

Definition der totalen Differenzierbarkeit

Im gesamten Abschnitt seien V, W jeweils endlich-dimensionale, normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume.

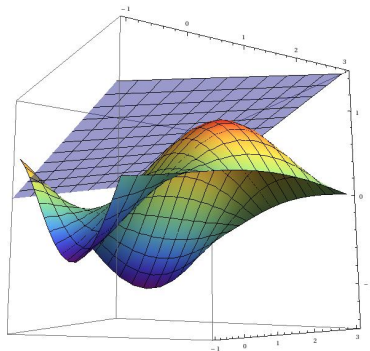
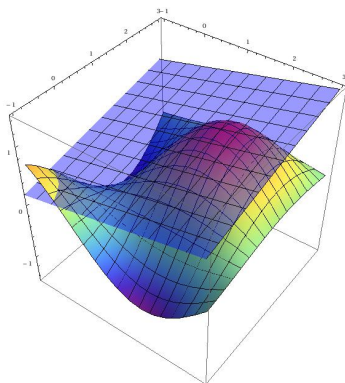
Definition (8.1)

Sei $U \subseteq V$ offen, $a \in U$ und $U_a = \{x \in V \mid a + x \in U\}$. Außerdem sei $f : U \rightarrow W$ eine Abbildung. Man sagt, die Funktion f ist im Punkt a **total differenzierbar**, wenn eine lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ und eine Funktion $\psi : U_a \rightarrow W$ existieren, so dass

$$f(a+h) = f(a) + \phi(h) + \psi(h) \text{ für alle } h \in U_a \text{ und } \lim_{h \rightarrow 0_V} \frac{\psi(h)}{\|h\|} = 0_W$$

erfüllt ist. Man nennt ϕ dann die **Ableitung** von f an der Stelle a und bezeichnet sie mit $f'(a)$.

Veranschaulichung der totalen Differenzierbarkeit



Durch die blaue Ebene wird die **affin-lineare Approximation** der Funktion dargestellt.

Zusammenhang zwischen totaler Ableitung und Richtungsableitung

Proposition (8.4)

Sei $U \subseteq V$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, und $a \in U$. Ist f im Punkt a differenzierbar, dann existiert für jedes $v \in V$ die Richtungsableitung $\partial_v f(a)$, und es gilt

$$\partial_v f(a) = f'(a)(v).$$

Rechenregel für Richtungsableitungen im total differenzierbaren Fall

Folgerung (8.5)

Ist $U \subseteq V$ offen, $a \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ in a differenzierbar, dann gilt $\partial_{v+w}f(a) = \partial_v f(a) + \partial_w f(a)$ für alle $v, w \in V$.

Die Jacobi-Matrix einer differenzierbaren Abbildung

Definition (8.6)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine in a differenzierbare Abbildung, mit Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$. Dann nennt man

$$\text{Jac}(f)(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \dots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n, \mathbb{R}}$$

die **Jacobi-** oder **Funktionalmatrix** von f an der Stelle a .

Beispiele für Jacobi-Matrizen

- Die Jacobi-Matrix von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x^2 + 7y^2 + 5y$ ist an jeder Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\text{Jac}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 4x & 14y + 5 \end{pmatrix}.$$

- Die Jacobi-Matrix von $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $(x, y, z) \mapsto (3x^2 - 5y + z, z^4 + xy)$ an jeder Stelle
 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\text{Jac}(g)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & -5 & 1 \\ y & x & 4z^3 \end{pmatrix}.$$

Bsp (i) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto z \cos(x+y)$

$$\text{Jac}(f)(x, y, z) = (-z \sin(x+y) \quad -z \sin(x+y) \cos(x+y))$$

$$(\text{Jac}(f)(x, y, z) \in \mathcal{M}_{1 \times 3, \mathbb{R}} \quad \forall x, y, z)$$

$$\text{Jac}(f)(0, 0, 0) = (0 \quad 0 \quad 1)$$

(ii) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x^2 y z, (x-1)z, 3x+5z^2)$

$$f_1(x, y, z) = x^2 y z, \quad f_2(x, y, z) = (x-1)z, \quad f_3(x, y, z) = 3x+5z^2$$

$$\text{Jac}(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy z & x^2 z & x^2 y \\ z & 0 & x-1 \\ 3 & 0 & 10z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3, \mathbb{R}}$$

Jacobi-Matrix als Darstellungsmatrix der Ableitung

Proposition (8.7)

Seien die Bezeichnungen wie in Def. (8.6) gewählt, und sei $J = \text{Jac}(f)(a)$. Dann gilt $f'(a)(v) = J \cdot v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Die Matrix J ist also die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bezüglich der Einheitsbasen.

