \frac{1}{2}i\int_\gamma \partial_y f(z_0,w)\,dw \quad =$$
$$\int_\gamma \left(\tfrac{1}{2}\partial_x f(z_0,w) - \tfrac{1}{2}i\partial_y f(z_0,w)\right)\,dw \quad = \quad \int_\gamma \partial_z f(z_0,w)\,dw.$$

□

Proposition 3.2 Sei $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für jedes $z \in B_r(a)$ jeweils

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w-z} \quad = \quad 2\pi i.$$

Beweis: Sei $h : B_r(a) \to \mathbb{C}$ definiert durch $h(z) = \int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w-z}$ für alle $z \in B_r(a)$. Die Anwendung von Prop. 3.1 auf die Mengen $U = B_r(a)$, $W = \partial B_r(a)$ und die Abbildung $f(z,w) = \frac{1}{w-z}$ zeigt, dass h auf $B_r(a)$ holomorph ist, und dass man ihre komplexe Ableitung durch Differentiation nach z unter dem Integralzeichen erhält. Es gilt also

$$h'(z) \quad = \quad \int\limits_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{(w-z)^2}.$$

Weil die Funktion $\mathbb{C} \setminus \{z\} \to \mathbb{C}$, $w \mapsto (w-z)^{-2}$ für alle $z \in B_r(a)$ unter dem Integralzeichen die Stammfunktion $w \mapsto -(w-z)^{-1}$ besitzt, ist das geschlossene Kurvenintegral über $w \mapsto (w-z)^{-2}$ jeweils Null. Es gilt also $h'(z) = 0$ für alle $z \in B_r(a)$. Somit ist h auf $B_r(a)$ konstant. Setzen wir $\gamma(t) = a + re^{2\pi i t}$, dann erhalten wir für alle $z \in B_r(a)$ jeweils

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w-z} \quad &= \quad h(z) \quad = \quad h(a) \quad = \quad \int\limits_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w-a} \quad = \quad \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\,dt \\ &= \quad \int_0^1 \frac{2\pi i r e^{2\pi i t}}{re^{2\pi i t}}\,dt \quad = \quad \int_0^1 2\pi i\,dt \quad = \quad 2\pi i. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.3 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$, so dass die abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{B}_r(a)$ in U liegt. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass auch noch die offene Kreisscheibe $B_{r+\varepsilon}(a)$ in U enthalten ist.

Beweis: Angenommen, die Aussage ist falsch. Dann gibt es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Komplement $V = \mathbb{C} \setminus U$ mit $|z_n - a| \le r + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil die gesamte Folge in der kompakten Kreisscheibe $\bar{B}_{r+1}(a)$ enthalten ist, können wir durch Übergang zu einer konvergenten Teilfolge voraussetzen, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Diese Teilfolge erfüllt weiterhin die Abschätzung $|z_n - a| \le r + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun gilt

$$|z-a| \quad = \quad \lim_{n\to\infty} |z_n - a| \quad \le \quad \lim_{n\to\infty} \left(r + \frac{1}{n}\right) \quad = \quad r \quad ,$$

also $z \in \bar{B}_r(a)$. Weil aber V abgeschlossen ist, ist auch z in V enthalten. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass $\bar{B}_r(a)$ in U enthalten ist. □

Satz 3.4 *(Cauchysche Integralformel)*

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\bar{B}_r(a) \subseteq U$. Dann gilt für jedes $z \in B_r(a)$ die Gleichung

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass auch $B_{r+\varepsilon}(a)$ noch in U liegt. Dann ist $G = B_{r+\varepsilon}(a)$ ein konvexes Gebiet. Für ein festgewähltes $z \in B_r(a)$ betrachten wir auf G die Funktion gegeben durch

$$g(w) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{für } w \neq z \\ f'(z) & \text{für } w = z. \end{cases}$$

Diese Funktion ist auf $G \setminus \{z\}$ holomorph und auf Grund der komplexen Differenzierbarkeit von f im Punkt z stetig. Wir können somit den Cauchyschen Integralsatz in der Fassung von Satz 2.9 anwenden. Zusammen mit Prop. 3.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad \int_{\partial B_r(a)} g(w)\,dw \quad &= \quad \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw \quad = \quad \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z) \int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w-z} \\ &= \quad \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - 2\pi i f(z). \end{aligned}$$

Umstellen dieser Gleichung nach $f(z)$ liefert die gewünschte Aussage. □

Aus der Cauchyschen Integralformel ergeben sich eine ganze Reihe überraschender Konsequenzen.

Satz 3.5 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt

(i) Die Funktion f auf U beliebig oft komplex differenzierbar.

(ii) Ist $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt und $r \in \mathbb{R}^+$, so dass $B_r(a) \subseteq U$ gilt, dann sind die höheren Ableitungen auf $B_r(a)$ gegeben durch

$$f^{(n)}(z) \quad = \quad \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw \qquad \text{für alle } z \in B_r(a) \text{ und } n \in \mathbb{N}_0.$$

(iii) Jede Funktion, die auf ihrem Definitionsbereich eine komplexe Stammfunktion besitzt, ist holomorph.

Beweis: zu (i) Sei $a \in U$ ein beliebig gewählter Punkt und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $B_r(a) \subseteq U$. Es genügt zu zeigen, dass f' auf $B_r(a)$ komplex differenzierbar ist, denn dann ergibt sich die Existenz der höheren Ableitungen $f^{(n)}$ durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Auf Grund von Satz 3.4, der Cauchyschen Integralformel, gilt

$$f(z) \quad = \quad \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad \text{für alle } z \in B_r(a).$$

Wir betrachten nun die Funktion $g : B_r(a) \times \partial B_r(a) \to \mathbb{C}$, $(z,w) \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$. Diese ist offenbar in w stetig und nach z stetig komplex differenzierbar. Nach Prop. 3.1 können wir Integration über die Kurve und Differentiation vertauschen. Die Funktion f ist demnach komplex differenzierbar, und es gilt $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$. Wiederum ist die Funktion

$\frac{f(w)}{(w-z)^2}$ unter dem Integralzeichen stetig in w und nach z stetig differenzierbar. Die erneute Anwendung von Prop. 3.1 zeigt, dass auch f' holomorph ist.

zu (ii) Wir beweisen die Gleichung durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n = 0$ stimmt sie mit der Cauchyschen Integralformel überein. Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ vorgegeben, und setzen wir

$$f^{(n)}(z) \quad = \quad \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw \qquad \text{für alle } z \in B_r(a) \text{ voraus.}$$

Nach Teil (i) ist $f^{(n)}$ holomorph, und wie wir im Beweis gesehen haben, kann man die Ableitung von $f^{(n)}$ dadurch bestimmen, dass man die Funktion unter dem Integralzeichen nach z ableitet. Die Ableitung von $z \mapsto (w-z)^{-n-1}$ für beliebiges $w \in \partial B_r(a)$ ist gegeben durch $z \mapsto (-1)(-n-1)(w-z)^{-n-2}$. Damit erhalten wir

$$f^{(n+1)}(z) \quad = \quad \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(a)} (-1)(-n-1)\frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\, dw \quad = \quad \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\, dw.$$

zu (iii) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $g : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit komplexer Stammfunktion G auf U. Nach Teil (i) ist dann $G' = g$ auf U holomorph. □

Kommen wir nun zum zweiten Thema dieses Kapitels, der Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen.

Lemma 3.6 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt für jede in U verlaufende Kurve γ jeweils $\lim_n \int_\gamma f_n(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$.

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann gibt es auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $z \in U$ und alle $n \geq N$ jeweils $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ gilt. Mit Satz 2.1 (ii) erhalten wir für alle $n \geq N$ die Abschätzung $\left|\int_\gamma f_n(z)\, dz - \int_\gamma f(z)\, dz\right| = \left|\int_\gamma (f_n - f)(z)\, dz\right| \leq \varepsilon\ell(\gamma)$. □

Satz 3.7 *(Satz von der Potenzreihenentwicklung)*

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei außerdem $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ gegeben durch $r = \sup\{s \in \mathbb{R}^+ \mid B_s(a) \subseteq U\}$. Dann gilt

(i) Die Funktion kann auf der offenen Kreisscheibe $B_r(a)$ in eine Potenzreihe entwickelt werden. Es existiert also eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{C}$, so dass für alle $z \in B_r(a)$ die Gleichung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ erfüllt ist. Dabei beträgt der Konvergenzradius der Potenzreihe mindestens r.

(ii) Die Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ der Potenzreihe sind eindeutig bestimmt und gegeben durch

$$a_n \quad = \quad \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \quad ,$$

wobei $s \in]0, r[$ beliebig gewählt werden kann.

Beweis: Sei $s \in \mathbb{R}^+$ mit $s < r$. Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist wiederum die Cauchysche Integralformel

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad \text{für alle} \quad z \in B_s(a). \tag{3.1}$$

Sei $z \in B_s(a)$ und $w \in \partial B_s(a)$. Unser Ziel besteht darin, den Ausdruck $\frac{1}{w-z}$ mit Hilfe der geometrischen Reihe darzustellen. Es gilt $\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} \cdot \frac{1}{w-a} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-z}$, wegen $|z-a| < s$ und $|w-a| = s$ außerdem $|\frac{z-a}{w-a}| < 1$. Für den Ausdruck unter dem Integralzeichen in Gleichung (3.1) erhalten wir damit

$$\frac{f(w)}{w-z} \quad = \quad \frac{f(w)}{w-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} \quad = \quad \frac{f(w)}{w-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} f(w).$$

Diese Reihe konvergiert für jedes feste $z \in B_s(a)$ als Funktion von $w \in \partial B_s(a)$ jeweils gleichmäßig gegen ihren Grenzwert. Denn auf Grund des Maximumsprinzips existiert eine konstante $C \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(w)| \le C$ für alle $w \in \partial B_s(a)$, so dass wir für die Beträge der Summanden die von w unabhängige Abschätzung durch $C \cdot |z-a|^n \cdot s^{-(n+1)}$ erhalten. Mit Lemma 3.6 erhalten wir also

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_s(a)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} f(w) \right) dw \quad =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\partial B_s(a)} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} f(w)\, dw \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right) (z-a)^n.$$

Bezeichnen wir die komplexen Zahlen in der großen Klammer hinter dem letzten Summenzeichen jeweils mit a_n, dann gilt also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ für alle $z \in B_s(a)$.

Die Entwicklungskoeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ lassen sich mit den höheren Ableitungen von f in Verbindung bringen. Weil die angegebene Potenzreihe auf $B_s(a)$ konvergiert, muss ihr Konvergenzradius mindestens gleich s sein. Aus der Analysis einer Variablen ist bekannt, dass sich Konvergenzradius durch Übergang zur formalen Ableitung nicht ändert. Wir zeigen durch vollständige Induktion über n, dass die höheren formalen Ableitungen unserer Potenzreihe für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$f^{(n)}(z) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} a_{n+k} (z-a)^k$$

gegeben sind. Für $n = 0$ ist die Gleichung wegen $\frac{0!}{(0-0)!} = 1$ offenbar erfüllt. Ist nun $n \in \mathbb{N}_0$ und setzen wir nun die Gleichung für $f^{(n)}(z)$ voraus, dann verschwindet durch erneute Ableitung der konstante Term a_n, und wir erhalten

$$f^{(n+1)}(z) \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} a_{n+k} k (z-a)^{k-1} \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k)!}{(k-1)!} a_{n+k} (z-a)^{k-1} \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1+k)!}{k!} a_{n+1+k} (z-a)^k.$$

Damit ist die Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen. Insbesondere gilt $f^{(n)}(a) = n! a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, was zu $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ umgestellt werden kann. Nun ist f nach Satz 3.5 nicht nur als Potenzreihe, sondern auch als komplexe Funktion beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$a_n \quad = \quad \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$$

für alle $z \in B_s(a)$ und $n\mathbb{N}_0$. Dies zeigt, dass die Koeffizienten von der Wahl des Radius $s \in]0, r[$ unabhängig sind, und dass die Potenzreihenentwicklung auf der gesamten offenen Kreisscheibe $B_r(a)$ gültig ist. Daraus folgt auch, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe mindestens r beträgt. □

§ 4. Anwendungen des Integralsatzes und der Integralformel

Zusammenfassung. Aus dem Cauchyschen Integralsatz und der Integralformel lassen sich eine ganze Reihe spezieller Eigenschaften holomorpher Funktionen herleiten. Der *Identitätssatz*, auch bekannt unter den Bezeichungen *Holomorphie-* oder *Permanenzprinzip*, besagt, dass eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ durch ihre Werte auf einem winzigen Teil von G bereits eindeutig festgelegt ist.

