Definition von Unter- und Obersummen

Definition (12.4)

Für jede Zerlegung $\mathscr{Z}$ von Q wie angegeben bezeichnet man die Werte

$$\mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) = \sum_{K \in \mathscr{Q}(\mathscr{Z})} c_{K,f}^- v(K) \quad \text{bzw.} \quad \mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}) = \sum_{K \in \mathscr{Q}(\mathscr{Z})} c_{K,f}^+ v(K)$$

als Unter- bzw. Obersumme von f bezüglich der Zerlegung $\mathscr{Z}$.

Definition der Riemann-integrierbaren Funktionen

Definition (12.7)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann nennt man

$$\int_{Q\star} f(x)\,dx = \sup_{\mathscr{Z}} \mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) \quad \text{bzw.} \quad \int_Q^{\star} f(x)\,dx = \inf_{\mathscr{Z}} \mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z})$$

das Unter- bzw. Oberintegral von f, wobei $\mathscr{Z}$ bei der Bildung von Supremum und Infimum jeweils alle Zerlegungen des Quaders Q durchläuft. Man bezeichnet f als Riemann-integrierbar, wenn Unter- und Oberintegral übereinstimmen. In diesem Fall nennt man

$$\int_Q f(x)\,dx \quad = \quad \int_{Q\star} f(x)\,dx \qquad \text{Riemann-Integral} \quad \text{von } f.$$

Notwendiges und hinreichendes Kriterium für Integrierbarkeit

Proposition (12.8)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Zerlegung $\mathscr{Z}$ von Q gibt mit

$$\mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}) - \mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) \quad < \quad \varepsilon.$$

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum der integrierbaren Funktionen

Proposition (12.9)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch f und g Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_Q (f+g)(x)\ dx \quad = \quad \int_Q f(x)\ dx + \int_Q g(x)\ dx$$

und

$$\int_Q (\lambda f)(x)\ dx \quad = \quad \lambda \int_Q f(x)\ dx.$$

Aus $f \le g$ folgt $\int_Q f(x)\ dx \le \int_Q g(x)\ dx$.

Beweis von Prop (12.9):

geg.: Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-int.

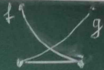
z.zg.: $f+g$ Riemann-int., $\int_Q (f+g)(x)\,dx = \int_Q f(x)\,dx + \int_Q g(x)\,dx$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. f, g Riemann-int. $\xrightarrow{\text{Prop. (12.8)}}$

$\exists$ Zerlegungen Z, Z' mit $S_f^+(Z) - S_f^-(Z) < \varepsilon$, $S_g^+(Z') - S_g^-(Z') < \varepsilon$. Nach Übergang zu einer gem. Verfeinerung können wir $Z = Z'$ annehmen.

Beh.: (i) $S_{f+g}^+(Z) \le S_f^+(Z) + S_g^+(Z)$

(ii) $S^-_{f+g}(Z) \geq S^-_f(Z) + S^-_g(Z)$



Zeige nur (i). Für jedes $K \in Q(Z)$ gilt jeweils

$$c^+_{K,f+g} = \sup (f+g)(K) \overset{!}{\leq} \sup f(K) + \sup g(K)$$

$= c^+_{K,f} + c^+_{K,g}$, denn: Für alle $x \in K$ gilt

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq \sup f(K) + \sup g(K) \Rightarrow$

$\sup f(K) + \sup g(K)$ ist obere Schranke von $(f+g)(K)$, und

nach Def. ist $\sup (f+g)(K)$ die <u>kleinste</u> obere Schranke

$\Rightarrow$ erhalte $S^+_{f+g}(Z) = \sum_{K \in Q(Z)} c^+_{K,f+g} \, v(K) \leq \sum_{K \in Q(Z)} (c^+_{K,f} + c^+_{K,g}) \, v(K)$

$$= \sum_{K \in Q(Z)} c^+_{K,f} \, v(K) + \sum_{K \in Q(Z)} c^+_{K,g} \, v(K) = S^+_f(Z) + S^+_g(Z)$$

$$S_f^-(Z) + S_g^-(Z) \leq S_{f+g}^-(Z) \leq S_{f+g}^+(Z)$$

$$\leq S_f^+(Z) + S_g^+(Z) \leq S_f^-(Z) + S_g^-(Z) + 2\varepsilon$$

$\Rightarrow S_{f+g}^+(Z) - S_{f+g}^-(Z) < 2\varepsilon$ Da ε bel. klein gewählt werden kann, ist $f+g$ somit Riemann-integrierbar.