Von nun an bezeichnen wir die Jacobi-Matrix (wie die Ableitung) mit $f'(a)$, und nicht mehr mit $\text{Jac}(f)(a)$.

Beweis von Prop (8.7).

$$\text{z.zg: } J = \text{Jac}(f)(a) = \left(\partial_j f_i(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

ist Darstellungsmatrix von $f'(a)$ bzgl. der
Einheitsbasen, gleichbedeutend: $f'(a)(e_j)$ stimmt
überein mit der j -ten Spalte von J , also mit

$$\begin{pmatrix} \partial_j f_1(a) \\ \vdots \\ \partial_j f_m(a) \end{pmatrix}$$

Vergleicht man die Komponenten der beiden
Vektoren, dann sieht man, dass das gleichbed.

$$\text{mit } \partial_j f_i(a) = f'_i(a)(e_j), \text{ f\"ur } 1 \leq i \leq m,$$

Aber dies ist ein Spezialfall der Gleichung

$$\partial_v f_i(a) = f'_i(a)(v), \text{ angewendet auf } v = e_j.$$

□

Beispiel für totale Differenzierbarkeit

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ ist total differenzierbar. Die Ableitung ist jeweils gegeben durch $f'(x, y) = (2x \ 2y)$.

Bsp: Überprüfung der totalen Diff'barkeit von
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ an der Stelle $a = (3, 4)$

$$\text{Jac}(f)(x, y) = (2x \ 2y), \quad \text{Jac}(f)(3, 4) = (6 \ 8) =: J$$

Schreibe $f(3+h_1, 4+h_2)$ in der Form

$$f(3+h_1, 4+h_2) = \underbrace{f(3, 4)} + \underbrace{J \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}} + \underbrace{\psi(h_1, h_2)}$$

„affin-lineare Näherung“ Fehlerterm

Für die totale Diff'barkeit z.zg.: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h)}{\|h\|_\infty} = 0$

$$\psi(h_1, h_2) = f(3+h_1, 4+h_2) - f(3, 4) - J \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$
$$(3+h_1)^2 + (4+h_2)^2 - 25 - (6 \ 8) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

Strecken $[z^{(n-1)}(a), z^{(n)}(a)]$ in $B_\varepsilon(a)$

$$9 + 6h_1 + h_1^2 + 16 + 8h_2 + h_2^2 - 25 - 6h_1 - 8h_2 = h_1^2 + h_2^2 \rightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h)}{\|h\|_\infty} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_\infty} (h_1^2 + h_2^2) = 0$$

denn: $0 \leq \frac{1}{\|h\|_\infty} h_1^2 \leq \frac{h_1^2}{|h_1|} = |h_1|$ Aus $h \rightarrow 0$ folgt

$|h_1| \rightarrow 0$ und somit auch $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_1^2}{\|h\|_\infty} = 0$ Genauso zeigt

man $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_2^2}{\|h\|_\infty} = 0$

stetige partielle Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ totale Differenzierbarkeit

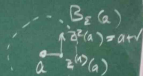
Satz (8.8)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine **partiell differenzierbare** Funktion, und sei $a \in U$ ein Punkt, in dem die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ **stetig** sind, für $1 \leq i \leq n$. Dann ist f in a differenzierbar.

Beweis von Satz (8.8).

geg.: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell diff'bar
 $a \in U$ Punkt, in dem die partiellen Ableitungen $\partial_j f(a)$
stetig sind. z.zg.: f ist in a total diff'bar

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass $B_\varepsilon(a) \subseteq U$



Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $a+v \in B_\varepsilon(a)$

definiere $z^{(k)}(v) = a + \sum_{i=1}^k v_i e_i$ ($0 \leq k \leq n$)

($\Rightarrow z^{(0)} = a, z^{(n)} = a+v$)

klar: $z^{(k)}(a) \in B_\varepsilon(a)$ für $0 \leq k \leq n$

Da $B_\varepsilon(a)$ konvex ist, liegen auch die Verbindungs-
strecken $[z^{(k-1)}(a), z^{(k)}(a)]$ in $B_\varepsilon(a)$