Nach dem *Satz von Liouville* ist jede auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion mit beschränkter Wertemenge konstant. Daraus ergibt sich unter anderem der *Fundamentalsatz der Algebra*, nach dem jedes komplexe Polynom über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt. In der Algebra wird dieses Phänomen auch als *algebraische Abgeschlossenheit* des Körpers $\mathbb{C}$ bezeichnet. Der *Satz von der Gebietstreue* besagt, dass Gebiete unter holomorphen Abbildungen erhalten bleiben. Daraus wiederum ergibt sich das *Maximumsprinzip*, welches besagt, dass eine nicht-konstante holomorphe Funktion in keinem Punkt ihres Definitionsbereichs ein lokales Betragsmaximum annimmt.

Wichtige Grundbegriffe

- Nullstellenordnung einer holomorphen Funktion
- Vielfachheit eines Wertes einer holomorphen Funktion
- diskrete Teilmengen von $\mathbb{C}$

Zentrale Sätze

- Identitätssatz
- Satz von Liouville
- Fundamentalsatz der Algebra
- Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen
- Satz von der Gebietstreue

Ist K ein Körper und $f \in K[x]$ ein nicht-konstantes Polynom, so bezeichnet man $a \in K$ als Nullstelle n-ter Ordnung, wenn ein Polynom $g \in K[x]$ mit $f(x) = (x-a)^n g(x)$ und $g(a) = 0$ existiert. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass die Nullstellenordnung durch die höheren Ableitungen ermittelt werden kann: Es gilt $f(k)(a) = 0$ für $0 \leq k < n$ und $f^{(n)}(a) \neq 0$. Diese Beobachtung motiviert die folgende Definition.

Definition 4.1 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Eine Funktion f besitzt in einem Punkt $w \in \mathbb{C}$ eine ***Nullstelle der Ordnung*** n, wenn

$$f^{(k)}(w) = 0 \text{ für } 0 \leq k < n \qquad \text{und} \qquad f^{(n)}(w) \neq 0 \quad \text{gilt.}$$

Man sagt, ein Wert $a \in \mathbb{C}$ wird von f in w ***mit Vielfachheit*** n angenommen, wenn die Funktion $z \mapsto f(z) - a$ in w eine Nullstelle der Ordnung n besitzt. Von einer Nullstelle der Ordnung ∞ in w spricht man, wenn $f^{(n)}(w) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Die Nullstellenordnungen komplexer Funktionen haben Auswirkungen auf das Verhalten der Funktionen in unmittelbarer Nähe der Nullstellen.

Proposition 4.2 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Funktion f besitzt in w eine Nullstelle der Ordnung n.

(ii) Es gibt ein $r \in \mathbb{R}^+$ und eine Folge $(a_k)_{k \geq n}$ komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ und

$$f(z) \quad = \quad \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-w)^k \qquad \text{für alle} \quad z \in B_r(w).$$

(iii) Es gibt eine offene Umgebung V von w mit $V \subseteq U$ und eine holomorphe Funktion g auf V mit $g(w) \neq 0$ und $f(z) = (z-w)^n g(z)$ für alle $z \in V$.

Beweis: "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $r \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, das $B_r(w) \subseteq U$ gilt. Nach Satz 3.7 besitzt f auf $B_r(w)$ eine Potenzreihen-Entwicklung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-w)^k$. Auf Grund der Formel $a_k = f^{(k)}(w)/(k!)$ für die Ableitung einer Potenzreihe gilt $a_k = 0$ für $0 \leq k < n$ und $a_n \neq 0$.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Sei g auf der offenen Umgebung $V = B_r(w)$ von w durch $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-w)^{k-n}$ definiert. Dann ist g nach Satz 1.12 auf $B_r(w)$ holomorph. Außerdem gilt $g(w) = a_n \neq 0$ und $f(z) = (z-w)^n g(z)$ für alle $z \in B_r(w)$.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)" Wir beweisen durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$: Ist $V \subseteq U$ eine offene Umgebung von w und f eine holomorphe Funktion auf V der Form $f(z) = (z-w)^n g(z)$, wobei g eine holomorphe Funktion auf V mit $g(w) \neq 0$ bezeichnet, dann ist w eine Nullstelle der Ordnung n von f. Im Fall $n = 0$ folgt aus der Voraussetzung direkt $f(w) \neq 0$, also braucht hier nichts gezeigt werden. Setzen wir nun die Aussage für n voraus, und sei $f(z) = (z-w)^{n+1} g(z)$ mit einer Funktion g wie angegeben. Dann gilt auf Grund der Produktregel

$$f'(z) \quad = \quad (n+1)(z-w)^n g(z) + (z-w)^{n+1} g'(z) \quad = \quad (z-w)^n \big((n+1)g(z) + (z-w)g'(z)\big).$$

Die Funktion $h : V \to \mathbb{C}$, $z \mapsto (n+1)g(z) + (z-w)g'(z)$ ist holomorph, und es gilt

$$h(w) \quad = \quad (n+1)g(w) + (w-w)g'(w) \quad = \quad (n+1)g(w) \quad \neq \quad 0.$$

Wegen $f'(z) = (z-w)^n h(z)$ kann also die Induktionsvoraussetzung auf die Funktion $f'(z)$ angwendet werden. Wir erhalten $f^{(k)}(w) = 0$ für $1 \leq k \leq n$ und $f^{(n+1)}(w) \neq 0$. Außerdem ist offenbar $f^{(0)}(w) = f(w) = (w-w)^{n+1} g(w) = 0$ erfüllt. Also besitzt f in w eine Nullstelle der Ordnung $n+1$. □

Definition 4.3 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge. Ein Punkt $p \in D$ wird ***isolierter Punkt*** von D genannt, wenn eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}$ von p mit $D \cap V = \{p\}$ existiert. Eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, die nur aus isolierten Punkten besteht, wird ***diskrete Teilmenge*** von $\mathbb{C}$ genannt.

Diskrete Teilmengen $D \subseteq \mathbb{C}$ sind dadurch charakterisiert, dass alle Teilmengen von D relativ offen und relativ abgeschlossen in D sind. Ist $p \in D$ kein isolierter Punkt einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ und $D_p = D \setminus \{p\}$, dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $z_n \in D_p \cap B_{1/n}(p)$. Dass p kein isolierter Punkt von D ist, ist also gleichbeutend damit, dass eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D_p mit $\lim_n z_n = p$ existiert. ies ist

Satz 4.4 *(Identitätssatz)*
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein nichtleeres Gebiet, und seien f und g holomorphe Funktionen auf G. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $f = g$

(ii) Es gibt einen Punkt $w \in G$, so dass die Funktion $h = f - g$ in w eine Nullstelle unendlicher Ordnung besitzt.

(iii) Es gibt eine nicht-diskrete Teilmenge $N \subseteq G$ mit $f|_N = g|_N$.

Beweis: "(i) ⇒ (iii)" Die Menge G ist als nichtleere offene Menge nichtdiskret. Denn jede Umgebung eines Punktes $w \in G$ enthält eine Menge der Form $B_r(w)$ mit einem geeigneten $r \in \mathbb{R}^+$, und $B_r(w)$ enthält neben w noch unendlich viele weitere Punkte. Also ist die Aussage (iii) mit $N = G$ erfüllt.

"(iii) ⇒ (ii)" Sei $N \subseteq G$ eine nichtdiskrete Teilmenge mit $f|_N = g|_N$. Dann existiert ein Punkt $w \in N$ und eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $N \setminus \{w\}$ mit $\lim_n z_n = w$. Wir zeigen nun, dass die Funktion $h = f - g$ in diesem Punkt w eine Nullstelle unendlicher Ordnung besitzt. Nach Voraussetzung gilt $h(z_n) = f(z_n) - g(z_n) = f(z_n) - f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nehmen wir an, die Nullstellenordnung m in w ist nur endlich (möglicherweise gleich null). Dann gibt es nach Proposition 4.2 eine offene Umgebung $W \subseteq G$ von w und eine holomorphe Funktion u auf W mit $u(w) \neq 0$ und $h(z) = (z-w)^m u(z)$ für alle $z \in W$. Als holomorphe Funktion ist u inbesondere im Punkt w stetig. Es folgt

$$u(w) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} u(z_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{h(z_n)}{(z_n - w)^m} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{0}{(z_n - w)^m} \quad = \quad 0$$

im Widerspruch zur Annahme. Also muss die Nullstellenordnung von h in w unendlich sein.

"(ii) ⇒ (i)" Nach Voraussetzung besitzt h im Punkt w eine Nullstelle unendlicher Ordnung; zu zeigen ist $h = 0$. Dazu betrachten wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge

$$M_n \quad = \quad \{z \in G \mid h^{(n)}(z) = 0\}$$

und setzen $M = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$. Nach Voraussetzung gilt $w \in M$. Als Urbild der einelementigen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Abbildung $h^{(n)}$ sind die Mengen M_n alle abgeschlossen. Damit ist auch M in $\mathbb{C}$ abgeschlossen.

Wir zeigen nun, dass M in $\mathbb{C}$ andererseits auch offen ist. Sei dazu $v \in M$ ein beliebig gewählter Punkt. Nach Satz 3.7 existiert ein $r \in \mathbb{R}^+$, so dass h auf $B_r(v)$ eine Potenzreihen-Entwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-v)^n$ besitzt. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $v \in M_n$, also $h^{(n)}(v) = 0$ und somit auch $a_n = \frac{h^{(n)}(v)}{n!} = 0$. Dies zeigt, dass h auf der Menge $B_r(v)$ konstant Null ist. Es folgt $B_r(v) \subseteq M$ auf Grund der Definition von M.

Damit ist die Offenheit von M bewiesen. Insgesamt ist M also eine nichtleere, offene und zugleich abgeschlossene Teilmenge von G. Weil G als Gebiet zusammenhängend ist, folgt daraus $M = G$ und somit auch $M_0 = G$. Dies zeigt, dass die Funktion h auf G konstant Null ist. Aus $h = 0$ folgt wiederum $f = g$ auf ganz G. □

Satz 4.5 *(Cauchysche Ungleichungen)*

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$, $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $B_r(a) \subseteq U$, so dass die Funktion f auf $B_r(a)$ die Potenzreihen-Entwicklung

$$f(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

besitzt. Setzen wir $m = \max\{|f(z)| \mid z \in \partial B_r(a)\}$, dann gilt $|a_n| \le \frac{m}{r^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Nach Satz 3.7 erhält man die Koeffizienten der Potenzreihen-Entwicklung durch die Formel

$$a_n \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, dw \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Der Betrag des Integranden kann durch $mr^{-(n+1)}$ abgeschätzt werden, und der Integrationsweg hat die Länge $2\pi r$. Mit Proposition 2.1 (ii) erhalten wir $|a_n| \le 2\pi r \cdot (2\pi)^{-1} m r^{-(n+1)} = mr^{-n}$. □

Für die Formulierung des nächsten Satzes definieren wir folgenden Begriff: Eine ***ganze Funktion*** ist eine holomorphe Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{C}$.

Satz 4.6 *(Satz von Liouville)*

Eine ganze Funktion f mit der Eigenschaft, dass ihr Wertebereich $f(\mathbb{C})$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ beschränkt ist, ist konstant.