Es gilt nun einerseits

$$S_f^-(Z) + S_g^-(Z) \leq \int_Q f(x)\,dx + \int_Q g(x)\,dx \leq$$

$$S_f^+(Z) + S_g^+(Z) \leq S_f^-(Z) + S_g^-(Z) + 2\varepsilon$$

andererseits

$$S_f^-(Z) + S_g^-(Z) \leq S_{f+g}^-(Z) \leq \int_Q (f+g)(x)\,dx \leq$$

$$S^+_{f+g}(Z) \leq S^+_f(Z) + S^+_g(Z) \leq S^-_f(Z) + S^-_g(Z) + 2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \left| \int_Q (f+g)(x)\,dx - \int_Q f(x)\,dx - \int_Q g(x)\,dx \right| < 2\varepsilon$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. klein gew. werden kann, folgt

$$\int_Q (f+g)(x)\,dx = \int_Q f(x)\,dx + \int_Q g(x)\,dx.$$

Setze nun $f \leq g$ voraus. Beh: $\int_Q f(x)\,dx \leq \int_Q g(x)\,dx$
(wobei f, g Riemann-int.)

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Wie oben finden wir eine Zerlegung Z von Q mit $S^+_f(Z) - S^-_f(Z) < \varepsilon$, $S^+_g(Z) - S^-_g(Z) < \varepsilon$.

Wegen $f \leq g$ gilt $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in Q$, also

$c^-_{K,f} = \inf f(K) \leq \inf g(K) = c^-_{K,g}$, ebenso $c^+_{K,f} \leq c^+_{K,g}$ $(*)$

$$\Rightarrow \int_Q f(x)\,dx \leq S_f^+(Z) \leq S_g^+(Z) < S_g^-(Z) + \varepsilon$$

$\uparrow$ folgt aus $(*)$

$$\leq \int_Q g(x)\,dx + \varepsilon$$

Da ε bel. klein gewählt werden kann folgt $\int_Q f(x)\,dx \leq \int_Q g(x)\,dx$. $\square$

Integrierbarkeit stetiger Funktionen

Proposition (12.10)

Jede stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ auf einem Quader Q ist Riemann-integrierbar.

... den kann, folgt daraus die Riemann-Int. von f □

Beweis von Satz (12.10)

$Q \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader, $f: Q \to \mathbb{R}$ stetig

z.zg: f ist Riemann-integrierbar.

Da Q kompakt ist, ist f sogar gleichmäßig stetig

Für bel. vorgeg. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es somit ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass

$\forall x, y \in Q: \|x-y\| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$ ($\|\ \|$ bel. Norm auf $\mathbb{R}^n$)

Wähle nun eine Zerlegung Z von Q so fein, dass jeder Quader $K \in Q(Z)$ Durchmesser $< \delta$ hat. Für alle $K \in Q(Z)$ und alle $x, y \in K$ gilt dann $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

$\Longrightarrow$ Für jedes $x \in K$ gilt $f(x) \leq \sup f(K) \leq$

$f(x)+\varepsilon$, ebenso. $f(x) \geq \inf f(k) \geq f(x)-\varepsilon$

$$\Rightarrow \sup f(k) - \inf f(k) \leq (f(x)+\varepsilon) - (f(x)-\varepsilon) \leq 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow c_{k,f}^+ - c_{k,f}^- \leq 2\varepsilon \quad \forall k \in Q(Z)$$

$$\Rightarrow S_f^+(Z) - S_f^-(Z) = \sum_{k\in Q} (c_{k,f}^+ - c_{k,f}^-)\, v(k)$$

$$\leq 2\varepsilon \sum_{k\in Q} v(k) = 2\varepsilon\, v(Q)$$

Da ε bel. klein gewählt werden kann, folgt daraus die Riemann-Int. von f $\square$