Mittelwertsatz für Richtungsableitungen $\rightarrow$

$\exists y_k \in [z^{(k-1)}(a), z^{(k)}(a)]$ mit $z^{(k)}(a) - z^{(k-1)}(a) = v_k e_k$

$$f(z^{(k)}(a)) - f(z^{(k-1)}(a)) = \partial_{v_k e_k} f(y_k) = v_k \partial_k f(y_k)$$

für $1 \leq k \leq n \Rightarrow$

$$f(a+v) - f(a) \stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=} \sum_{k=1}^n (f(z^{(k)}(a)) - f(z^{(k-1)}(a)))$$

$$= \sum_{k=1}^n v_k \partial_k f(y_k)$$

$$\Rightarrow f(a+v) = f(a) + \text{jac}(f)(a) \cdot v + \psi(v)$$

$$\text{mit } \psi(v) = \sum_{k=1}^n v_k \partial_k f(y_k) - \text{jac}(f)(a) \cdot v$$

$$= \sum_{k=1}^n v_k \partial_k f(y_k) - \sum_{k=1}^n v_k \partial_k f(a)$$

$$= \sum_{k=1}^n v_k (\partial_k f(y_k) - \partial_k f(a))$$

Lassen wir nun v gegen $0_{\mathbb{R}^n}$ laufen (z.B. bzgl. $\|\cdot\|_\infty$)
dann ist $\frac{v_k}{\|v\|_\infty}$ durch 1 beschränkt. Die y^k laufen
gegen a weil $\partial_k f$ stetig ist, laufen die Differenzen

$\partial_k f(y_k) - \partial_k f(a)$ gegen null also:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\varphi(v)}{\|v\|_\infty} = 0 \Rightarrow f \text{ ist in } a \text{ total diff'bar}$$

(und $\text{Jac}(f)(a)$ ist die Ableitung). $\square$

Additionsregel

Satz (8.9)

Sei $U \subseteq V$ offen, $a \in U$, und seien $f, g : U \rightarrow W$ zwei Abbildungen, die beide in $a \in U$ differenzierbar sind. Dann sind auch $f + g$ und λf für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, und es gilt

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad \text{und} \quad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

Beweis von Satz (8.9) für die Additionsregel

geg. $f, g: U \rightarrow W$, in $a \in U$ total diff'bar

$\Rightarrow \exists$ lineare Abb. $\phi_1, \phi_2: V \rightarrow W$ und Abb. ψ_1, ψ_2

$$\text{so dass } f(a+h) = f(a) + \phi_1(h) + \psi_1(h)$$

$$g(a+h) = g(a) + \phi_2(h) + \psi_2(h)$$

für hinreichend kleines h und außerdem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_1(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_2(h)}{\|h\|} = 0$$

$$\Rightarrow (f+g)(a+h) = (f+g)(a) + (\phi_1 + \phi_2)(h) + \psi_1(h) + \psi_2(h)$$

$$\text{mit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} (\psi_1(h) + \psi_2(h)) = 0 \Rightarrow f+g \text{ ist in } a \text{ total}$$

mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} (\gamma_1(h) + \gamma_2(h)) = 0 \Rightarrow f+g$ ist in a total

diff'bar, und es gilt $(f+g)'(a) = \phi_1 + \phi_2 = f'(a) + g'(a)$ $\square$

Produktregel

Satz (8.10)

Sei $U \subseteq V$ offen, $a \in U$, und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ beide in a differenzierbar. Dann ist auch die Funktion fg in a differenzierbar, und es gilt

$$(fg)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a).$$

Folgerung (8.11)

Sei $U \subseteq V$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $g(x) = f(x)^n$ für alle $x \in U$. Ist f in einem Punkt $a \in U$ differenzierbar, dann auch g , und es gilt

$$g'(a) = nf(a)^{n-1}f'(a).$$

Beweis von Satz (8.10) für die Produktregel

geg. $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$, in $a \in U$ total diff'bar