Beweis: Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Potenzreihen-Entwicklung von f um den Nullpunkt. Weil f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, besitzt die Potenzreihe nach Satz 3.7 einen unendlichen Konvergenzradius. Ist nun $f(\mathbb{C})$ beschränkt, dann ist $m = \sup\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$ ein endlicher Wert. Nach Satz 4.5 gilt $|a_n| \le mr^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Weil r beliebig groß gewählt werden kann, folgt daraus $a_n = 0$ für alle $n \ge 1$. Weil die Potenzreihen-Entwicklung auf ganz $\mathbb{C}$ gültig ist, gilt also $f(z) = a_0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. □

Satz 4.7 *(Fundamentalsatz der Algebra)*

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante Polynomfunktion, also eine Funktion der Form

$$f(z) \quad = \quad a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

wobei $n \ge 1$, $a_k \in \mathbb{C}$ für $0 \le k \le n$ und $a_n \ne 0$ ist. Dann besitzt f eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis: Nehmen wir an, die Funktion f besitzt auf ganz $\mathbb{C}$ keine Nullstelle. Dann ist $g(z) = f(z)^{-1}$ eine ganze Funktion. Wir zeigen, dass der Wertebereich $g(\mathbb{C})$ von g beschränkt ist. Definieren wir die Funktion $h : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) \quad = \quad \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \quad ,$$

dann gilt $f(z) = z^n(a_n + h(z))$ für alle $z \in \mathbb{C}^\times$. Die einzelnen Summanden von h konvergieren für $|z| \to \infty$ gegen Null. Es gibt also ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $|h(z)| \le \frac{1}{2}|a_n|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$. Daraus folgt

$$|f(z)| \quad = \quad |z^n a_n + z^n h(z)| \quad \ge \quad ||a_n| - |h(z)||r^n \quad \ge \quad \tfrac{1}{2}|a_n|r^n$$

und $|g(z)| \le 2|a_n|^{-1}r^{-n}$ für alle z außerhalb von $\bar{B}_r(0)$. Als stetige Funktion ist g auf der kompakten Menge $\bar{B}_r(0)$ ebenfalls beschränkt, insgesamt also auf ganz $\mathbb{C}$. Auf Grund des Satzes 4.6 von Liouville wäre g damit konstant, also auch die Funktion f. Aber wegen $n \ge 1$ und $a_n \ne 0$ ist f offensichtlich nicht konstant. Unsere Annahme hat also zu einem Widerspruch geführt, und folglich besitzt f eine Nullstelle. □

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass jede Polynomfunktion f vom Grad n mit einer Nullstelle $a \in \mathbb{C}$ in der Form $f(z) = (z-a)g(z)$ geschrieben werden kann, wobei g eine Polynomfunktion vom Grad $n-1$ bezeichnet. Durch vollständige Induktion über n kann so leicht gezeigt werden, dass jede komplexe Polynomfunktion in Linearfaktoren zerfällt.

Die Cauchyschen Ungleichungen beschränken den Wert $f(a)$ einer holomorphen Funktion im Mittelpunkt w einer Kreisscheibe $\bar{B}_r(w)$ durch die Werte auf dem Rand. Dies bedeutet auch, dass die Funktion $z \mapsto f(z)^{-1}$, sofern f auf $\bar{B}_r(w)$ nicht verschwindet, im Mittelpunkt w nicht zu klein werden darf. Diese Überlegung liefert ein Kriterium für Nullstellen holomorpher Funktionen.

Lemma 4.8 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $w \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\bar{B}_r(w) \subseteq U$. Sei außerdem $m = \min\{\, |f(z)| \mid z \in \partial B_r(w)\}$. Gilt nun $|f(w)| < m$, dann besitzt f in $B_r(w)$ eine Nullstelle.

Beweis: Ist die Ungleichung $|f(w)| < m$ erfüllt, dann ist f auf dem Rand $\partial B_r(w)$ ungleich Null. Die Menge $V = \{z \in U \mid f(z) \ne 0\}$ ist offen. Besitzt f auch in $B_r(w)$ keine Nullstelle, dann gilt insgesamt $\bar{B}_r(w) \subseteq V$, und nach Lemma 3.3 gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass auch $B_{r+\varepsilon}(w)$ noch in V liegt. Dies bedeutet, dass $g(z) = f(z)^{-1}$ auf $B_{r+\varepsilon}(w)$ eine holomorphe Funktion ist. Sei nun

$$g(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n$$

die Potenzreihen-Entwicklung von g um den Punkt w. Es gilt $|g(z)| \le m^{-1}$ für alle $z \in \partial B_r(w)$, aus den Cauchyschen Ungleichungen 4.5 folgt damit $|g(w)| = |a_0| \le m^{-1}$. Wir erhalten $|f(w)| = |g(w)|^{-1} \ge m$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 4.9 *(Satz von der Gebietstreue)*

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante, holomorphe Funktion. Dann ist auch die Bildmenge $f(G)$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$.

Beweis: Aus der Analysis mehrerer Variablen ist bekannt, dass das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung wieder zusammenhängend ist. Also ist $f(G) \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend. Zum Nachweis der Offenheit sei $a \in f(G)$ beliebig vorgegeben und $w \in G$ mit $f(w) = a$. Auf Grund des Identitätssatzes 4.4 wird der Wert a von f nur auf einer diskreten Teilmenge von G angenommen, denn ansonsten wäre f auf G konstant gleich a. Insbesondere gibt es also ein $r \in \mathbb{R}^+$, so dass $\bar{B}_r(w) \subseteq G$ gilt und $f|_{\bar{B}_r(w)}$ den Wert a nur im Punkt w annimmt.

Wir zeigen nun, dass ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq f(\bar{B}_r(w)) \subseteq f(G)$ existiert und beweisen damit die Offenheit von $f(G)$. Die Funktion $z \mapsto |f(z) - a|$ nimmt auf $\partial B_r(w)$ ein Minimum an, und dieses ist positiv. Es gibt also ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(z) - a| \geq 2\varepsilon$ für alle $z \in \partial B_r(w)$. Sei nun $b \in B_\varepsilon(a)$ vorgebeben und $g(z) = f(z) - b$ für alle $z \in \bar{B}_r(w)$. Dann gilt für alle $z \in \partial B_r(w)$ einerseits die Ungleichung $|f(z) - a| \leq |f(z) - b| + |b - a|$ und somit

$$|g(z)| \quad = \quad |f(z) - b| \quad \geq \quad |f(z) - a| - |b - a| \quad \geq \quad 2\varepsilon - \varepsilon \quad = \quad \varepsilon \quad ,$$

also ist $\min\{\ |g(z)|\ |\ z \in \partial B_r(w)\ \} \geq \varepsilon$. Andererseits ist $|g(w)| = |f(w) - b| = |a - b| < \varepsilon$. Nach Lemma 4.8 hat die Funktion $g(z) = f(z) - b$ damit in $B_r(w)$ eine Nullstelle. Es gibt also ein $z \in B_r(w)$ mit $b = f(z)$, somit ist $b \in f(B_r(w))$ und insgesamt $B_\varepsilon(a) \subseteq f(B_r(w))$. □

Satz 4.10 *(Maximumsprinzip)*
Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn der Betrag $|f|$ von f in einem Punkt $a \in G$ ein lokales Maximum besitzt, dann ist f auf G konstant.

Beweis: Angenommen, $a \in G$ ist ein lokales Maximum von $|f|$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{R}^+$, so dass $|f(a)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in B_r(a)$ erfüllt ist. Die offene Kreisscheibe $B_r(a)$ ist ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Ist die Funktion f nicht-konstant, so kann Satz 4.9 von der Gebietstreue angewendet werden, und folglich ist auch $f(B_r(a)) \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dies bedeutet, dass eine offene Umgebung von $f(a)$ in $f(B_r(a))$ enthalten ist. Insbesondere gibt es Punkte $w \in f(B_r(a))$ mit $|w| > |f(a)|$, im Widerspruch zur vorherigen Feststellung. Also ist f auf G konstant. □

§ 5. Isolierte Singularitäten

Zusammenfassung. In diese Kapitel verallgemeinern wir den Cauchyschen Integralsatz und die Cauchysche Integralformel auf Kreisringe und zeigen, das sich jede holomorphe Funktion auf einem Kreisring als sog. Laurentreihe darstellen lässt. Definitionslücken holomorpher Funktionen bezeichnet man auch als Singularitäten. Wir zeigen, dass isolierte Singularitäten in drei verschiedenen Typen auftreten. Dieser Typ lässt sich an der Laurentreihen-Entwicklung der Funktion erkennen.

Wichtige Grundbegriffe

- Kreisring
- Laurentreihenentwicklung einer Funktion
- Haupt- und Nebenteil einer Laurentreihe
- isolierte, hebbare, wesentliche Singularität
- Polstelle n-ter Ordnung
- meromorphe Funktion

Zentrale Sätze

- Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel auf Kreisringen
- Riemannscher Hebbarkeitssatz
- Charakterisierung der Polstellen
- Erkennung des Singularitätentyps an der Laurentreihenentwicklung

Definition 5.1 Seien $a \in \mathbb{C}$ und $r, s \in \mathbb{R}^+$ mit $r < s$. Dann ist der ***Kreisring*** um a mit den Radien r und s definiert durch $K_{r,s}(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < s\}$.

Bei der Definition soll für r auch der Wert Null und für s der Wert $+\infty$ zugelassen werden. Für $r \in \mathbb{R}^+$ setzen wir $K_{0,r}(a) = B_r(a) \setminus \{a\}$, außerdem $\bar{B}_0(a) = \{a\}$ und $K_{r,+\infty}(a) = \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$.

Satz 5.2 *(Cauchyscher Integralsatz für Kreisringe)*

Sei $a \in \mathbb{C}$ und $K = K_{r,s}(a)$ mit $0 \le r < s \le +\infty$. Dann gilt für alle $\rho, \sigma \in \mathbb{R}^+$ mit $r < \rho < \sigma < s$ und jede holomorphe Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ jeweils

$$\int_{\partial B_\rho(a)} f(z)\, dz \quad = \quad \int_{\partial B_\sigma(a)} f(z)\, dz.$$

Beweis: Wie man leicht überprüft, ist durch $H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$, $(s, t) \mapsto a + ((1-t)\rho + t\sigma)e^{is}$ eine freie Homotopie zwischen den geschlossenen Randkurven $\partial B_\rho(a)$ und $\partial B_\sigma(a)$ definiert. Also folgt die Aussage aus Proposition 2.12, der Homotopieinvarianz der Kurvenintegrale. □

Wie beim Cauchyschen Integralsatz für konvexe Gebiete kann auf die Holomorphie von f in einem Punkt $z \in K$ verzichtet werden, wenn man die Stetigkeit von f auf ganz K fordert. Wendet man nämlich Prop. 2.8 auf eine sternförmige offene Umgebung G dieses Punktes z an, so erhält man eine komplexe Stammfunktion von $f|_G$. Aus Satz 3.5 (iii) folgt daraus die Holomorphie von f auf ganz G, insbesondere im Punkt z. Allgemein zeigt diese Überlegung

Proposition 5.3 Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige, auf $U \setminus \{z\}$ holomorphe Funktion, dann ist f auf ganz U holomorph.

Nach dem Cauchyschen Integralsatz formulieren wir nun noch eine Variante der Cauchyschen Integralformel.