Tatsächlich kann $c^{+}_{K,f} - c^{-}_{K,f}$ durch ε abgeschätzt werden (statt 2ε), denn: Für alle $x, y \in K$ gilt

$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. OE $f(x) \geq f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \sup f(K) - f(y) \leq \varepsilon \;\; \forall y \in K \Rightarrow \sup f(K) - \inf(K) \leq \varepsilon$

§ 13. Der Satz von Fubini

Satz (13.1)

Seien $P \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader, und sei $f : P \times Q \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion auf dem Quader $P \times Q \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Für jedes $x \in P$ sei die Funktion $f_x : Q \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_x(y) = f(x,y)$. Dann sind die Funktionen

$$f_\bigstar : P \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \int_{Q\bigstar} f_x(y)\; dy$$

und

$$f^\bigstar : P \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \int_Q^\bigstar f_x(y)\; dy$$

beide Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{P\times Q} f(x,y)\, d(x,y) = \int_P \left(\int_{Q\bigstar} f_x(y)\; dy \right)\, dx = \int_P \left(\int_Q^\bigstar f_x(y)\; dy \right)\, dx.$$

Bem: Ist $f: P \times Q \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $f_x: Q \to \mathbb{R}$ für jedes $x \in P$ stetig und somit nach Satz (12.10) auch Riemann-int. Es gilt dann

$$\int_{P\times Q} f(x,y)\, d(x,y) = \int_P \left(\int_Q f_x(y)\, dy \right) dx$$

Bsp.: $P = Q = [0,1]$, $f: P\times Q \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$

Für jedes $x \in [0,1]$ ist $f_x(y) = xy \quad \forall y \in Q$ $\quad \forall x \in P$

$$\Rightarrow \int_Q f_x(y)\, dy = \int_0^1 xy\, dy = x\int_0^1 y\, dy = x\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}x$$

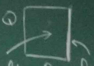
$$\Rightarrow \int_{P\times Q} f(x,y)\, d(x,y) = \int_P \left(\int_Q f_x(y)\, dy\right) dx = \int_P \tfrac{1}{2}x\, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{4}$$

ε zg $< K_P, f_x$

Sei $K_P \in Q(Z_P)$, $K_Q \in Q(Z_Q)$ $x_0 \in K_P$

<u>Problem</u>: $f: P \times Q \to \mathbb{R}$ integrierbar $\underset{\text{im Allg}}{\not\Longrightarrow}$ f_x int'bar für alle $x \in P$ vorstellbar z.B. die Situation



etwa: $f: [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x < 1 \text{ oder } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x = 1, y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

„f verhält sich normal“ „f spielt verrückt“

<u>Bew. von Satz (13.1)</u>:

geg: $f: P \times Q \to \mathbb{R}$ Riemann-int. ($P \subseteq \mathbb{R}^m$, $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader)

z.zg: (i) $f_*: P \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{Q*} f_x(y)\,dy$, $f^*: P \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_Q^* f_x(y)\,dy$ sind beide Riemann-int.

(ii) $\int_{P \times Q} f(x,y)\,d(x,y) = \int_P \left(\int_Q f_*(y)\,dy \right) dx = \int_P \left(\int_Q f^*(y)\,dy \right) dx$

zu (ii) $Z_P = (Z_1, \dots, Z_m)$, $Z_Q = (Z_{m+1}, \dots, Z_{m+n})$ Zerlegungen von P und Q $\Rightarrow$ $Z = (Z_1, \dots, Z_{m+n})$ Zerl. von $P \times Q$ und $Q(Z) = \{K_P \times K_Q \mid K_P \in Z_P(P),\ K_Q \in Z_Q(Q)\}$

