Implizit definierte Funktionen

Definition (10.5)

Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $I', I'' \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle. Wir sagen, eine Funktion $g : I' \to I''$ werde durch f implizit definiert, wenn für alle $(x, y) \in I' \times I''$ die Äquivalenz

$$f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x) \quad \text{erfüllt ist.}$$

Mehrdimensionale partielle Ableitungen

Definition (10.6)

Seien X, Y, Z endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, $U \subseteq X \times Y$ eine offene Teilmenge und $f : U \to Z$ eine total differenzierbare Abbildung. Ist $(x, y) \in U$, dann definieren wir die partiellen Ableitungen von f in X- bzw. Y-Richtung durch

$$\partial_X f(x, y) : X \to Z\,,\ v \mapsto f'(x, y)(v, 0)$$

und

$$\partial_Y f(x, y) : Y \to Z\,,\ w \mapsto f'(x, y)(0, w).$$

Bem zur partiellen Ableitung in X- und Y-Richtung.

(i) Für alle $(x,y) \in U$ und $v \in X$, $w \in Y$ gilt

$$\partial_X f(x,y)(v) + \partial_Y f(x,y)(w) =$$
$$f'(x,y)(v, 0_Y) + f'(x,y)(0_X, w) = f'(x,y)(v,w)$$

(ii) Ist $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$, dann ist $X \times Y = \mathbb{R}^{m+n}$

Für $1 \le k \le m$ ist $\partial_X f(x,y)(e_k) = f'(x,y)(\underset{\hat{}\,\mathbb{R}^m}{e_k}, 0_{\mathbb{R}^n})$ und
$= f'(x,y)(\underset{\hat{}\,\mathbb{R}^{m+n}}{e_k})$ die k-te Spalte $f'(x,y)$,

für $1 \le l \le n$ ist $\partial_Y f(x,y)(e_l) = f'(x,y)(0_{\mathbb{R}^m}, e_l)$
$= f'(x,y)(e_{l+m})$ die $(m+l)$-te Spalte von $f'(x,y)$.

$$f'(x,y) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \partial_1 f_1(x,y) & \cdots & \partial_m f_1(x,y) & \partial_{m+1} f_1(x,y) & \cdots & \partial_{m+n} f_1(x,y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_r(x,y) & \cdots & \partial_m f_r(x,y) & \partial_{m+1} f_r(x,y) & \cdots & \partial_{m+n} f_r(x,y) \end{array} \right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix}\partial_1 f_r(x,y) & \cdots & \partial_m f_r(x,y)\end{matrix}}_{\partial_x f(x,y)} \quad \underbrace{\begin{matrix}\partial_{m+1} f_r(x,y) & \cdots & \partial_{m+n} f_r(x,y)\end{matrix}}_{\partial_y f(x,y)}$$

$Z = \mathbb{R}^r$

Ein Hilfslemma über lineare Abbildungen

Lemma (10.7)

Seien X, Y, Z endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume mit $\dim Y = \dim Z$, und seien $\phi : X \to Z$ und $\psi : Y \to Z$ lineare Abbildungen, wobei ψ invertierbar ist.

Dann ist auch die lineare Abbildung $\Phi : X \times Y \to X \times Z$, $(u, v) \mapsto (u, \phi(u) + \psi(v))$ invertierbar, mit der Zuordnung $X \times Z \to X \times Y$, $(u, w) \mapsto (u, \psi^{-1}(w) - (\psi^{-1} \circ \phi)(u))$ als Umkehrabbildung.

Beweis von Lemma (10.7):

geg.: endl.-dim. $\mathbb{R}$-VR X, Y, Z, $\phi: X \to Z$, $\psi: Y \to Z$,
wobei ψ invertierbar ($\Rightarrow \dim Y = \dim Z$)

z.zg.: $\Phi: X \times Y \to X \times Z$, $(u,v) \mapsto (u, \phi(u) + \psi(v))$ ist invertierbar

Seien $(u,v) \in X \times Y$, $(u_1, w) \in X \times Z$. Dann gilt die Äquiv.:

$$(u_1, w) = \Phi(u,v) \iff (u_1, w) = (u, \phi(u) + \psi(v)) \iff$$

$$u_1 = u \wedge w = \phi(u) + \psi(v) \iff u_1 = u \wedge w - \phi(u_1) = \psi(v)$$

$$\iff u = u_1 \wedge v = \psi^{-1}(w - \phi(u_1)) \iff (u,v) = (u_1, \psi^{-1}(w - \phi(u_1)))$$

$$= (u_1, \psi^{-1}(w) - (\psi^{-1} \circ \phi)(u_1)). \Rightarrow \Phi \text{ bijektiv,}$$