Satz 5.4 *(Cauchysche Integralformel für Kreisringe)*

Seien $a \in \mathbb{C}$ und $0 \le r < s \le +\infty$. Dann gilt für alle $\rho, \sigma \in \mathbb{R}^+$ mit $r < \rho < \sigma < s$, jede holomorphe Funktion $f : K_{r,s}(a) \to \mathbb{C}$ und jeden Punkt $z \in K_{r,s}(a)$ mit $\rho < |z-a| < \sigma$ jeweils

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Beweis: Sei $K = K_{r,s}(a)$, und sei $z \in K$ mit $\rho < |z-a| < \sigma$ vorgegeben. Wir definieren die Funktion $g : K \to \mathbb{C}$ durch

$$g(w) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{für } w \neq z \\ f'(z) & \text{für } w = z. \end{cases}$$

Offenbar ist g auf K stetig und auf $K \setminus \{z\}$ holomorph. Nach Prop. 5.3 ist g also eine holomorphe Funktion auf ganz K. Wir können den Satz 5.2, den Cauchyschen Integralsatz für Kreisringe, anwenden, und erhalten damit

$$\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z) \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{dw}{w-z} \quad = \quad \int_{\partial B_\rho(a)} g(w)\, dw \quad = \quad \int_{\partial B_\sigma(a)} g(w)\, dw$$

$$= \quad \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z) \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{dw}{w-z}.$$

Das Integral $\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{dw}{w-z}$ ist gleich Null, denn der Punkt z liegt außerhalb der Kreisscheibe $\bar{B}_\rho(a)$, so dass Satz 2.9, der Cauchysche Integralsatz für sternförmige Gebiete, auf die Funktion $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ angewendet werden kann. Die Anwendung der ursprüngliche Fassung der Cauchyschen Integralformel, Satz 3.4, auf die konstante Funktion $w \mapsto 1$, liefert wegen $z \in B_\sigma(a)$ außerdem $\int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$. Damit erhalten wir

$$\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z) \cdot 0 \quad = \quad \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - 2\pi i f(z) \quad ,$$

was zur gewünschten Gleichung umgestellt werden kann. □

Durch den ersten Term in unserer neuen Cauchyschen Integralformel, der Zuordnung $z \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$, ist eine holomorphe Funktion auf der offenen Kreisscheibe $B_\sigma(a)$ definiert. Ebenso stellt der zweite Term, gegeben durch $z \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$, eine holomorphe Funktion auf dem gesamten Komplement $\mathbb{C} \setminus \bar{B}_\rho(a)$ dar. Wie wir gleich sehen werden, lässt sich die erste Funktion auf $B_s(a)$ und die zweite Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$ holomorph fortsetzen. Wir erhalten auf diese Weise eine Strukturaussage über holomorphe Funktionen auf Kreisringen.

Satz 5.5 *(Satz über holomorphe Funktionen auf Kreisringen)*
Seien $a \in \mathbb{C}$ und $0 \le r < s \le +\infty$. Dann gibt es für jede holomorphe Funktion $f : K_{r,s}(a) \to \mathbb{C}$ jeweils eindeutig bestimmte, holomorphe Funktionen $f_h : \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a) \to \mathbb{C}$ und $f_n : B_s(a) \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{|z|\to+\infty} |f_h(z)| = 0$ und $f(z) = f_h(z) + f_n(z)$ für alle $z \in K_{r,s}(a)$. Man nennt f_h den ***Hauptteil*** und f_n den ***Nebenteil*** der Funktion f.

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass für jedes σ mit $r < \sigma < s$ durch $f_{n,\sigma}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ nach Proposition 3.1 eine holomorphe Funktion auf $B_\sigma(a)$ definiert ist. Für $r < \sigma_1 < \sigma_2 < s$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $r < |z| < \sigma_1$ gilt jeweils $f_{n,\sigma_1}(z) = f_{n,\sigma_2}(z)$, nach Satz 5.2. Dies zeigt, dass wir eine holomorphe Funktion $f_n : B_s(a) \to \mathbb{C}$ erhalten, wenn wir für jedes $z \in B_s(a)$ jeweils ein beliebiges $\sigma \in \mathbb{R}^+$ mit $|z| < \sigma < s$ wählen und $f_n(z) = f_{n,\sigma}(z)$ setzen.

Ebenso ist für jedes ρ mit $r < \rho < s$ durch $f_{h,\rho}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ nach Proposition 3.1 eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \bar{B}_\rho(a)$ definiert. Für $r < \rho_1 < \rho_2 < s$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $\rho_2 < |z| < s$ gilt nach Satz 5.2 jeweils $f_{h,\rho_1}(z) = f_{h,\rho_2}(z)$. Wir erhalten also eine holomorphe Funktion $f_h : \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a) \to \mathbb{C}$, indem wir für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus B_r(a)$ jeweils ein beliebiges $\rho \in \mathbb{R}^+$ mit $r < \rho < |z|$ wählen und $f_h(z) = f_{h,\rho}(z)$ definieren. Die auf diese Weise definierte Funktion erfüllt die Bedingung $\lim_{|z|\to+\infty} f_h(z) = 0$. Ist nämlich ein ρ mit $r < \rho < s$ fest gewählt, dann konvergiert der Integrand $\frac{f(w)}{w-z}$ in der Definition von $f_{h,\rho}$ für $|z| \to +\infty$ gleichmäßig gegen null, so dass wir mit Lemma 3.6 in der Tat

$$\lim_{|z|\to+\infty} f_h(z) \quad = \quad \lim_{|z|\to+\infty} f_{h,\rho}(z) \quad = \quad \lim_{|z|\to+\infty} -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad = \quad 0 \qquad \text{erhalten.}$$

Für jedes $z \in K_{r,s}(a)$ ist auch die Gleichung $f(z) = f_h(z) + f_n(z)$ erfüllt, denn ist ein solches z vorgegeben, dann können wir $\rho, \sigma \in \mathbb{R}^+$ mit $r < \rho < |z| < \sigma < s$ wählen und erhalten mit Satz 5.4 die Gleichung

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad = \quad f_{n,\sigma}(z) + f_{h,\rho}(z) \quad = \quad f_n(z) + f_h(z).$$

Zum Schluss beweisen wir die Eindeutigkeit der Zerlegung. Seien $g_h : \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a) \to \mathbb{C}$ und $g_n : B_s(a) \to \mathbb{C}$ weitere holomorphe Funktionen mit $\lim_{|z|\to+\infty} g_h(z) = 0$ und $f = g_h + g_n$ auf $K_{r,s}(a)$. Dann gilt auf $K_{r,s}(a)$ auch die Gleichung $f_h - g_h = g_n - f_n$. Definieren wir $u = f_h - g_h$ auf $\mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$ und $u = g_n - f_n$ auf $B_s(a)$, dann ist u eine ganze Funktion mit $\lim_{|z|\to+\infty} u(z) = 0$. Diese Funktion ist somit auf $\mathbb{C}$ beschränkt, und aus dem Satz von Liouville folgt, dass u konstant ist. Wiederum wegen $\lim_{|z|\to+\infty} u(z) = 0$ kommt als konstante Wert nur null in Frage. Daraus folgt $f_h = g_h$ auf $\mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$ und $f_n = g_n$ auf $B_s(a)$. □

Lemma 5.6 Seien $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_+$ und $f : \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^{-n}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$.

Beweis: Offenbar ist durch $\iota : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ eine Bijektion gegeben, mit $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $z \mapsto \frac{1}{z} + a$ als Umkehrabbildung. Diese bildet im Fall $r \in \mathbb{R}^+$ die Menge $\mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$ bijektiv auf $B_{1/r}(0) \setminus \{0\}$ ab (auf Grund der Äquivalenz $|z-a| > r \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z-a}\right| < \frac{1}{r}$), und im Fall $r = 0$ die Menge $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ bijektiv auf $\mathbb{C}^\times$. Folglich ist $\tilde{f} = f \circ \iota^{-1}$ eine holomorphe Funktion auf $B_{1/r}(0) \setminus \{0\}$ bzw. $\mathbb{C}^\times$.

Für eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen ist $\lim_n |z_n| = +\infty$ äquivalent zu $\lim_n \iota(z_n) = 0$. Die angegebene Bedingung $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$ ist somit äquivalent zu $\lim_{z\to 0} \tilde{f}(z) = 0$. Setzen wir $\tilde{f}$ im Nullpunkt durch $\tilde{f}(0) = 0$ fort, so erhalten wir eine stetige und nach Proposition 5.3 sogar holomorphe Funktion auf $B_{1/r}(0)$ bzw. auf $\mathbb{C}$. Nach Satz 3.7 besitzt diese auf ihrem gesamten Definitionsbereich eine Potenzreihenentwicklung $\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, wobei wegen $\tilde{f}(0) = 0$ der nullte Koeffizient a_0 gleich null ist. Es folgt

$$f(z) \quad = \quad (\tilde{f} \circ \iota)(z) \quad = \quad \sum_{n=1}^\infty a_n ((z-a)^{-1})^n \quad = \quad \sum_{n=1}^\infty a_n (z-a)^{-n}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$. Ist nun $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge mit der Eigenschaft, dass f auf $\mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$ durch $f(z) = \sum_{n=1}^\infty b_n (z-a)^{-n}$, dann folgt $\sum_{n=1}^\infty b_n z^n = \tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n z^n$ für alle z aus $B_{1/r}(0) \setminus \{0\}$ bzw. $\mathbb{C}^\times$. Dies zeigt, dass die Potenzreihe $\sum_{n=1}^\infty b_n z^n$ einen Konvergenzradius von mindestens $1/r$ bzw. $+\infty$ besitzt. Aus der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung folgt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Familie komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$, dann bezeichnet man einen Ausdruck der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

als ***Laurentreihe*** im Entwicklungspunkt a. Ist $z \in \mathbb{C}$, so bezeichnet man die Laurentreihe als (absolut) konvergent im Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn die Reihen $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z_1 - a)^n = \sum_{n=1}^\infty a_{-n} (z_1 - a)^{-n}$ und $\sum_{n=0}^\infty a_n (z_1 - a)^n$ beide (absolut) konvergieren.

Satz 5.7 *(Laurentreihenentwicklung holomorpher Funktionen auf Kreisringen)*

Seien $a \in \mathbb{C}$ und $0 \le r < s \le +\infty$. Sei $f : K_{r,s}(a) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Familie $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ komplexer Zahlen mit

$$f(z) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n \qquad \text{für alle} \quad z \in K_{r,s}(a).$$

Der Hauptteil von f ist gegeben durch $f_h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$, und der Nebenteil ist gegeben durch $f_n(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z-a)^n$ für alle $z \in B_s(a)$.

Beweis: Der Nebenteil f_n von f ist eine holomorphe Funktion auf $B_s(a)$ und kann somit nach Satz 3.7 in eine Potenzreihe $f_n(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z-a)^n$ entwickelt werden. Für den Hauptteil $f_h : \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a) \to \mathbb{C}$ existiert nach Lemma 5.6 eine Entwicklung der Form $f_h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n$. Insgesamt folgt daraus $f(z) = f_h(z) + f_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ für alle $z \in K_{r,s}(a)$. Sei nun $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine weitere Familie komplexer Zahlen mit der Eigenschaft, dass f auf $K_{r,s}(a)$ durch die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-a)^n$ gegeben ist. Die Konvergenz von $\sum_{n=0}^\infty b_n (z-a)^n$ für alle $z \in K_{r,s}(a)$ zeigt, dass der Konvergenzradius dieser Potenzreihe mindestens s beträgt, und diese somit eine holomorphe Funktion auf

$B_s(a)$ definiert. Ebenso leicht sieht man, dass die Funktion $z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z-a)^n$ auf $\mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$ eine holomorphe Fortsetzung besitzt, und dass diese für $|z| \to +\infty$ gegen null geht. Es handelt sich bei $B_s(a) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ also um den Nebenteil f_n und bei $\mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z-a)^n$ um den Hauptteil f_h von f. Die Gleichheit $a_n = b_n$ folgt nun für $n \geq 0$ aus der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung, und für $n < 0$ aus der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 5.6. □

Es sei noch bemerkt, dass die Koeffizienten a_n durch die Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \qquad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z}, \quad r < \rho < s \tag{5.1}$$

berechnet werden können. Diese erhält man durch folgende kurze Rechnung: Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ konvergieren die beiden Reihen auf der rechten Seite der Gleichung

$$(z-a)^{-n-1} f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-a)^{k-n-1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{k+n+1}(z-a)^k =$$
$$\sum_{k=-\infty}^{-2} a_{k+n+1}(z-a)^k + a_n(z-a)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1}(z-a)^k$$

auf $B_\rho(a)$ gleichmäßig. Für $k \leq -2$ ist besitzt $z \mapsto (z-a)^k$ auf einer offenen Umgebung von $\bar{B}_\rho(a)$ die komplexe Stammfunktion $z \mapsto \frac{1}{k+1}(z-a)^{k+1}$. Nach Folgerung 2.10 gilt deshalb

$$\int_{\partial B_\rho(a)} (w-a)^k\, dw = 0.$$

Für $k \geq 0$ ist die Funktion $z \mapsto (z-a)^k$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Daraus folgt ebenfalls $\int_{\partial B_\rho(a)} (w-a)^k\, dw = 0$, diesmal auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes, Satz 2.9. Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz sind Summation und Integration vertauschar, nach Lemma 3.6. Wenn wir nun noch auf den Term mit Exponent -1 die Cauchysche Integralformel, Satz 3.4, anwenden, so erhalten wir insgesamt

$$\int_{B_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw = \sum_{k=-\infty}^{-2} a_{k+n+1} \int_{B_\rho(a)} (w-a)^k\, dw + a_n \int_{B_\rho(a)} \frac{dw}{w-a}\, dw + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+n+1} \int_{B_\rho(a)} (w-a)^k\, dw$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{-2} a_{k+n+1} \cdot 0 + a_n \int_{B_\rho(a)} \frac{dw}{w-a}\, dw + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+n+1} \cdot 0 = a_n \int_{B_\rho(a)} \frac{dw}{w-a}\, dw = a_n \cdot 2\pi i.$$

Multiplikation mit $(2\pi i)^{-1}$ auf beiden Seiten liefert die angegebene Gleichung.