Beh.: $S_f^-(Z) \le S_{f_*}^-(Z_P)$ und $S_f^+(Z) \ge S_{f_*}^+(Z_P)$

$$S_f^-(Z) = \sum_{K \in Q(Z)} c^-_{K,f}\, v(K) = \sum_{K_P \in Q(Z_P)} \sum_{K_Q \in Q(Z_Q)} c^-_{K_P \times K_Q, f}\, v(K_P \times K_Q)$$

$$= \sum_{K_P \in Q(Z_P)} \Big(\underbrace{\sum_{K_Q \in Q(Z_Q)} c^-_{K_P \times K_Q, f}\, v(K_Q)}_{\text{z.zg. } c^-_{K_P, f_*}} \Big) v(K_P)$$

Sei $K_P \in Q(Z_P)$, $K_Q \in Q(Z_Q)$, $x_0 \in K_P$.

$\Rightarrow \bar{c}_{K_P \times K_Q, f} = \inf \{ f(x,y) \mid x \in K_P, y \in K_Q \}$

$\leq \inf \{ f(x_0, y) \mid y \in K_Q \} = \bar{c}_{K_Q, f_{x_0}}$

$\Rightarrow \sum_{Q \in Q(Z_Q)} \bar{c}_{K_P \times K_Q, f}\, v(K_Q) \leq \sum_{Q \in Q(Z_Q)} \bar{c}_{K_Q, f_{x_0}}\, v(K_Q) = \bar{S}_{f_{x_0}}(Z_Q)$

$\leq \int_{Q_*}^{\cdot} f_{x_0}(y)\, dy \leq f_*(x_0)$

Übergang zum Infimum $\Rightarrow \sum_{K_Q \in Q(Z_Q)} \bar{c}_{K_P \times K_Q, f}\, v(K_Q) \leq$

$\inf \{ f_*(x) \mid x \in K_P \} = \bar{c}_{K_P, f_*}$

einsetzen $\Rightarrow \bar{S}_f(Z) \leq \bar{S}_{f_*}(Z_P)$

Beweis der zweiten Ungl analog.

Da „Unterintegral ≤ Oberintegral", gilt $f_*(x) \le f^*(x)$ $\forall x \in P$. $\longrightarrow$ $S_f^-(Z) \le S_{f_*}^-(Z_P) \le S_{f_*}^+(Z_P)$

$\le S_{f^*}^+(Z_P) \le S_f^+(Z)$

Da f Riemann-int. ist, kann Z so gewählt werden, dass der Unterschied zwischen $S_f^-(Z)$ und $S_f^+(Z)$ beliebig klein wird, und somit wird auch der Unterschied zwischen

$S_{f_*}^-(Z)$ und $S_{f_*}^+(Z)$ $\Rightarrow$ f_* ist Riemann-int.

Beweis für f^* analog.

außerdem:

$$S_f^-(Z) \le S_{f_*}^-(Z_P) \le \int_P f_*(x)\,dx \le \int_P f^*(x)\,dx \le S_f^+(Z)$$

$S_{f_*}^-(Z)$ und $S_{f_*}^+(Z)$ $\Rightarrow f_*$ ist Riemann-int.

Beweis für f^* analog.

außerdem:

und $S_f^-(Z) \leq \int_{P\times Q} f(x)\,dx \leq S_f^+(Z)$

Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. und Z so gewählt, dass $S_f^+(Z) - S_f^-(Z) < \varepsilon$ ist, dann folgt $\left| \int_{P\times Q} f(x,y)\,d(x,y) - \int_P f_*(x)\,dx \right| < \varepsilon$

Da ε bel. klein gewählt werden kann, folgt

$$\int_{P\times Q} f(x,y)\,d(x,y) = \int_P f_*(x)\,dx$$

Ebenso erhält man $\int_{P\times Q} f(x,y)\,d(x,y) = \int_P f^*(x)\,dx$. $\square$

Anwendungsbeispiele für den Satz von Fubini

- $\displaystyle\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,d(x,y) = \frac{1}{4}$
- Volumen des Simplex
- Volumen der Einheitskugel