

Kettenregel

Satz (8.13)

Seien V, V', V'' endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume und $U \subseteq V, U' \subseteq V'$ offene Teilmengen. Seien $f : U \rightarrow V'$ und $g : U' \rightarrow V''$ Abbildungen mit $f(U) \subseteq U'$. Ferner sei $a \in U$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass f in a und g in $f(a)$ differenzierbar ist. Dann ist die Abbildung $g \circ f : U \rightarrow V''$ in a differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a).$$

Vorbereitungen zum Beweis der Kettenregel

Es seien die folgenden Objekte vorgegeben.

- endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume V, W
- eine offene Teilmenge $U \subseteq V$
- eine Abbildung $f : U \rightarrow W$
- beliebige Vektoren $v \in V, w \in W$
- die Teilmenge $\tilde{U} = \{(-v) + u \mid u \in U\}$

Dann erhalten wir eine neue Abbildung $g : \tilde{U} \rightarrow W$,
 $x \mapsto f(v + x) + w$.

Lemma (8.12)

Ist $a \in U$ und f in a differenzierbar, dann ist g im Punkt $(-v) + a$ differenzierbar, und es gilt $f'(a) = g'((-v) + a)$.

Beweis von Lemma (12.8):

$f: U \rightarrow W$, $U \subseteq V$ offen, V, W $\mathbb{R}$ -Vektorräume
(endl.-dim., normiert), $g: \tilde{U} \rightarrow W$, $x \mapsto$
 $f(x+v) + w$, wobei $v \in V$, $w \in W$, $\tilde{U} = \{(-v)+x \mid x \in U\}$

Vor.: f diff'bar in $a \in U$ z.zg: g diff'bar in $(-v)+a$,
 $g'((-v)+a) = f'(a)$

f diff'bar in $a \Rightarrow \exists$ Umg. U_a des Nullpunkts und
eine Fkt. $\psi: U_a \rightarrow W$ mit

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + \psi(h), \quad \forall h \in U_a$$

$$\text{wobei } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h)}{\|h\|} = 0$$

$$g(x) = f(x+v) + w \quad \forall x \in U \rightarrow g((-v)+x) = f(x) + w$$

$$\forall x \in U \Leftrightarrow f(x) = g((-v)+x) - w \quad \forall x \in U$$

$$\text{einsetzen} \rightarrow g((-v)+a+h) - w = g((-v)+a) - w$$

$$+ f'(a)(h) + \gamma(h) \quad \forall h \in U_a, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(h)}{\|h\|} = 0$$

$$\Rightarrow g \text{ diff'bar in } (-v)+a, f'(a) = g'((-v)+a) \quad \square$$

Beweis der Kettenregel

Leider war der erste Teil des Beweises, die Rückführung auf die Situation $a = f(a) = (g \circ f)(a) = 0$, in der letzten Version an der Tafel immer noch nicht fehlerfrei. Da habe ich mich wirklich hoffnungslos verzettelt. Jetzt sollte aber alles stimmen.

- Für vorgegebenes f und g definiere die Funktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ durch $\tilde{f}(x) = f(a+x) - f(a)$, $\tilde{g}(x) = g(f(a)+x) - (g \circ f)(a)$. Dann gilt $\tilde{f}(0) = 0$ und $\tilde{g}(0) = 0$.
- Nach Lemma (8.12) ist $\tilde{f}$ an der Stelle 0 differenzierbar, und es gilt $\tilde{f}'(0) = f'(a)$. Ebenso ist $\tilde{g}$ an der Stelle 0 differenzierbar, und es gilt $\tilde{g}'(0) = g'(f(a))$.

Beweis der Kettenregel (Forts.)