Definition 5.8 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Einen isolierten Punkt a der Menge $\mathbb{C} \setminus U$ nennt man ***isolierte Singularität***. Genauer bezeichnet man a als

(i) ***hebbar***, wenn $f|_{V \cap U}$ für eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}$ von a beschränkt ist,

(ii) ***Polstelle***, wenn $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$ gilt, und als

(iii) ***wesentliche*** Singularität, wenn sie weder hebbar noch eine Polstelle ist.

Satz 5.9 *(Riemannscher Hebbarkeitssatz)*

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Eine isolierte Singularität a ist genau dann hebbar, wenn f auf $U \cup \{a\}$ holomorph fortsetzbar ist.

Beweis: "⇐" Sei $V \subseteq \mathbb{C}$ eine kompakte Umgebung von a mit $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$. Dann gilt $V \subseteq U \cup \{a\}$. Sei $\hat{f}$ die holomorphe Fortsetzung von f auf $U \cup \{a\}$. Als stetige Funktion ist $\hat{f}$ auf V beschränkt. Somit ist auch die Funktion f auf $V \cap U$ beschränkt.

"⇒" Sei $V \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von a mit $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$ und der Eigenschaft, dass $f|_{U \cap V}$ beschränkt ist. Wiederum gilt $V \subseteq U \cup \{a\}$. Wir definieren eine Funktion $g : V \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) \quad = \quad \begin{cases} (z-a)f(z) & \text{für } z \in V \cap U \\ 0 & \text{für } z = a. \end{cases}$$

Die Funktion g ist stetig in a, weil f nach Voraussetzung auf der Menge $V \cap U$ beschränkt ist. Da g auf $V \cap U$ holomorph und in a stetig ist, ist sie nach Proposition 5.3 auf V holomorph. Nach Definition der komplexen Differenzierbarkeit ist nun durch

$$h(z) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{g(z)-g(a)}{z-a} & \text{für } z \neq a \\ g'(z) & \text{für } z = a \end{cases}$$

eine Funktion auf $U \cup \{a\}$ definiert, die auf U holomorph und in a stetig ist. Nochmalige Anwendung von Proposition 5.3 zeigt, dass h auf $U \cup \{a\}$ holomorph ist. Außerdem stimmen h und f auf U überein. Damit ist gezeigt, dass f eine holomorphe Fortsetzung auf $U \cup \{a\}$ besitzt. □

Satz 5.10 Genau dann ist $a \in \mathbb{C}$ eine Polstelle von f, wenn es eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}$ von a mit $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$, ein $n \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $h : V \to \mathbb{C}$ mit

$$h(a) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad f(z) = (z-a)^{-n} h(z) \quad \text{für alle} \quad z \in V \setminus \{a\} \qquad \text{gibt.}$$

Man bezeichnet die Zahl n als die ***Ordnung*** der Polstelle a; sie ist durch f eindeutig bestimmt.

Beweis: „⇒" Nehmen wir an, a ist eine Polstelle von f. Wir wählen eine Umgebung V von a so klein, dass $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$ gilt und f auf $V \setminus \{a\}$ auch keine Nullstelle besitzt. Ersteres ist möglich, weil a eine isolierte Singularität ist, Letzteres wegen $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$. Dann ist die Funktion $g(z) = f(z)^{-1}$ auf $V \setminus \{a\}$ holomorph, und aus $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$ folgt $\lim_{z \to a} g(z) = 0$. Also kann g in a durch $g(a) = 0$ stetig fortgesetzt werden. Nach Proposition 5.3 ist diese Fortsetzung holomorph. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ die Nullstellenordnung von g in a. Dann gibt es nach Proposition 4.2 (iii) eine holomorphe Funktion $\tilde{h}$ auf V mit $g(z) = (z-a)^n \tilde{h}(z)$ und $\tilde{h}(a) \neq 0$. Durch eventuelle Verkleinerung von V können wir $\tilde{h}(z) \neq 0$ für alle $z \in V$ annehmen (da $\tilde{h}$ als holomorphe Funktion insbesondere stetig in a ist). Es folgt dann

$$f(z) \quad = \quad (z-a)^{-n} h(z) \qquad \text{mit} \quad h(z) = \tilde{h}(z)^{-1} \quad \text{für alle} \quad z \in V \setminus \{a\}.$$

„⇒" Setzen wir umgekehrt die Existenz einer Funktion $h : V \to \mathbb{C}$ und eines $n \in \mathbb{N}$ mit den angegebenen Eigenschaften voraus. Dann ist a wegen $V \cap (\mathbb{C} \setminus U)$ eine isolierte Singularität von f. Außerdem gilt $\lim_{z\to a} |z-a|^{-n} = +\infty$ und $\lim_{z\to a} |h(z)| = |h(a)| \neq 0$, wegen $f(z) = (z-a)^{-n}h(z)$ also $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$. Dies zeigt, dass z eine Polstelle von a ist.

Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2$ und holomorphe Funktionen h_1, h_2 auf V mit $h_1(a), h_2(a) \neq 0$ und $(z-a)^{-n_1}h_1(z) = f(z) = (z-a)^{-n_2}h_2(z)$ für alle $z \in V \setminus \{a\}$ existieren. Dann gilt $(z-a)^{n_2-n_1}h_1(z) = h_2(z)$ für alle $z \in V \setminus \{a\}$, und auf Grund des Identitätssatzes 4.4 ist die Gleichung auch in $z = a$ erfüllt. Es folgt $h_2(a) = (a-a)^{n_2-n_1}h_1(a) = 0$ im Widerspruch zu den Voraussetzungen. □

Definition 5.11 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine ***meromorphe Funktion*** auf U ist eine holomorphe Funktion $f : V \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $V \subseteq U$ mit der Eigenschaft, dass die Punkte in $U \setminus V$ alles Polstellen, also insbesondere isolierte Singularitäten, der Funktion f sind.

Beispielsweise sind sowohl $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^{-1}$ als auch $\mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$ meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$. Jede holomorphe Funktion $U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist nach Definition auf U auch meromorph. Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ auf $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ wäre dagegen keine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, weil $\mathbb{C} \setminus \mathbb{H}$ nicht nur aus isolierten Punkten besteht.

Satz 5.12 Sei $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von $f : U \to \mathbb{C}$, und seien r, s positive reelle Zahlen mit $r < s$ und $B_s(a) \subseteq U \cup \{a\}$. Sei ferner

$$f(z) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

die Laurentreihen-Entwicklung von f auf dem Kreisring $K_{r,s}(a)$.

(i) Die Singularität a ist genau dann hebbar, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$ gilt.

(ii) Sie ist eine Polstelle der Ordnung n genau dann, wenn $a_{-n} \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < -n$ gilt.

(iii) Sie ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele negative Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist.

Beweis: zu (i) „⇒" Ist a eine hebbare Singularität, dann besitzt f nach Satz 5.9 eine holomorphe Fortsetzung auf $U \cup \{a\}$, die wir ebenfalls mit f bezeichnen. Dies bedeutet, dass f auf $K_{r,s}(a)$ mit seinem Nebenteil übereinstimmt, und dass der Hauptteil verschwindet. Nach Satz 3.7 besitzt f auf der Kreisscheibe $B_s(a)$, und damit erst recht auf $K_{r,s}(a)$, eine Potenzreihenentwicklung. Aus der Eindeutigkeit der Laurentreihen-Entwicklung auf $K_{r,s}(a)$ folgt $a_n = 0$ für alle $n < 0$.

„⇐“ Setzen wir voraus, dass die Koeffizienten der Laurentreihen-Entwicklung von f auf $K_{r,s}(a)$ die Bedingung $a_n = 0$ für alle $n < 0$ erfüllen. Weil die Menge $B_s(a) \setminus \{a\} = K_{0,s}(a)$ im Definitionsbereich von f liegt, existiert auch auf $K_{0,s}(a)$ eine Laurentreihen-Entwicklung von f. Auf Grund der Eindeutigkeit der Entwicklung auf $K_{r,s}(a)$ sind die Koeffizienten der Entwicklung auf $K_{0,s}(a)$ ebenfalls durch die Familie $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ gegeben. Die Funktion f besitzt also auf $K_{0,s}(a)$ eine Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$, und diese Potenzreihe definiert eine holomorphe Fortsetzung von f auf $B_s(a)$, und somit auf $U \cup \{a\}$. Nach Satz 5.9 ist a somit eine hebbare Singularität.

zu (ii) „⇒“ Besitzt die Funktion f in a eine Polstelle der Ordnung n, dann gibt es nach Satz 5.10 eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}$ von a mit $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$, also $V \subseteq U \cup \{a\}$, und eine holomorphe Funktion $h : V \to \mathbb{C}$ mit $h(a) \neq 0$ und $f(z) = (z-a)^{-n}h(z)$ für alle $z \in V \setminus \{a\}$. Die Funktion h besitzt auf einer in V gelegenen, offenen Kreisscheibe $B_t(a)$ um den Punkt a eine Potenzreihenentwicklung $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k$, wobei wir $t \leq s$ annehmen dürfen. Für die Funktion f erhalten wir auf $B_t(a) \setminus \{a\} = K_{0,t}(a)$ die Darstellung

$$f(z) \quad = \quad (z-a)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^{k-n} \quad = \quad \sum_{k=-n}^{+\infty} b_{k+n}(z-a)^k.$$

Nun ist, wie wir schon im Beweis von (i) gesehen haben, die ursprünglich gegebene Laurentreihen-Entwicklung von f nicht nur auf $K_{r,s}(a)$, sondern auch auf $K_{0,s}(a)$, und damit auch auf $K_{0,t}(a)$, gültig. Aus der Eindeutigkeit der Entwicklung auf $K_{0,t}(a)$ folgt $a_k = 0$ für alle $k < -n$, und $a_k = b_{k+n}$ für alle $k \geq -n$, insbesondere $a_{-n} = b_0 = h(a) \neq 0$.

„⇐“ Wir setzen voraus, dass f auf dem Kreisring $K_{r,s}(a)$ eine Laurentreihenentwicklung $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z-a)^k$ mit $a_{-n} \neq 0$ besitzt. Wie bereits mehrfach angemerkt, ist diese Darstellung sogar auf $K_{0,s}(a) = B_s(a) \setminus \{a\}$ gültig. Durch $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n}(z-a)^k$ ist eine holomorphe Funktion $h : B_s(a) \to \mathbb{C}$ mit $h(a) = a_{-n} \neq 0$ definiert, und wir erhalten für f auf $B_s(a) \setminus \{a\}$ die Darstellung $f(z) = (z-a)^{-n}h(z)$. Nach Satz 5.10, angewendet auf die offene Umgebung $V = B_s(a)$ von a, besitzt f dann in a eine Polstelle der Ordnung n.

