

§ 12. Das mehrdimensionale Riemann-Integral

- Ein (achsenparalleler, kompakter) Quader im $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ der Form

$$Q = I_1 \times \dots \times I_n$$

mit $I_k = [a_k, b_k]$ und $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k < b_k$ für $1 \leq k \leq n$.

- Die Zahl $v(Q) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$ bezeichnen wir als das (n -dimensionale) Volumen von Q .

Zerlegungen von Quadern

Definition (12.1)

Sei $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ ein Quader im $\mathbb{R}^n$.

- (i) Eine **Zerlegung** von Q ist ein Tupel $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_n)$, wobei $\mathcal{Z}_k$ für $1 \leq k \leq n$ jeweils eine Zerlegung des Intervalls I_k bezeichnet.
- (ii) Ist $\mathcal{Z}$ eine solche Zerlegung, $I_k = [a_k, b_k]$ und $\mathcal{Z}_k = \{x_{k,1}, \dots, x_{k,m_k-1}\}$ für $1 \leq k \leq n$ mit jeweils $a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < \dots < x_{k,m_k-1} < x_{k,m_k} = b_k$, dann bezeichnen wir eine Teilmenge $K \subseteq Q$ der Form

$$K = [x_{1,\ell_1-1}, x_{1,\ell_1}] \times \dots \times [x_{n,\ell_n-1}, x_{n,\ell_n}]$$

mit $1 \leq \ell_k \leq m_k$ für $1 \leq k \leq n$ als **Teilquader** von Q bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}$. Die Menge all dieser Teilquader bezeichnen wir mit $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})$.

Zerlegungen von Quadern (Forts.)

Definition (12.1)

- (iii) Ist $\mathcal{Z}' = (\mathcal{Z}'_1, \dots, \mathcal{Z}'_n)$ eine weitere Zerlegung von Q , so bezeichnen wir $\mathcal{Z}'$ als **Verfeinerung** von $\mathcal{Z}$, wenn $\mathcal{Z}'_k \supseteq \mathcal{Z}_k$ für $1 \leq k \leq n$ erfüllt ist.

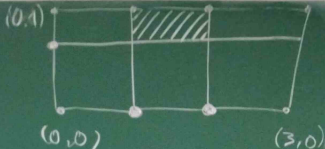
Je zwei Zerlegungen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ kann eine **gemeinsame Verfeinerung** zugeordnet werden, nämlich die Verfeinerung mit den Komponenten $\mathcal{Z}_k \cup \mathcal{Z}'_k$, die wir der Einfachheit halber mit $\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}'$ bezeichnen.

Beispiel zu Def. (12.1)

$$n=2, Q = [0,3] \times [0,1]$$

$$Z = (Z_1, Z_2), Z_1 = \{1, 2\}, Z_2 = \{1, \frac{2}{3}\}$$

$$m_1 = 3, m_2 = 2$$



Das Volumen der Teilquader

Lemma (12.2)

Sei Q ein Quader und $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q wie in Def. [12.1] angegeben. Dann addieren sich Volumina der Teilquader von Q bezüglich $\mathcal{Z}$ zum Volumen des Quaders Q , es gilt also

$$\sum_{K \in \mathcal{Z}(Q)} v(K) = v(Q).$$

Verhalten der Teilquader unter Verfeinerungen

Lemma (12.3)

Seien $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ zwei Zerlegungen eines Quaders Q , wobei $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$ sei.

- Dann definiert $\mathcal{Z}'$ für jeden Teilquader $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ auf natürliche Weise eine Zerlegung $\mathcal{Z}_K$ von K .
- Bezeichnen wir die Menge der Teilquader von K bezüglich $\mathcal{Z}_K$ mit $\mathcal{Q}(\mathcal{Z})_K$, dann gilt

$$\mathcal{Q}(\mathcal{Z}') = \bigcup_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} \mathcal{Q}(\mathcal{Z})_K \quad \text{und} \quad v(K) = \sum_{K' \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})_K} v(K') \quad ,$$

wobei es sich links um eine **disjunkte** Vereinigung handelt.

Beweis von Lemma (12.2) $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

$Z = (Z_1, \dots, Z_n)$, $Z_k = \{x_{k,1}, \dots, x_{k,m_k-1}\}$, wobei

$$a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < \dots < x_{k,m_k-1} < x_{k,m_k} = b_k$$

$$\sum_{k \in Q(Z)} v(k) = \sum_{l_1=1}^{m_1} \sum_{l_2=1}^{m_2} \dots \sum_{l_n=1}^{m_n} v([x_{1,l_1-1}, x_{1,l_1}] \times \dots \times [x_{n,l_n-1}, x_{n,l_n}])$$