- Nehmen wir an, es wurde $(\tilde{g} \circ \tilde{f})'(0) = \tilde{g}'(0) \circ \tilde{f}'(0)$ gezeigt.
Wegen

$$\begin{aligned}(\tilde{g} \circ \tilde{f})(x) &= \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(f(x+a) - f(a)) \\ &= (g \circ f)(x+a) - (g \circ f)(a)\end{aligned}$$

folgt dann

$$(g \circ f)'(a) = (\tilde{g} \circ \tilde{f})'(0) = \tilde{g}'(0) \circ \tilde{f}'(0) = g'(f(a)) \circ f'(a) \quad ,$$

wobei im ersten Schritt erneut Lemma (8.12) angewendet wurde.

- Zu zeigen ist also $(\tilde{g} \circ \tilde{f})'(0) = \tilde{g}'(0) \circ \tilde{f}'(0)$ unter der Voraussetzung, dass $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ beide im Nullpunkt differenzierbar sind. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir wieder f und g statt $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$.

Beweis der Kettenregel (Forts.)

- Auf Grund der Differenzierbarkeit von f und g im Nullpunkt gibt es Funktionen ϕ und ψ mit $f(h) = f'(0)(h) + \phi(h)$, $g(k) = g'(0)(k) + \psi(k)$ und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|h\|^{-1} \phi(h) = 0 \quad , \quad \lim_{k \rightarrow 0} \|k\|^{-1} \psi(k) = 0.$$

- Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite liefert

$$\begin{aligned} (g \circ f)(h) &= g(f'(0)(h) + \phi(h)) = \\ &g'(0)(f'(0)(h) + \phi(h)) + \psi(f'(0)(h) + \phi(h)) = \\ (g'(0) \circ f'(0))(h) + g'(0)(\phi(h)) + \psi(f'(0)(h) + \phi(h)) &= \\ (g'(0) \circ f'(0))(h) + \rho(h) \end{aligned}$$

mit dem „Fehlerterm“

$$\rho(h) = g'(0)(\phi(h)) + \psi(f'(0)(h) + \phi(h)).$$

Beweis der Kettenregel (Forts.)

- Wenn wir zeigen können, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|h\|^{-1} \rho(h) = 0$$

gilt, dann folgt daraus die Differenzierbarkeit von $g \circ f$ an der Stelle 0, mit der Ableitung $(g \circ f)'(0) = g'(0) \circ f'(0)$.

- Aus der Eigenschaft der Funktionen ϕ und ψ folgt: Es gibt im Nullpunkt stetige Funktionen ϕ_1, ψ_1 mit $\phi_1(0) = 0$, $\psi_1(0) = 0$ und $\phi(h) = \|h\|\phi_1(h)$, $\psi(k) = \|k\|\psi_1(k)$.

Beweis der Kettenregel (Forts.)

- Wir untersuchen nun die beiden Terme, aus denen ρ besteht.
- Auf Grund der Linearität von $g'(0)$ gilt
 $g'(0)(\phi(h)) = g'(0)(\|h\|\phi_1(h)) = \|h\|g'(0)(\phi_1(h))$, und diese Funktion geht für $h \rightarrow 0$ auch nach Multiplikation mit $\|h\|^{-1}$ noch gegen null, weil sowohl $g'(0)$ als auch ϕ_1 im Nullpunkt stetig sind.
- Den zweiten Term kann in der Form
 $\psi_1(f'(0)(h) + \phi(h)) \cdot \|f'(0)(h) + \phi(h)\|$ dargestellt werden. Auf Grund der Linearität von $f'(0)$ gibt es eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f'(0)(h)\| \leq \gamma\|h\|$ für alle h .
- Der **zweite Faktor** kann also durch $(\gamma + \phi_1(h))\|h\|$ abgeschätzt werden.

Beweis der Kettenregel (Forts.)