Die Äquivalenzaussage in (iii) folgt unmittelbar aus den Aussagen (i) und (ii). □

§ 6. Der Residuensatz

Zusammenfassung. Jeder isolierten Singularität a einer Funktion f kann eine komplexe Kennzahl $\mathrm{res}_a(f)$, das sogenannt *Residuum* von f an der Stelle a, zugeordnet werden. Es handelt sich um den (-1)-ten Term der Laurentreihen-Entwicklung von f an der Stelle a. Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve und $z \in \mathbb{C}$ ein Punkt, der nicht im Bild $\gamma([a,b])$ der Kurve enthalten ist, dann gibt die Umlaufzahl $n(\gamma, z)$ in einem intuitiven Sinne an, „wie oft" die Kurve um z herumläuft. Dabei wird ein Umlauf gegen den Uhrzeigersinn positiv, den Umlauf mit dem Uhrzeigersinn negativ gezählt.

Der *Residuensatz* stellt einen Zusammenhang zwischen dem komplexen Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$ einer holomorphen Funktion f, den Residuen f in den Singularitäten $z_1, ..., z_n$ von f und den Umlaufzahlen $n(\gamma, z_i)$ $(1 \le i \le n)$ her. Wir zeigen anhand zweier Beispiele, dass mit dem Residuensatz sowohl komplexe Kurvenintegrale als auch Integrale reellwertiger Funktionen berechnet werden können.

In einem Anhang zu diesem Kapitel (nicht klausurrelevant) wird noch kurz erläutert, wie sich der Cauchysche Integralsatz und die Cauchysche Integralformel aus § 3 bzw. § 5 jeweils einer sehr allgemeinen Formulierung unterordnen lassen. Die wesentliche Idee hier ist, an Stelle von Kurvenintegrale über Integrationswege Kurvenintegrale über *Zykel* zu betrachten.

Wichtige Grundbegriffe

- Residuum $\mathrm{res}_a(f)$ einer Funktion f in einem Punkt a
- Umlaufzahl $n(\gamma, z)$ eines geschlossenen Integrationswegs γ um einen Punkt z
- Zyklus in einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$

Zentrale Sätze

- Ganzzahligkeit der Umlaufzahl
- Residuensatz
- Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel für Zykel

Definition 6.1 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, und $a \in \mathbb{C} \setminus U$ eine isolierte Singularität. Sei $r \in \mathbb{R}^+$ so klein gewählt, dass $\bar{B}_r(a) \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$ gilt. Dann nennt man

$$\mathrm{res}_a(f) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} f(z)\, dz$$

das ***Residuum*** von f an der Stelle a. Ist $a \in U$ (also die Funktion f in a holomorph), dann setzt man $\mathrm{res}_a(f) = 0$.

Mit Hilfe von Satz 5.2, dem Cauchyschen Integralsatz für Kreisringe, sieht man leicht, dass die Zahl $\mathrm{res}_a(f)$ von der Wahl des Radius r unabhängig ist. Sind nämlich $r, s \in \mathbb{R}^+$ mit $r < s$ und $\bar{B}_s(a) \cap (\mathbb{C} \cap U) = \{a\}$, dann gilt auf Grund dieses Satzes $\int_{\partial B_r(a)} f(z)\, dz = \int_{\partial B_s(a)} f(z)\, dz$.

Lemma 6.2 Ist $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ die Laurentreihen-Entwicklung von f in einer Umgebung des Punktes a, dann gilt $a_{-1} = \mathrm{res}_a(f)$.

Beweis: Das folgt direkt aus der Gleichung (5.1) aus Kapitel § 5 für die Laurent-Koeffizienten. □

Lemma 6.3 Besitzt die Funktion f bei a eine einfache Polstelle und ist g eine weitere Funktion, die in a holomorph ist, dann gilt $\mathrm{res}_a(fg) = g(a)\mathrm{res}_a(f)$.

Beweis: Auf Grund der Voraussetzungen besitzen die Funktionen f und g in einer Umgebung von a Laurentreihen-Entwicklungen der Form $f = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-a)^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$. Es folgt

$$(fg)(z) \quad = \quad \left(\sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-a)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n\right) \quad = \quad \sum_{n=-1}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

mit $c_n = \sum a_k b_\ell$, wobei die Summe über alle $k \geq -1$, $\ell \geq 0$ mit $k + \ell = n$ gebildet wird. Insbesondere ist $c_{-1} = a_{-1}b_0 = \mathrm{res}_a(f)g(a)$ das Residuum von fg an der Stelle a. □

Definition 6.4 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a,b] \to U$ eine geschlossene Kurve und $z \in U \setminus \gamma([a,b])$. Dann nennt man

$$n(\gamma, z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

die ***Umlaufzahl*** der Kurve um den Punkt z.

Als Beispiel für die Umlaufzahl betrachten wir für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Kurve $\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma_n(t) = e^{int}$. Im Fall $n > 0$ läuft diese Kurve n-mal gegen den Uhrzeigersinn um den Nullpunkt, im Fall $n < 0$ jeweils $(-n)$-mal mit dem Uhrzeigersinn, und im Fall $n = 0$ verharrt sie im Punkt 1. Ist nun $z \in \mathbb{C}$ ein Punkt außerhalb der Kreisscheibe $\bar{B}_1(0)$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $1 + \varepsilon < |z|$, dann ist $z \mapsto \frac{1}{w-z}$ eine holomorphe Funktion auf $B_{1+\varepsilon}(0)$, und der Cauchysche Integralsatz, Satz 2.9, liefert

$$n(\gamma_n, z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{dw}{w-z} \quad = \quad 0.$$

Betrachten wir nun den Fall, dass z im Inneren der Kreisscheibe liegt, also $z \in B_1(0)$. Bezeichnet $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Funktion mit dem konstanten Wert 1, dann erhalten wir mit Satz 3.4, der Cauchyschen Integralformel, den Wert

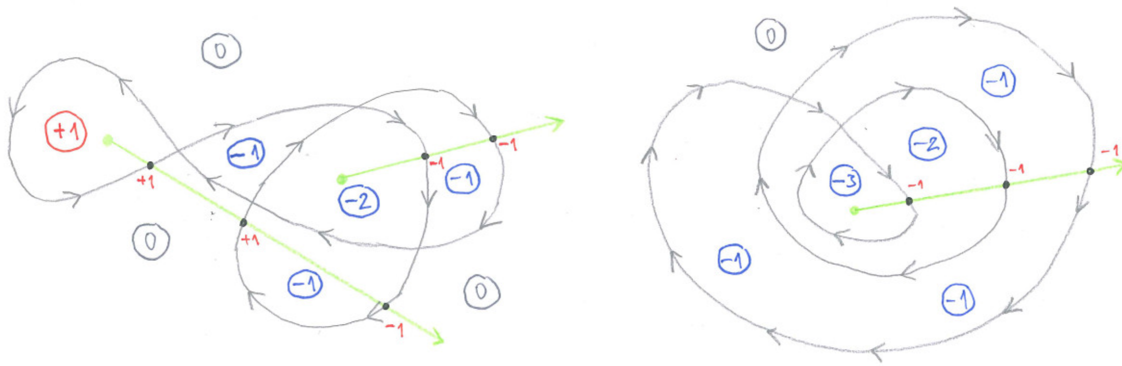
$$n(\gamma_1, z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{h(w)}{w-z}\,dw \quad = \quad h(z) \quad = \quad 1.$$

Die Gleichung $\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-z}\,dt = \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$ kann verwendet werden, um mit Hilfe der Substitutionsregel die Umlaufzahl von $n(\gamma_n, z)$ für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ zu bestimmen.

$$n(\gamma_n, z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \frac{dw}{w-z} \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma_n'(t)}{\gamma_n(t)-z}\,dt \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ine^{int}}{e^{int}-z}\,dt \quad =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi n} \frac{ie^{it}}{e^{it}-z}\,dt \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{ie^{it}}{e^{it}-z}\,dt \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-z}\,dt \quad =$$

$$\frac{n}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-z}\,dt \quad = \quad \frac{n}{2\pi i}\cdot 2\pi i \quad = \quad n.$$



Beispiele zur geometrischen Bestimmung der Umlaufzahl

Für die Bestimmung der Umlaufzahl einer geschlossenen Kurve γ gelten folgende Regeln.

- Für Punkt $z \in \mathbb{C}$ im Außenbereich (also für hinreichend großes $|z|$) gilt $n(\gamma, z) = 0$.
- Überquert man ein nach rechts laufendes Stück der Kurve, dann ist die Umlaufzahl der Punkte hinter der Gerade um 1 höher als die Umlaufzahl der Punkte vor der Geraden.
- Überquert man dagegen eine nach links laufendes Stück, dann verringert sich die Umlaufzahl um 1. (Um beispielsweise von außen das Gebiet in der Mitte der rechten Zeichnung zu erreichen, muss man die Kurve an drei Stellen überqueren, an denen die Kurve nach links läuft.

Mit Hilfe dieser Regeln kann man die Umlaufzahl der Kurve γ um einen vorgegebenen Punkt z mit folgendem Verfahren bestimmen: Man zeichnet eine Halbgerade von z aus in den Außenbereich, wobei darauf zu achten ist, dass keine Kreuzungspunkte überquert werden, und startet mit dem Wert 0 (in den beiden Zeichnungen jeweils in grüner Farbe). An jeder Überschneidung der Halbgerade mit einem nach links laufenden Kurvenstück erhöht man den Wert um 1, an jedem nach rechts laufenden Kurvenstück wird er um 1 verringert. Dann ist der zum Schluss erreichte Wert die Umlaufzahl $n(\gamma, z)$.

Proposition 6.5 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [a, b] \to U$ eine geschlossene Kurve und $z \in U \setminus \gamma([a, b])$. Dann ist die Umlaufzahl $n(\gamma, z)$ eine ganze Zahl.

Beweis: Die Kurve γ kann durch ihre Normierung ersetzt werden, ohne dass sich das Integral $\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$ ändert. Also können wir o.B.d.A. $a = 0$ und $b = 1$ voraussetzen. Nach Definition gilt $\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\, dt$. Wir definieren nun die Funktionen $f, g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ durch

$$f(x) = (\gamma(x) - z)e^{-g(x)} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt.$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, angewendet auf den Real- und Imaginärteil von g, liefert $g'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z}$ für alle $x \in \,]0, 1[$. Mit der eindimensionalen Produkt- und Kettenregel erhalten wir außerdem

$$f'(x) \quad = \quad \gamma'(x)e^{-g(x)} + (\gamma(x) - z)(-g'(x))e^{-g(x)} \quad = \quad \gamma'(x)e^{-g(x)} - (\gamma(x) - z)\frac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - z}e^{-g(x)} \quad = \quad 0$$

für $x \in [0,1]$. Also ist die Funktion f auf $[0,1]$ konstant. Die Gleichung

$$(\gamma(1)-z)e^{-g(1)} \quad = \quad f(1) \quad = \quad f(0) \quad = \quad (\gamma(0)-z)e^{-g(0)}$$

liefert wegen $\gamma(0) = \gamma(1)$ und $z \neq \gamma(0)$ nun $e^{g(0)} = e^{g(1)}$, also $g(1) = g(0) + 2\pi i n = 2\pi i n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. (Hierbei wurde verwendet, dass die komplexen Zahlen der Form $2\pi i n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ die einzigen sind, für die $e^z = 1$ ist, was in den Übungen bewiesen wurde.) Wir erhalten dann

$$n(\gamma,z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z} \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} g(1) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i n \quad = \quad n. \qquad \square$$

Proposition 6.6 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve mit $D \cap \gamma([a,b]) = \varnothing$.

(i) Es gibt ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\gamma([a,b]) \subseteq B_r(0)$.

(ii) Die Schnittmenge $D \cap B_r(0)$ ist endlich.

(iii) Für alle $z \notin B_r(0)$ gilt $n(\gamma,z) = 0$.

Insgesamt gilt $n(\gamma,z) \neq 0$ also nur für endlich viele $z \in D$.