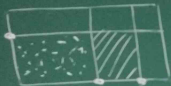
$$= \sum_{l_1=1}^{m_1} \dots \sum_{l_n=1}^{m_n} \prod_{k=1}^n (x_{k,l_k} - x_{k,l_k-1})$$

$$= \left(\sum_{l_1=1}^{m_1} (x_{1,l_1} - x_{1,l_1-1}) \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{l_n=1}^{m_n} (x_{n,l_n} - x_{n,l_n-1}) \right)$$

$$= \prod_{k=1}^n \left(\sum_{l_k=1}^{m_k} (x_{k,l_k} - x_{k,l_k-1}) \right) = \prod_{k=1}^n (x_{k,m_k} - x_{k,0})$$

$$= \prod_{k=1}^n (b_k - a_k) = v(Q) \quad \square$$

zu Lemma (12.3) Z' Verfeinerung von Z



$Q(Z)$

Sei $K \in Q(Z)$, $K = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n]$

mit $c_k, d_k \in Z_k \cup \{a_k, b_k\}$ für $1 \leq k \leq n$

Dann ist die Zerlegung $Z_K = (Z_{K,1}, \dots, Z_{K,n})$ von K
 geg durch $Z_{K,k} = [c_k, d_k] \cap Z_k$

Definition von Unter- und Obersummen

Definition (12.4)

Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q wie angegeben bezeichnet man die Werte

$$\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) = \sum_{K \in \mathcal{Z}} c_{K,f}^- v(K) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}) = \sum_{K \in \mathcal{Z}} c_{K,f}^+ v(K)$$

als **Unter-** bzw. **Obersumme** von f bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}$.

Verhalten von Unter- und Obersummen unter Verfeinerungen

zur Erinnerung:

Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A \subseteq B$, dann gilt

$$\inf(A) \geq \inf(B) \quad \text{und} \quad \sup(A) \leq \sup(B).$$

Lemma (12.5)

Sind $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ Zerlegungen von Q , und ist $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$, dann gilt

$$\mathcal{I}_f^-(\mathcal{Z}) \leq \mathcal{I}_f^-(\mathcal{Z}') \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_f^+(\mathcal{Z}') \leq \mathcal{I}_f^+(\mathcal{Z}).$$

Definition von Unter- und Obersummen

$f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktion

Untersumme: $S_f^-(Z) = \sum_{k \in Q(Z)} c_{k,f}^- \cdot v(k), c_{k,f}^- = \inf f(k)$

Obersumme: $S_f^+(Z) = \sum_{k \in Q(Z)} c_{k,f}^+ \cdot v(k), c_{k,f}^+ = \sup f(k)$

Beweis von Lemma (12.5)

Q Quader, Z, Z' Zerlegungen, Z' Verfeinerung von Z
Sind $k' \in Q(Z')$ und $k \in Q(Z)$, wobei $k' \in Q(Z) \cap k$
gilt, dann folgt $k' \subseteq k$ und somit $c_{k,f}^+ = \sup f(k)$
 $\geq \sup f(k') = c_{k',f}^+$

$$S_f^+(z) = \sum_{k \in Q(z)} c_{k,f}^+ v(k) \stackrel{\text{Lemma (12.2)}}{=} \sum_{k \in Q(z)} \sum_{k' \in Q(z)_k} c_{k,f}^+ v(k')$$

s.o.

$$\geq \sum_{k \in Q(z)} \sum_{k' \in Q(z)_k} c_{k',f}^+ v(k') \stackrel{\text{Lemma (12.2)}}{=} \sum_{k' \in Q(z')} c_{k',f}^+ v(k')$$

$$= S_f^-(z') \quad \square$$

Vergleich von Unter- und Obersummen

Folgerung (12.6)

Für zwei beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$ von Q gilt
 $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) \leq \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}')$.

$$\rightarrow \int_0^+ f(x) dx \geq \sup \{ S_f^-(Z) \mid Z \text{ Zerl.} \} = \int_0^+ f(x) dx$$

Beweis von Folgerung (12.6):

geg: Quader Q , $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, Z, Z'

Zerlegungen von Q z.zg: $S_f^-(Z) \leq S_f^+(Z')$

Setze $Z'' = Z \cup Z'$ Für jeden Quader $K \in Q(Z'')$

gilt $c_{K,f}^- = \inf f(K) \leq \sup f(K) = c_{K,f}^+ \Rightarrow$

$$S_f^-(Z'') \leq S_f^+(Z'') \xrightarrow{(12.5)} S_f^-(Z) \leq S_f^-(Z'')$$

$$\leq S_f^+(Z'') \xrightarrow{(12.5)} S_f^+(Z') \quad \square$$

Definition der Riemann-integrierbaren Funktionen

Definition (12.7)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann nennt man

$$\int_{Q\star} f(x) \, dx = \sup_{\mathcal{Z}} \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) \quad \text{bzw.} \quad \int_Q^{\star} f(x) \, dx = \inf_{\mathcal{Z}} \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z})$$

das **Unter-** bzw. **Oberintegral** von f , wobei $\mathcal{Z}$ bei der Bildung von Supremum und Infimum jeweils alle Zerlegungen des Quaders Q durchläuft. Man bezeichnet f als **Riemann-integrierbar**, wenn Unter- und Oberintegral übereinstimmen. In diesem Fall nennt man

$$\int_Q f(x) \, dx = \int_{Q\star} f(x) \, dx \quad \text{Riemann-Integral von } f.$$

