

## § 11. Untermannigfaltigkeiten

### Definition (11.1)

Seien  $d, n \in \mathbb{N}$  mit  $d < n$ . Eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  wird  $d$ -dimensionale **Untermannigfaltigkeit** des  $\mathbb{R}^n$  genannt, wenn es für jeden Punkt  $a \in M$  eine offene Umgebung  $U$  und  $n - d$  stetig differenzierbare Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-d} : U \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass gilt

- $U \cap M = \{x \in U \mid \varphi_1(x) = \dots = \varphi_{n-d}(x) = 0\}$
- $\dim \operatorname{lin}\{\varphi'_1(x), \dots, \varphi'_{n-d}(x)\} = n - d$  für alle  $x \in U \cap M$

## Beispiele für Untermannigfaltigkeiten

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$2x^2 + 2y^2 = 2$$

(i) Untervektorraum

des  $\mathbb{R}^n$

Jeder  $d$ -dim Untervektorraum kann als Lösungsmenge von  $(n-d)$  linear unabh. linearen Gleichungen der Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{n-d,1}x_1 + a_{n-d,2}x_2 + \dots + a_{n-d,n}x_n = 0$$

dargestellt werden. Setzt man also  $f_k(x) = \sum_{i=1}^n a_{k,i}x_i$ ,  $1 \leq k \leq n-d$ , dann ist die Def. (11.1) mit  $U = \mathbb{R}^n$  erfüllt.

$P(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$  verschwindet in  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K$   
 (aber:  $K \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  ist 2-dim. Unterraum des  $\mathbb{R}^3$ )

(ii) Kreis im  $\mathbb{R}^2$

$$y^2 = x^3$$


Die Teilmenge  $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  ist  
 Nullstellenmenge von  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$   
 $\varphi'(x,y) = (2x \ 2y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Für alle  $(x,y) \in C$  gilt  $\varphi'(x,y) \neq (0,0)$ , d.h.  $\{\varphi'(x,y)\}$   
 ist linear unabh. für alle  $(x,y) \in C \rightarrow C$  ist Unterraum.  
 der Dimension  $2 - 1 = 1$ .

(iii) Hyperbel  $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 1 = 0\}$

ist eine 1-dim. Unterraum des  $\mathbb{R}^2$ .

(Setze  $\varphi(x,y) = xy - 1 \rightarrow \varphi'(x,y) = (y \ x) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$   
 $\rightarrow \varphi'(x,y) \neq (0,0) \quad \forall (x,y) \in H$ )

(iv) Rotationshyperboloid  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}$

(Setze  $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z \Rightarrow \varphi'(x, y, z) =$   
 $(2x \ 2y \ -1) \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \varphi'(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$



für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , erst recht für alle  $(x, y, z) \in P$ .

$\Rightarrow \varphi'(x, y, z)$  linear unabh.  $\forall (x, y, z) \in P \Rightarrow P$  ist Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  der Dimension  $3-1=2$ .

(v) Der Kegel  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$



ist keine 2-dim. Untermf. von  $\mathbb{R}^3$ , denn.

Die Ableitung  $\varphi'(x, y, z) = (2x \ 2y \ -2z)$  von

$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  verschwindet in  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K$

(aber:  $K \setminus \{0 \in \mathbb{R}^3\}$  ist 2-dim. Untermf. des  $\mathbb{R}^3$ )

## Satz über Extrema mit Nebenbedingungen

### Satz (11.2)

- Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^n$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge.
- Seien  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-d}$  stetig differenzierbare Funktionen  $\varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft, dass die Bedingungen (i) und (ii) aus Def. (11.1). erfüllt sind.
- Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere stetig differenzierbare Funktion.

Ist dann  $a \in U \cap M$  ein lokales Extremum von  $f$  auf  $M$ , dann gibt es reelle Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d} \in \mathbb{R}$  so dass in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  die Gleichung

$$f'(a) = \sum_{j=1}^{n-d} \lambda_j \varphi_j'(a) \quad \text{erfüllt ist.}$$

Die Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$  werden **Lagrange-Multiplikatoren** genannt.