Beweis: zu (i) Die Menge $\gamma([a,b])$ ist als Bild eines kompakten Intervalls unter einer stetigen Abbildung kompakt und damit insbesondere beschränkt. Es gibt also ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\gamma([a,b]) \subseteq B_r(0)$.

zu (ii) Weil D diskret ist, finden wir für jedes $z \in D \cap \bar{B}_r(0)$ eine Umgebung U_z mit $U_z \cap D = \{z\}$. Aus der Abgeschlossenheit von D folgt, dass $U = \mathbb{C} \setminus D$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Ingesamt bilden die U_z mit $z \in D$ zusammen mit U eine offene Überdeckung von $\bar{B}_r(0)$. Weil $\bar{B}_r(0)$ kompakt ist, können wir aus dieser Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung wählen. In jeder offenen Menge dieser Teilüberdeckung liegt höchstens jeweils ein Punkt aus D. Dies zeigt, dass die Menge $D \cap \bar{B}_r(0)$ endlich ist, und erst recht der Durchschnitt $D \cap B_r(0)$.

zu (iii) Die Abbildung $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto n(\gamma,z)$ ist stetig; da die Funktion unter dem Integralzeichen von

$$n(\gamma,z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

in z holomorph ist, folgt dies aus Proposition 3.1. Sei nun $z_1 \notin B_r(0)$ beliebig gewählt. Dann ist auch $s \mapsto n(\gamma, sz_1)$ eine stetige Funktion auf $\{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 1\}$. Für $s \to +\infty$ konvergiert diese gegen Null, weil der Integrand $(w - sz_1)^{-1}$ im Ausdruck

$$n(\gamma,sz_1) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-sz_1}$$

auf $\bar{B}_r(0)$ für $s \to +\infty$ gleichmäßig gegen Null konvergiert: Für hinreichend großes s gilt gilt $|w - sz_1| \geq ||w| - s|z_1|| = s|z_1| - |w| \geq sr - r = (s-1)r$ und somit $|w - sz_1|^{-1} \leq r^{-1}(s-1)^{-1}$. Weil aber $n(\gamma, sz_1)$ für alle $s \geq 1$ nach Proposition 6.5 stets ganzzahlig ist, muss $n(\gamma, z_1) = 0$ gelten. $\square$

Satz 6.7 *(Residuensatz)*

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, $D \subseteq G$ eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge und $f : G \setminus D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ in G mit $\gamma([a,b]) \cap D = \varnothing$ die Gleichung

$$\int_\gamma f(z)\,dz \quad = \quad 2\pi i \sum_{z \in D} n(\gamma, z)\mathrm{res}_z(f).$$

Beweis: Sei $r \in \mathbb{R}^+$ mit der in Proposition 6.6 (i) beschriebenen Eigenschaft. Nach Teil (ii) dieser Proposition ist $D \cap B_r(0)$ endlich; seien $z_1, ..., z_m$ die Elemente dieser Menge. Auf Grund von Teil (iii) gilt

$$\sum_{z \in D} n(\gamma, z)\mathrm{res}_z(f) \quad = \quad \sum_{k=1}^m n(\gamma, z_k)\mathrm{res}_{z_k}(f).$$

Mit G und $B_r(0)$ ist auch die Menge $G_r = G \cap B_r(0)$ ein konvexes Gebiet. Wegen $\gamma([a,b]) \subseteq B_r(0)$ können wir G durch G_r ersetzen, ohne dass sich am Kurvenintegral etwas ändert. Danach ist f eine holomorphe Funktion auf $G \setminus \{z_1, ..., z_m\}$, und die Punkte $z_1, ..., z_m$ sind isolierte Singularitäten von f.

Für jedes $k \in \{1, ..., m\}$ sei $h_k : \mathbb{C} \setminus \{z_k\} \to \mathbb{C}$ der in Satz 5.5 definierte Hauptteil der Laurentreihen-Entwicklung von f im Punkt z_k. Dann ist die Funktion $g = f - \sum_{k=1}^m h_k$ von $G_r \setminus D$ auf G_r holomorph fortsetzbar, weil sie in den Punkten $z_1, ..., z_m$ hebbare Singularitäten besitzt. Durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes für sternförmige Gebiete, Satz 2.9, auf das Gebiet G erhalten wir

$$\int_\gamma f(z)\,dz \quad = \quad \int_\gamma g(z)\,dz + \sum_{k=1}^m \int_\gamma h_k(z)\,dz \quad = \quad \sum_{k=1}^m \int_\gamma h_k(z)\,dz.$$

Wir betrachten nun jeden einzelnen Hauptteil als Laurentreihe der Form

$$h_k(z) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{kn}(z - z_k)^n.$$

Die Folge der Partialsummen konvergiert auf der kompakten Menge $\gamma([a,b])$ gleichmäßig gegen die Funktion h_k. Nach Lemma 3.6 gilt deshalb

$$\int_\gamma h_k(z)\,dz \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{kn} \int_\gamma (z - z_k)^n\,dz.$$

Für $n < -1$ besitzt die Funktion $z \mapsto (z - z_k)^n$ die komplexe Stammfunktion $z \mapsto \frac{1}{n+1}(z - z_k)^{n+1}$, die auf $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$ und damit erst recht auf G holomorph ist. Mit Satz 2.1 (iii) folgt $\int_\gamma (z - z_k)^n\,dz = 0$ für diese n. Dies zusammen mit der Definition der Umlaufzahl und Lemma 6.2 liefert

$$\int_\gamma h_k(z)\,dz \quad = \quad a_{k,-1} \int_\gamma (z - z_k)^{-1}\,dz \quad = \quad \mathrm{res}_{z_k}(h_k) \cdot 2\pi i n(\gamma, z_k).$$

Setzen wir dies in die Gleichung von oben ein, so erhalten wir

$$\int_\gamma f(z)\,dz \quad = \quad \sum_{k=1}^m \int_\gamma h_k(z)\,dz \quad = \quad 2\pi i \sum_{k=1}^m n(\gamma, z_k)\mathrm{res}_{z_k}(h_k) \quad =$$

$$2\pi i \sum_{k=1}^m n(\gamma, z_k)\mathrm{res}_{z_k}(f) \quad = \quad 2\pi i \sum_{z \in D} n(\gamma, z)\mathrm{res}_z(f). \qquad \square$$

In den folgenden beiden Beispielen werden die komplexen Nullstellen von Polynomen der Form $x^n - 1$ (für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) eine wichtige Rolle spielen. Die Nullstellen eines solchen Polynoms sind gegeben durch $\{e^{2\pi i k/n} \mid 0 \le k < n\}$. Man bezeichnet die Nullstellen als ***n-te Einheitswurzeln***. Um Real- und Imaginärteil dieser Zahlen zu bestimmen, verwendet man die Eulersche Formel $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, ist die folgende Tabelle von Sinuswerten hilfreich

α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

zusammen mit den Gleichungen $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$, $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$, $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, die für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gültig ist. Die erste Gleichung liefert beispielsweise für die Kosinusfunktion unter Berücksichtigung von $\cos(\alpha) > 0$ für $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ die Werte

α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

Anwendungsbeispiel 1: Berechnung eines Kurvenintegrals

Unser Ziel ist die Berechnung des Integrals

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{dw}{w^3 - 1}$$

mit Hilfe des Residuensatzes. Die komplexen Nullstellen von $w^3 - 1$ sind 1, $e^{2\pi i/3}$ und $e^{4\pi i/3}$. Diese sind vom Absolutbetrag 1 und somit im Inneren von $\partial B_2(0)$ enthalten. Wie wir oben gezeigt haben, folgt für die Randkurve γ von $B_2(0)$ daraus

$$n(\gamma, 1) \quad = \quad n(\gamma, e^{2\pi i/3}) \quad = \quad n(\gamma, e^{4\pi i/3}) \quad = \quad 1.$$

Wir bestimmen nun den Real- und Imaginärteil von $e^{2\pi i/3}$ und $e^{4\pi i/3}$. Es gilt $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\cos(-\frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, $\sin(\frac{2\pi i}{3}) = -\sin(-\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos(\frac{4\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ und $\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, also

$$e^{2\pi i/3} = \cos(\tfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{2\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3} \quad \text{und} \quad e^{4\pi i/3} = \cos(\tfrac{4\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{4\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Wir finden somit die Zerlegung

$$z^3 - 1 \quad = \quad (z-1)(z + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3})(z + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}).$$

Im nächsten Schritt bestimmen wir die Residuen von $f(z) = (z^3 - 1)^{-1}$ in den Punkten 1, $e^{2\pi i/3}$ und $e^{4\pi i/3}$ mit Hilfe von 6.3. Wenden wir dieses Lemma an auf $g(z) = (z-1)^{-1}$ und $h(z) = (z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1}(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1}$, so erhalten wir wegen $\mathrm{res}_1(g) = 1$ den Wert

$$\mathrm{res}_1(f) \quad = \quad h(1) \quad = \quad (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1}(\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1} \quad = \quad \tfrac{1}{3}.$$

Setzen wir $g(z) = (z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i)^{-1}$ und $h(z) = (z-1)^{-1}(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1}$, dann folgt entsprechend

$$\mathrm{res}_{e^{2\pi i/3}}(f) \quad = \quad h(e^{2\pi i/3}) \quad = \quad h(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}) \quad = \quad (-\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1} \cdot (i\sqrt{3})^{-1} \quad = \quad \tfrac{1}{6}(i\sqrt{3} - 1).$$

Setzen wir $g(z) = (z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i)^{-1}$ und $h(z) = (z-1)^{-1}(z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1}$, dann erhalten wir

$$\mathrm{res}_{e^{4\pi i/3}}(f) \quad = \quad h(e^{4\pi i/3}) \quad = \quad h(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}) \quad = \quad (-\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3})^{-1} \cdot (-i\sqrt{3})^{-1} \quad = \quad \tfrac{1}{6}(-i\sqrt{3} - 1).$$

Mit dem Residuensatz erhalten wir nun

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{dw}{w^3-1} = 2\pi i\left(n(\gamma,1)\mathrm{res}_1(f) + n(\gamma, e^{2\pi i/3})\mathrm{res}_{e^{2\pi i/3}}(f) + n(\gamma, e^{4\pi i/3})\mathrm{res}_{e^{4\pi i/3}}(f)\right)$$

$$= 2\pi i\left(1\cdot\tfrac{1}{3} + 1\cdot(-\tfrac{1}{6}) + 1\cdot(-\tfrac{1}{6})\right) = 0.$$

Anwendungsbeispiel 2: Berechnung eines reellen Integrals

Hier verwenden wir den Residuensatz zum Beweis der Integralformel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Dazu betrachten wir die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C}\setminus N \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \mapsto \frac{z^2}{z^4+1} \quad ,$$

wobei N die Nullstellenmenge von z^4+1 bezeichnet. Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ betrachten wir außerdem die Kurve $\rho_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$, die die obere Hälfte des Kreises vom Radius r um den Nullpunkt durchläuft, und setzen $\gamma_r = \rho_r * [-r, r]$. Sofern γ_r keine Nullstelle von z^4+1 durchquert, liefert uns der Residuensatz die Gleichung

$$\int_{-r}^{r} f(z)\, dz + \int_{\rho_r} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{C}} n(\gamma_r, z)\mathrm{res}_z(f). \tag{6.1}$$

Um den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung zu bestimmen, ermitteln wir zunächst die komplexen Nullstellen von z^4+1. Es gilt $z^8-1 = (z^4-1)(z^4+1)$. Wie oben bereits erwähnt, ist die Nullstellenmenge von z^8-1 gleich $\{e^{k\pi i/4} \mid 0 \le k < 8\}$, die von z^4-1 ist $\{e^{k\pi i/2} \mid 0 \le k < 4\}$. Die Nullstellen von z^4+1 sind genau die Nullstellen von z^8-1, die keine Nullstellen von x^4-1 sind, also die Elemente der Menge

$$\{e^{\pi i/4}\ ,\ e^{3\pi i/4}\ ,\ e^{5\pi i/4}\ ,\ e^{7\pi i/4}\}.$$

Real- und Imaginärteil dieser Zahlen sind gegeben durch

$$e^{\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \quad , \quad e^{3\pi i/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \quad , \quad e^{5\pi i/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \quad , \quad e^{7\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Ist $r > 1$, dann liegen $e^{\pi i/4}$ und $e^{3\pi i/4}$ im Inneren des Halbkreises. Die Nullstellen $e^{5\pi i/4}$ und $e^{7\pi i/4}$ liegen außerhalb, weil sie einen negativen Imaginärteil besitzen und somit im unteren Teil der komplexen Ebene liegen, während sich der Halbkreis im oberen Teil befindet. Es gilt also

$$n(\gamma_r, e^{\pi i/4}) = n(\gamma_r, e^{3\pi i/4}) = 1 \qquad \text{und} \qquad n(\gamma_r, e^{5\pi i/4}) = n(\gamma_r, e^{7\pi i/4}) = 0.$$