$\Psi: X \times Z \to X \times Y$, $(u_1, w) \mapsto (u_1, \psi^{-1}(w) - (\psi^{-1} \circ \phi)(u_1))$

ist Umkehrabb. $\square$

Satz über implizite Funktionen

Satz (10.8)

- Sei $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq X \times Y$ offen.
- Sei außerdem $f : U \to Y$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $(a, b) \in U$ eine Nullstelle von f mit der Eigenschaft, dass $\partial_Y f(a, b)$ invertierbar ist.

Dann gibt es

- Umgebungen $U' \subseteq X$ von a und $U'' \subseteq Y$ von b mit $U' \times U'' \subseteq U$ und
- eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U' \to U''$,

so dass die Äquivalenz

$$f(x, y) = 0_Y \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x)$$

für alle $(x, y) \in U' \times U''$ erfüllt ist.

Beweis von Satz (10.8) $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$, $U \subseteq X \times Y$ offen
$f : U \to Y$ stetig diff'bare Fkt., $(a,b) \in U$ mit
$\partial_Y f(a,b)$ invertierbar. z.zg.: $\exists$ offene Umg. $U' \subseteq X$
von a, $U'' \subseteq Y$ von b mit $U' \times U'' \subseteq U$ und eine stetig diff'e
Fkt. $g : U' \to U''$ mit $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$ $\forall (x,y) \in U' \times U''$

(1) Rückführung auf lokale Umkehrbarkeit
Definiere $\Phi : U \to X \times Y$ durch $\Phi(x,y) = (x, f(x,y))$
Annahme: Es gibt offene Teilmengen $\tilde{U} \subseteq U$, $\tilde{V} \subseteq X \times Y$,
so dass $\Phi : \tilde{U} \to \tilde{V}$ bijektiv, mit stetig diff'barer
Umkehrfkt. $\Psi : \tilde{V} \to \tilde{U}$.

Seien $U' \subseteq X$, $U'' \subseteq Y$ offen mit $U' \times U'' \subseteq \tilde{U}$.

Ersetze $\tilde{U}$ durch $U' \times U''$, $\tilde{V}$ durch $\Phi(U' \times U'')$

$\Rightarrow \tilde{V} = \Phi(\tilde{U}) = \Phi(U' \times U'')$

Seien $(x,y) \in U' \times U''$, $(v,w) = \Phi(x,y) \Rightarrow (v,w) = \Phi(x, f(x,y)) \Leftrightarrow (x, f(x,y)) = \Psi(v,w) \Rightarrow$
$\Psi(v,w) = (v, f(v,y)) \Rightarrow$ Es gibt eine Abb.
$h : \tilde{V} \to Y$ mit $\Psi(v,w) = (v, h(v,w))$
für alle $(v,w) \in \tilde{V}$. Für alle $x \in U'$, $y \in U''$, $z \in Y$ gilt
also die Äquiv.: $f(x,y) = z \Leftrightarrow (x, f(x,y)) = (x,z) \Leftrightarrow$
$\Phi(x,y) = (x,z) \Leftrightarrow (x,y) = \Psi(x,z) = (x, h(x,z))$
$\Leftrightarrow y = h(x,z)$

Ersetze U' durch $\{x \in U' \mid (x, 0_Y) \in \tilde{V}\}$ (ist offen als Urbild von $\tilde{V}$ unter der stetigen Abb. $x \mapsto (x, 0_Y)$)

Ändere $\tilde{U}$ und $\tilde{V}$ entsprechend ab. Definiere $g: U' \to Y$ durch $g(x) = h(x, 0_Y)$. Dann gilt für alle $(x, y) \in \tilde{U}$ die Äquivalenz $f(x,y) = 0_Y \Leftrightarrow y = h(x, 0_Y) = g(x)$

d.h. g ist durch f implizit definiert!