Beispiel 1. Extremwertbestimmung auf dem Kreis

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ,  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -x + y$   
geachtet. lokales Maximum/Minimum von  $f|_C$

$C$  ist Nullstellenmenge von  $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Ableitung  $\varphi'(x, y) = (2x \ 2y)$

Ableitung von  $f$ .  $(\partial_1 f(x, y) \ \partial_2 f(x, y)) = (-1 \ 1)$

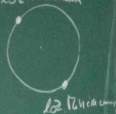
Ist nun  $(x, y) \in C$  ein lokales Extremum, dann muss nach Satz (14.2)

ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\varphi'(x, y) = \lambda \varphi'(x, y)$  existieren

$\Leftrightarrow (-1 \ 1) \stackrel{(*)}{=} \lambda (2x \ 2y)$  Ist (\*) erfüllt, dann gilt  $\lambda \neq 0$ .

Somit folgt aus  $-1 = \lambda 2x$ , dass  $x = -\frac{1}{2\lambda}$  ist. ebenso

$$1 = \lambda 2y \Rightarrow y = \frac{1}{2\lambda}$$



$$\text{au\sserdem: } (x, y) \in C \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda \in \left\{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

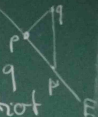
$$\left[ \begin{array}{l} \text{1. Fall: } \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = -\frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right]$$

$$\text{2. Fall: } \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Beispiel 2: Bestimmung des Abstands Punkt - Ebene

geg.  $q = (1, 0, 0)$ ,  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\}$

gesucht: Punkt  $p \in E$  mit dem kleinsten Abstand zu  $q$   
(wobei vorausgesetzt wird, dass ein solcher Punkt existiert und eindeutig bestimmt ist)



$E$  ist Nullstellenmenge von  $\varphi(x, y, z) = x + y - z$

Ableitung:  $\varphi'(x, y, z) = (1 \ 1 \ -1)$

Betrachte die Einschränkung der Funktion

$$P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \|x - q\|^2 = \|(x_1 - 1, x_2, x_3)\|^2 =$$

$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2$   
auf  $E$ . gesucht ist der Punkt  $p \in E$ , in dem  $P$  minimal wird



Ang.  $p = (x, y, z) \in E$  ist dieses Minimum. Satz (14.2)  $\Rightarrow$   
 $\exists \lambda \in \mathbb{R} : f'(p) \stackrel{(*)}{=} \lambda \psi'(p) \quad f'(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2 \ 2x_2 \ 2x_3)$

einsetzen in  $(*) \Rightarrow (2x - 2 \ 2y \ 2z) = \lambda \cdot (1 \ 1 \ -1)$

$$\Rightarrow 2x - 2 = \lambda, \ 2y = \lambda, \ 2z = -\lambda \Rightarrow x = \frac{1}{2}\lambda + 1,$$

$$y = \frac{1}{2}\lambda, \ z = -\frac{1}{2}\lambda \quad (x, y, z) \in E \Rightarrow x + y - z = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\lambda + 1\right) + \frac{1}{2}\lambda - \left(-\frac{1}{2}\lambda\right) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow p = (x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow d(q, E)^2 = \|p - q\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2 =$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\|^2 = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(q, E) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Erzinerung: Definition des 1-dim Riemann-Integrals

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte Funktion ( $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ )

Unterteilung von  $[a, b]$  = endliche Teilmenge  $Z = \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \subseteq [a, b]$  setze  $x_0 = a, x_n = b$

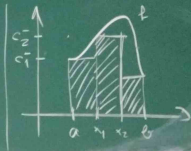
Untersumme von  $f$  bzgl.  $Z$ :

$$S_f^-(Z) = \sum_{k=1}^n c_k^-(x_k - x_{k-1}), \text{ wobei } c_k^- = \inf(f|_{[x_{k-1}, x_k]})$$

Obersumme von  $f$  bzgl.  $Z$ :

$$S_f^+(Z) = \sum_{k=1}^n c_k^+(x_k - x_{k-1})$$

wobei  $c_k^+ = \sup(f|_{[x_{k-1}, x_k]})$



Definition des Unterintegrals:

$$\int_{a+}^b f(x) dx = \sup \{ S_f^-(Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b] \}$$

Definition des Oberintegrals:

$$\int_a^{b*} f(x) dx = \inf \{ S_f^+(Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b] \}$$

$$f \text{ Riemann-integrierbar} \iff \int_{a+}^b f(x) dx = \int_a^{b*} f(x) dx$$

definiere in diesem Fall

Nicht Stride, definiere Integrale von  $\mathbb{R}^2$ -wertigen Fkt.  
auf Teilmengen der Form