Nun verwenden wir Lemma 6.3 und die Zerlegung der Funktion $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(z + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(z + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})} \quad ,$$

um die Residuen in den Punkten $e^{\pi i/4}$ und $e^{3\pi i/4}$ zu berechnen. Weil das Residuum von $(z - e^{\pi i/4})^{-1}$ im Punkt $e^{\pi i/4}$ gleich 1 ist, erhalten wir das Residuum von f in diesem Punkt durch Einsetzen von $e^{\pi i/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ in die Funktion

$$\frac{z^2}{(z + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(z + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})}$$

Es gilt also

$$\mathrm{res}_{e^{\pi i/4}}(f) \;=\; \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})^2}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(i\sqrt{2})} \;=\; \frac{i}{2i\sqrt{2}(1+i)} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{2}(1+i)} \;=\; \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \;=\; \tfrac{1}{4}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right).$$

Ebenso erhalten wir das Residuum von f in $e^{3\pi i/4}$ durch Einsetzen von $e^{3\pi i/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ in die Funktion

$$\frac{z^2}{(z - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(z + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{e^{3\pi i/4}}(f) \;&=\; \frac{(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})^2}{(-\sqrt{2})(\sqrt{2}i)\sqrt{2}(-1+i)} \;=\; \frac{(-i)}{(-2\sqrt{2}i)(-1+i)} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{2}(-1+i)} \\ &=\; -\frac{1+i}{2\sqrt{2}\cdot 2} \;=\; -\frac{1+i}{4\sqrt{2}} \;=\; \tfrac{1}{4}\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Insgesamt ist die rechte Seite von (6.1) für $r > 1$ also gegeben durch

$$\begin{aligned}2\pi i \sum_{z \in V} n(\gamma_r, z)\mathrm{res}_z(f) \;&=\; 2\pi i\ \mathrm{res}_{e^{\pi i/4}}(f) + 2\pi i\ \mathrm{res}_{e^{3\pi i/4}}(f) \;=\; 2\pi i \cdot \tfrac{1}{4}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi i \cdot \tfrac{1}{4}\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &=\; 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{2\sqrt{2}}\right) \;=\; \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Nun untersuchen wir die linke Seite der Gleichung (6.1). Durch Betrachtung der Kurve $\delta_r : [-r, r] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto t$ mit $\delta_r'(t) = 1$ für $t \in [-r, r]$ erkennt man, dass

$$\int_{-r}^{r} f(z)\,dz \;=\; \int_{\delta_r} f(z)\,dz \;=\; \int_{-r}^{r} f(\delta_r(t))\delta_r'(t)\,dt \;=\; \int_{-r}^{r} \frac{t^2}{t^4+1}\,dt.$$

Es handelt sich bei $\int_{-r}^{r} f\ dz$ also um das gewöhnliche, reelle Riemann-Integral über das Intervall $[-r, r]$, und lassen wir r gegen $+\infty$ laufen, so erhalten wir das gesuchte Integral über die gesamte reelle Achse. Das zweite Integral auf der linken Seite von (6.1) schätzen wir ab. Für alle $t \in [0, \pi]$ und $r > 1$ gilt

$$f(\rho_r(t)) \;=\; \frac{\rho_r(t)^2}{\rho_r(t)^4 + 1} \;=\; \frac{r^2 e^{2it}}{r^4 e^{4it} + 1}.$$

Der Nenner kann nach unten abgeschätzt werden durch die Rechnung

$$|r^4 e^{4it} + 1| \;=\; |r^4 e^{4it} - (-1)| \;\geq\; |r^4 e^{4it}| - 1 \;=\; r^4 - 1$$

und somit $|f(\rho_r(t))| \leq \frac{r^2}{r^4-1}$. Weil die Kurvenlänge gleich πr ist, erhalten wir für das Kurvenintegral mit Satz 2.1 (ii) die Abschätzung

$$\left|\int_{\rho_r} f(z)\,dz\right| \;\leq\; \frac{\pi r^3}{r^4 - 1}.$$

Dieser Wert läuft für $r \to +\infty$ gegen Null. Insgesamt erhalten wir nun

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx \;=\; \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx \;=\; 2\pi i \sum_{z \in V} n(\gamma_r, z)\mathrm{res}_z(f) - \lim_{r \to +\infty} \int_{\rho_r} f(z)\,dz \;=\; \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ausblick:

Verallgemeinerter Cauchyscher Integralsatz und einfach zusammenhängende Gebiete

Für eine möglichst weit reichende Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes erweist es sich als günstig, mehrere Kurven in $\mathbb{C}$ zu einem Objekt zusammenzufassen.

Definition 6.8 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge. Eine ***Kette*** in U ist ein formaler Ausdruck der Form $\Gamma = \sum_{k=1}^{r} n_k \gamma_k$ mit $r \in \mathbb{N}$, $n_1, ..., n_r \in \mathbb{Z}$ und Integrationswegen $\gamma_1, ..., \gamma_r$ in U, $\gamma_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{C}$ für $1 \leq k \leq r$. Die Menge $\mathrm{sp}(\Gamma) = \bigcup_{k=1}^{r} \gamma_k([a_k, b_k])$ heißt die ***Spur*** der Kette Γ.

Jede stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ kann über den Zyklus Γ integriert werden. Man setzt dazu

$$\int_\Gamma f(z)\, dz \quad = \quad \sum_{k=1}^{r} n_k \int_{\gamma_k} f(z)\, dz.$$

Definition 6.9 Sei Γ eine Kette in U wie oben. Für jede Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ sei $z_A(\gamma) = \gamma(a)$ der Start- und $z_E(\gamma) = \gamma(b)$ der Endpunkt der Kurve. Man bezeichnet Γ als ***Zyklus***, wenn für jedes $z \in U$ die Gleichung

$$\sum_{z_A(\gamma_k)=z} n_k \quad = \quad \sum_{z_E(\gamma_k)=z} n_k \qquad \text{gilt.}$$

Dabei läuft die linke über alle Kurven γ_k mit Startpunkt z und die rechte Summe über alle Kurven mit Endpunkt z.

Die Zyklen sind die natürlichen Verallgemeinerungen der *geschlossenen* Kurven. Die Bedingung besagt, dass in jedem Punkt $z \in U$ genauso viele Kurven starten wie enden, wobei jede Kurve γ_k mit ihrem „Gewichtungsfaktor" n_k gezählt wird.

Definition 6.10 Für jeden Zyklus $\Gamma = \sum_{k=1}^{r} n_k \gamma_k$ und jeden Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(\Gamma)$ ist die ***Umlaufzahl*** $n(\Gamma, z)$ definiert durch

$$n(\Gamma, z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{r} n_k \int_{\gamma_k} \frac{dw}{w - z}.$$

Ähnlich wie bei den geschlossene Kurven zeigt man, dass $n(\Gamma, z)$ stets eine ganze Zahl ist; siehe [Fr], Satz 5.1.6 auf S. 283. Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge und Γ ein Zyklus in U, so bezeichnet man diesen als ***nullhomolog*** in U, wenn $n(\Gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus U$ gilt. Die Verallgemeinerungen des Cauchyschen Integralsatzes lautet nun

Satz 6.11 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und Γ ein in G nullhomologer Zyklus. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\, dz \quad = \quad 0$$

für jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$.

Die Cauchysche Integralformel lässt sich folgendermaßen verallgemeinern.

Satz 6.12 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, Γ ein in G nullhomologer Zyklus und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt für alle $z \in G \setminus \mathrm{sp}(\Gamma)$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung

$$n(\Gamma, z) f^{(k)}(z) \quad = \quad \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw.$$

Man beachte, dass der Cauchysche Integralsatz und die Cauchysche Integralformel sowohl für konvexe Gebiete als auch für Kreisringe als Spezialfälle der beiden neuen Sätze angesehen werden können. Bei der Cauchyschen Integralformel, Satz 3.4, verwendet man den nullhomologen Zyklus $\Gamma = \partial B_r(a)$. Beim Cauchyschen Integralsatz, Satz 2.9, ist zu zeigen, dass für jede geschlossene Kurve γ in einem konvexen Gebiet G der Zyklus $\Gamma = \gamma$ nullhomolog in G ist. Dies gelingt durch eine ähnliches Argument wie im Beweis von Proposition 6.6. Bei den entsprechenden Sätzen für Kreisringe arbeitet man jeweils mit dem nullhomologen Zyklus $\Gamma = \partial B_\sigma(a) - \partial B_\rho(a)$. Man überprüft leicht mit Hilfe der (gewöhnlichen) Cauchyschen Integralformel, dass dieser Zyklus im Kreisring $K_{r,s}(a)$ nullhomolog ist.

Der Residuensatz hat in diesem allgemeinen Kontext die folgende Gestalt.

Satz 6.13 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $D \subseteq G$ eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge und $f : G \setminus D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt für jeden in G nullhomologen Zyklus Γ mit $\mathrm{sp}(\Gamma) \cap D = \varnothing$ die Gleichung

$$\int_\Gamma f(z)\, dz \quad = \quad 2\pi i \sum_{z \in D} n(\Gamma, z) \mathrm{res}_z(f).$$

Zur weiteren Vorbereitung benötigen wir noch einen zentralen Satz der Funktionentheorie. Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ zwei offene Teilmengen. Eine Funktion $f : U \to V$ heißt ***biholomorph***, wenn sie holomorph und bijektiv ist, und ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ ebenfalls holomorph ist. Allgemein werden zwei offene Teilmengen U, V als ***biholomorph äquivalent*** bezeichnet, wenn zwischen ihnen eine biholomorphe Funktion existiert. Es gilt nun

Satz 6.14 *(Riemannscher Abbildungssatz)*

Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann ist G biholomorph äquivalent zur offenen Einheitskreisscheibe $B_1(0)$.

Beweis: siehe [Fr], Satz 5.1.2, S. 278. □

Aus dem Riemannschen Abbildungssatz kann nun folgende Charakterisierung der einfach zusammenhängenden Gebiete abgeleitet werden. Sie zeigt, dass dies tatsächlich die Gebiete sind, in denen der Cauchysche Integralsatz ohne weitere Einschränkungen gültig ist.

Satz 6.15 Für jedes Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) G ist einfach zusammenhängend

(ii) Für jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ und jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz \quad = \quad 0.$$

(iii) Für jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ und jeden Zyklus Γ in G gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,dz \quad = \quad 0.$$

Desweiteren ist auch folgende Charakterisierung möglich.

Satz 6.16 Für jedes Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) G ist einfach zusammenhängend

(ii) Jeder Zyklus Γ in G ist nullhomolog in G.

(iii) Jede holomorphe Funktion auf G besitzt eine komplexe Stammfunktion.

(iv) Jede nullstellenfreie holomorphe Funktion f auf G besitzt einen ***komplexen Logarithmus***. Dies bedeutet, dass eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ mit $e^{g(z)} = f(z)$ für alle $z \in G$ existiert.

(v) Jede nullstellenfreie holomorphe Funktion f auf G besitzt eine ***komplexe Quadratwurzel***, d.h. es gibt eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ mit $g(z)^2 = f(z)$ für alle $z \in G$.

Die Beweise dieser Sätze findet man in Abschnitt 5.1 von [Fr].

Literaturverzeichnis

[FL] Wolfgang Fischer, Ingo Lieb, *Funktionentheorie*. vieweg studium - Aufbaukurs Mathematik.

[Fr] Klaus Fritsche, *Grundkurs Funktionentheorie*. Spektrum Akademischer Verlag.

[Ne] Karl-Hermann Neeb, *Funktionentheorie I*. Skript zur Vorlesung an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, im Sommersemester 2017.