- Dadurch erhalten wir für den zweiten Term insgesamt eine Abschätzung durch $\psi_1(f'(0)(h) + \phi(h)) \cdot (\gamma + \phi_1(h)) \cdot \|h\|$. Diese Funktion läuft auch nach Multiplikation mit $\|h\|^{-1}$ noch gegen null, auf Grund der Stetigkeit der beiden Funktionen ψ_1 und $h \mapsto f'(0)(h) + \phi(h)$ im Nullpunkt und der Beschränktheit des Faktors $\gamma + \phi_1(h)$ für $h \rightarrow 0$.
- Damit ist der Nachweis von

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|h\|^{-1} \rho(h) = 0$$

abgeschlossen.

weitere Anwendung der Kettenregel:

Produktregel (in Dim. 1) für bel. Faktoren

Sei $m \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diff'bar,

$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Definiere $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

durch $h(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ Ziel:

Berechne $(F \circ h)'$ mit der Kettenregel

Lt. Kettenregel gilt $(F \circ h)'(x) = F'(h(x)) \circ h'(x)$

Die Abl. von h ist geg. $h'(x) = (f_1'(x), \dots, f_m'(x))$

außerdem: $F'(x) = (\partial_1 F(x), \dots, \partial_m F(x))$

$$\begin{aligned}
 \text{einsetzen} &\Rightarrow (F \circ h)'(x) = \\
 &(\partial_1 F(f_1(x), \dots, f_m(x)) \dots \partial_m(f_1(x), \dots, f_m(x))) \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{k=1}^m \partial_k F(f_1(x), \dots, f_m(x)) \cdot f_k'(x) \quad (*)
 \end{aligned}$$

Produktregel für drei Faktoren:

$$\text{Betrachte } F(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \Rightarrow$$

$$(F \circ h)(x) = F(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = f_1(x) f_2(x) f_3(x)$$

$$\partial_1 F(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3, \quad \partial_2 F(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3$$

$$\partial_3 F(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2$$

$$\text{Einsetzen in } (*) \Rightarrow (f_1 f_2 f_3)'(x) = (F \circ h)'(x) =$$

$$f_2(x) f_3(x) f_1'(x) + f_1(x) f_3(x) f_2'(x) + f_1(x) f_2(x) f_3'(x)$$

Umkehrregel

Satz (8.15)

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass auch $V = f(U)$ **offen** in $\mathbb{R}^n$ ist und eine Umkehrabbildung $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ von f existiert.
- Sei f in $a \in U$ differenzierbar, und es gelte $\det f'(a) \neq 0$.
- Außerdem sei g in $b = f(a)$ stetig.

Dann ist g in b differenzierbar, und es gilt $g'(b) = f'(a)^{-1}$.

Anwendungsbeispiel für die Umkehrregel.

Polarkoord.-abb. $\rho: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$(r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

bekannt: $\rho|_{\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[}$ ist Bijektion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
d.h. auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ existiert die Umkehrabb. ρ^{-1}

Seien $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$. Ziel.

Berechnung von $(\rho^{-1})'(x, y)$

Schreibe $(x, y) = \rho(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$

Setze $a = (r, \varphi)$, $b = (x, y)$

$\Rightarrow$ gilt $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$

$$\Rightarrow \text{gilt } x = r \cos(\varphi), y = r \sin(\varphi)$$

$$\text{Umkehrregel} \Rightarrow (\rho^{-1})'(b) = \rho'(a)^{-1}$$

$$\rho'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho'(a)^{-1} &= \rho'(r, \varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) & r \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{gilt } x^2 + y^2 = (r \cos(\varphi))^2 + (r \sin(\varphi))^2 = r^2$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{einsetzen} \Rightarrow$$

$$(\rho^{-1})'(x, y) = \rho'(r, \varphi)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x & y \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}$$

§9 Höhere Ableitungen und lokale Extremstellen

- Seien V, W endlich-dimensionale, normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume.
- Sei $U \subseteq V$ offen und $f : U \rightarrow W$ eine Funktion, die in jedem Punkt $x \in U$ differenzierbar ist.
- Dann kann die erste Ableitung als Funktion

$f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(V, W)$, $x \mapsto f'(x)$ betrachtet werden.