Aus Folgerung (12.6) ergibt sich

$$\int_Q f(x) dx \leq \int_Q^+ f(x) dx, \text{ denn:}$$

Ist Z eine bel. Zerlegung von Q , dann gilt

$$S_f^-(Z) \leq S_f^+(Z') \text{ f\"ur jede Zerlegung } Z' \text{ von } Q.$$

$$\Rightarrow S_f^-(Z) \text{ ist untere Schranke } \{S_f^+(Z') | Z' \text{ Zerl. von } Q\}$$

$$\Rightarrow S_f^-(Z) \leq \inf \{S_f^+(Z') | Z' \text{ Zerl.}\} = \int_Q^+ f(x) dx$$

$$\text{also: } \int_Q^+ f(x) dx \text{ ist obere Schranke von } \{S_f^-(Z) | Z \text{ Zerl.}\}$$

$$\Rightarrow \int_Q^+ f(x) dx \geq \sup \{S_f^-(Z) | Z \text{ Zerl.}\} = \int_Q f(x) dx$$

$$\text{Sindbedi-Lemma} \Rightarrow \int_{Q_*} xy d(x,y) = \int_Q xy d(x,y) = \frac{1}{4}$$

Beispiel: Berechnung von $\int_{[0,1] \times [0,1]} xy d(x,y)$

$Q = [0,1] \times [0,1]$, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$

Betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung

$Z_n = (Z'_n, Z''_n)$ mit $Z'_n = Z''_n = \left\{ \frac{k}{n} \mid 1 \leq k \leq n-1 \right\}$

$Q(Z_n) = \{Q_{kl} \mid 1 \leq k, l \leq n\}$ mit $Q_{kl} = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] \times \left[\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n} \right]$

$$v(Q_{kl}) = \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) \left(\frac{l}{n} - \frac{l-1}{n} \right) = \frac{1}{n^2}$$

$$\text{Es gilt jeweils } c_{Q_{kl}, f}^- = \inf f(Q_{kl}) = \frac{(k-1)(l-1)}{n^2}$$

$$c_{Q_{kl}, f}^+ = \sup f(Q_{kl}) = \frac{kl}{n^2}$$

Untersummen:

$$\begin{aligned} S_p^-(Z_n) &= \sum_{k \in Q(Z_n)} c_{k,p}^- v(k) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_{Q_{kl},f}^- v(Q_{kl}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{(k-1)(l-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^4} \left(\sum_{k=1}^n (k-1) \right) \left(\sum_{l=1}^n (l-1) \right) \\ &= \frac{1}{n^4} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k \right) \left(\sum_{l=0}^{n-1} l \right) = \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{2}(n-1)n \cdot \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

Obersummen: $S_p^+(Z_n) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \Rightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}} = S_p^-(Z_n) \leq \int_{Q^+} xy d(\mu, \nu) \leq \int_{Q^+} xy d(\mu, \nu) \leq S_p^+(Z_n) = \underbrace{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}}$$

Sandwich-Lemma $\Rightarrow \int_{Q^+} xy d(\mu, \nu) = \int_{Q^+} xy d(\mu, \nu) = \frac{1}{4}$

Notwendiges und hinreichendes Kriterium für Integrierbarkeit

Proposition (12.8)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Eine beschränkte Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q gibt mit

$$\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}) - \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) < \varepsilon.$$

Beweis von Prop. (12.8)

" $\Rightarrow$ " Vor.: f ist Riemann-int. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

Aus der Def. des Unterintegrals als Supremum folgt,

dass eine existiert Zerlegung Z von Q mit $S_f^-(Z) > \int_Q f(x) dx - \frac{1}{2} \varepsilon$
 $= \int_Q f(x) dx - \frac{1}{2} \varepsilon$. Genauso erhält man eine Zerlegung Z'

von Q mit $S_f^+(Z') < \int_Q f(x) dx + \frac{1}{2} \varepsilon = \int_Q f(x) dx + \frac{1}{2} \varepsilon$

Sei $Z'' = Z \cup Z' \rightarrow S_f^+(Z'') - S_f^-(Z'') \stackrel{(12.5)}{\leq}$

$$S_f^+(Z') - S_f^-(Z) < \left(\int_Q f(x) dx + \frac{1}{2} \varepsilon \right) - \left(\int_Q f(x) dx - \frac{1}{2} \varepsilon \right) = \varepsilon$$

← " Vor $\Rightarrow$ Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es eine
"Zerlegung Z mit $S_f^+(Z) - S_f^-(Z) < \varepsilon$

$$\Rightarrow S_f^-(Z) \leq \int_{Q^+} f(x) dx \leq \int_Q^* f(x) dx \leq S_f^+(Z) < S_f^-(Z) + \varepsilon$$

Da ε bel. klein gewählt werden kann, folgt

$$\int_{Q^+} f(x) dx = \int_Q^* f(x) dx \rightarrow f \text{ ist Riemann-integrierbar. } \square$$