(2) Nachweis der lokalen Umkehrbarkeit

geg. $(a, b) \in U$, so dass $\partial_Y f(a, b)$ invertierbar

z.zg.: $\Phi(x,y) = (x, f(x,y))$ ist lokal umkehrbar bei (a, b).

dafür z.zg.: $\Phi'(a, b)$ invertierbar

Es gilt $\Phi'(a,b)(v,w) = \partial_x \Phi(a,b)(v) + \partial_y \Phi(a,b)(w)$

außerdem $\Phi'(x,y) = (\mathrm{id}_X, f'(x,y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi'(a,b)(v,w) = (\mathrm{id}_X(v), f'(x,y)(v,w)) =$

$(v, \partial_x f(a,b)(v) + \partial_y f(a,b)(w))$

$\Rightarrow \partial_y \Phi(a,b) = \partial_y f(a,b) \Rightarrow \partial_y \Phi(a,b)$

ist invertierbar Lemma (10.7) $\Rightarrow \Phi'(a,b)$

$= (\mathrm{id}_X, \partial_y f(a,b))$ ist invertierbar

Nach dem Satz über lokale Umkehrbarkeit folgt die Existenz von einer Umg. $\tilde{U}$ von (a,b) wie in (1) angegeben. $\square$

Die Ableitung der implizit definierten Funktion

Folgerung (10.9)

Die Funktion $g : U' \to U''$ aus dem Satz hat an der Stelle a die Ableitung

$$g'(a) \quad = \quad -\partial_Y f(a,b)^{-1} \circ \partial_X f(a,b).$$

Beweis von Folgerung (10.9):

z.zg.: $g'(a) = -\partial_y f(a,b)^{-1} \circ \partial_x f(a,b)$

Betrachte $\Phi : U' \to Z$, $x \mapsto f(x, g(x)) = 0$

Nach Def gilt $\Phi = f \circ g_1$, mit $f : U \to Z$,

$g_1 : U' \to U$, $x \mapsto (x, g(x)) \Rightarrow g_1'(x) = (id_X, g'(x))$

$\forall x \in U'$ Kettenregel $\Rightarrow \Phi'(x) = (f \circ g_1)'(x)$

$= f'(g_1(x)) \circ g_1'(x) = f'(x, g(x)) \circ (id_X, g'(x))$

Für $v \in X$ erhalte $\Phi'(x)(v) = (f'(x,g(x)) \circ g'(x))(v)$

$= f'(x, g(x))(v, g'(x)(v))$

$z = h(x)$

$= \partial_x f(x, g(x))(v) + \partial_y f(x, g(x))(g'(x)(v))$

$\Rightarrow \Phi'(x) = \partial_x f(x, g(x)) + \partial_y f(x, g(x)) \circ g'(x)$

Nach Def. von g und f ist Φ konstant 0, insb. im Punkt a. $\Rightarrow 0 = \Phi'(a) = \partial_x f(a,b) + \partial_y f(a,b) \circ g'(a)$

$\Rightarrow \partial_y f(a,b) \circ g'(a) = -\partial_x f(a,b)$

$\Rightarrow g'(a) = -\partial_y f(a,b)^{-1} \circ \partial_x f(a,b)$

(-1)

Anwendungsbeispiel:

Betrachte das (nicht-lineare) Gleichungssystem

$$x^3 + y^3 + z^3 = 7$$
$$xy + yz + xz = -2$$

Ziel: Untersuchung der Auflösbarkeit nach (y,z) in einer Umg. von $(2,-1,0)$, d.h. zeige:

$\exists$ offene Umg. $U' \subseteq \mathbb{R}$ von 2 und $U'' \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(-1,0)$ und stetig diff'bare Fkt. $g, h : U' \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in U'$, $(y,z) = U''$ gilt:

$$\begin{matrix} x^3 + y^3 + z^3 = 7 \\ xy + yz + xz = -2 \end{matrix} \iff \begin{matrix} y = g(x) \\ z = h(x) \end{matrix}$$

Setze $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$, $f : X \times Y \to Y$

$(x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$, $f_1(x, y) = x^3 + y^3 + z^3 - 7$,

$f_2(x, y, z) = xy + yz + xz + 2$

$$\partial_Y f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_1(x,y,z) & \partial_3 f_1(x,y,z) \\ \partial_2 f_2(x,y,z) & \partial_3 f_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y^2 & 3z^2 \\ x+z & x+y \end{pmatrix}$$

$$\partial_Y f(2, -1, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \partial_Y f(2, -1, 0) = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Die implizit definierten Fkt. g, h sind in einer Umgebung von 2 definiert.

$$\partial_X f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x,y,z) \\ \partial_1 f_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ y+z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\partial_X f(2, -1, 0) = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Folgerung (10.9) liefert

$$\begin{pmatrix} g'(2) \\ h'(2) \end{pmatrix} = -\partial_y f(2,-1,0)^{-1} \circ \partial_x f(-2,1,0)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} g'(2) \\ h'(2) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$