Definition (9.1)

Ist die Abbildung f' auf U stetig, dann bezeichnen wir f als **stetig differenzierbare** Funktion. Ist sie darüber hinaus in jedem Punkt $x \in U$ differenzierbar, dann sprechen wir von einer **zweimal differenzierbaren** Funktion.

Höhere Ableitungen

- Die zweite Ableitung ist eine Abbildung

$$f'' : U \rightarrow \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, W)).$$

- Ist auch diese Abbildung differenzierbar, dann nennt man f **dreimal differenzierbar**.
- Definieren wir rekursiv $\hat{\mathcal{L}}^1(V, W) = \mathcal{L}(V, W)$ und

$$\hat{\mathcal{L}}^{n+1}(V, W) = \mathcal{L}(V, \hat{\mathcal{L}}^n(V, W))$$

dann ist die n -te Ableitung eine Abbildung
 $f^{(n)} : U \rightarrow \hat{\mathcal{L}}^n(V, W).$

Die totale Ableitung als multilineare Abbildung

- Sei V^n das n -fache kartesische Produkt $V \times \dots \times V$.
- Eine Abbildung $\phi : V^n \rightarrow W$ heißt **n -fach linear** oder auch **multilinear**, wenn sie in jeder ihrer n Komponenten linear ist.
- Wir bezeichnen den $\mathbb{R}$ -Vektorraum dieser Abbildungen mit $\mathcal{L}^n(V, W)$.

Die totale Ableitung als multilineare Abbildung

Satz (9.2)

Jedem Element $\hat{\phi} \in \hat{\mathcal{L}}^n(V, W)$ kann durch die Definition

$$\phi(v_1, \dots, v_n) = \hat{\phi}(v_1)(v_2) \dots (v_n)$$

ein Element in $\mathcal{L}^n(V, W)$ zugeordnet werden, und die Abbildung $\Phi : \hat{\mathcal{L}}^n(V, W) \rightarrow \mathcal{L}^n(V, W)$, $\hat{\phi} \mapsto \phi$ ist ein **Isomorphismus** von $\mathbb{R}$ -Vektorräumen.

Somit können wir die n -te Ableitung in jedem Punkt a als **multilineare Abbildung** $f^{(n)}(a) : V^n \rightarrow W$ betrachten.

Eindimensionale Taylorpolynome

- Bereits in der Analysis einer Variablen haben wir das p -te Taylorpolynom

$$\tau_p(f, a)(x) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x - a)^k.$$

von f an der Stelle a definiert.

- Dieses Polynom ist charakterisiert durch die Eigenschaft $\tau_p(f, a)^{(k)}(x) = f^{(k)}(a)$ für $0 \leq k \leq p$. Denn k -fache Differentiation des Polynom ergibt

$$\tau_p(f, a)^{(k)}(x) = \sum_{\ell=k}^p \frac{1}{\ell!} f^{(k)}(a) \cdot k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-\ell+1) \cdot (x-a)^{k-\ell}$$

so dass jeweils

$$\tau_p(f, a)^{(k)}(a) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \cdot k! \cdot (x-a)^0 = f^{(k)}(a) \text{ gilt.}$$

Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes

Satz (9.3)

Sei $p \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ ein Punkt mit $x > a$, so dass f auf dem offenen Intervall $]a, x[$ mindestens $(p - 1)$ -mal stetig differenzierbar und p -mal differenzierbar ist. Dann gibt es einen Punkt $\xi \in]a, x[$ mit

$$f(x) = \tau_{p-1}(f, a)(x) + \frac{1}{p!} f^{(p)}(\xi)(x - a)^p.$$

Mehrdimensionale Taylorpolynome

Definition (9.4)

Sei $p \in \mathbb{N}$, $U \subseteq V$ offen, $a \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine im Punkt a p -mal differenzierbare Funktion. Dann bezeichnet man die Funktion gegeben durch

$$\tau_p(f, a)(x) = f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \underbrace{(x - a, \dots, x - a)}_{k\text{-mal}}$$

als **Taylorpolynom p -ten Grades** von f an der Stelle a .