$\Rightarrow \exists$ lineare Abb. $\phi_1, \phi_2: V \rightarrow \mathbb{R}$ und Abb. ψ_1, ψ_2

so dass $f(a+h) = f(a) + \phi_1(h) + \psi_1(h)$

$g(a+h) = g(a) + \phi_2(h) + \psi_2(h)$

für hinreichend kleines h und außerdem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_1(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_2(h)}{\|h\|} = 0$$

$$\Rightarrow (fg)(a+h) = f(a+h)g(a+h) = (f(a) + \phi_1(h) + \psi_1(h)) \cdot (g(a) + \phi_2(h) + \psi_2(h)) -$$

$$= f(a)g(a) + (g(a)\phi_1(h) + f(a)\phi_2(h) + f(a)\psi_2(h) + \phi_1(h)\phi_2(h) + \phi_1(h)\psi_2(h) + \psi_1(h)g(a) + \psi_1(h)\phi_2(h) + \psi_1(h)\psi_2(h)) \Bigg\} =: A(h)$$

z.zg: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(h)}{\|h\|} = 0$ offensichtlich:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)\psi_1(h)}{\|h\|} = \dots = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_1(h)\psi_2(h)}{\|h\|} = 0$$

(alle Terme außer $\phi_1(h)\phi_2(h)$)

bekannt aus §6: ϕ_1, ϕ_2 sind stetige lin. Abb.,
d.h. es gibt Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^+$ mit
 $|\phi_1(h)| \leq \gamma_1 \|h\|$, $|\phi_2(h)| \leq \gamma_2 \|h\| \quad \forall h \in V$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{|\phi_1(h) \phi_2(h)|}{\|h\|} \leq \gamma_1 \gamma_2 \|h\|$$

Aus $h \rightarrow 0$ folgt also $\frac{|\phi_1(h) \phi_2(h)|}{\|h\|} = 0$.

Insgesamt gilt also tatsächlich $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(h)}{\|h\|} = 0$

$\Rightarrow fg$ ist in a total diff'bar, und

$$(fg)'(a) = g(a)\phi_1 + f(a)\phi_2 = g(a)f'(a) + f(a)g'(a) \quad \square$$

Vorbereitungen zum Beweis der Kettenregel

Es seien die folgenden Objekte vorgegeben.

- endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume V, W
- eine offene Teilmenge $U \subseteq V$
- eine Abbildung $f : U \rightarrow W$
- beliebige Vektoren $v \in V, w \in W$
- die Teilmenge $\tilde{U} = \{(-v) + u \mid u \in U\}$

Dann erhalten wir eine neue Abbildung $g : \tilde{U} \rightarrow W$,
 $x \mapsto f(v + x) + w$.

Lemma (8.12)

Ist $a \in U$ und f in a differenzierbar, dann ist g im Punkt $(-v) + a$ differenzierbar, und es gilt $f'(a) = g'((-v) + a)$.

Kettenregel

Satz (8.13)

Seien V, V', V'' endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume und $U \subseteq V, U' \subseteq V'$ offene Teilmengen. Seien $f : U \rightarrow V'$ und $g : U' \rightarrow V''$ Abbildungen mit $f(U) \subseteq U'$. Ferner sei $a \in U$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass f in a und g in $f(a)$ differenzierbar ist. Dann ist die Abbildung $g \circ f : U \rightarrow V''$ in a differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a).$$

Es gibt Konstanten $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{R}$ mit
 $|\phi_1(h)| \leq \chi_1 \|h\|$ $|\phi_2(h)| \leq \chi_2 \|h\| \quad \forall h \in V$

Beispiel für die Anwendung der Kettenregel.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x^3 y, 3y^2, x^2 - 3y)$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x + y + z$$

$$(g \circ f): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto g(f(x, y)) = g(x^3 y, 3y^2, x^2 - 3y)$$

$$= x^3 y + 3y^2 + x^2 - 3y \quad (g \circ f)'(x, y) = (3x^2 y + 2x \quad x^3 + 6y - 3)$$

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 y & x^3 \\ 0 & 6y \\ 2x & -3 \end{pmatrix}, \quad g'(x, y, z) = (1 \quad 1 \quad 1)$$

$$\text{Kettenregel} \Rightarrow (g \circ f)'(x, y) = g'(f(x, y)) \cdot f'(x, y)$$

$$= (1 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 3x^2 y & x^3 \\ 0 & 6y \\ 2x & -3 \end{pmatrix} = (3x^2 y + 2x \quad x^3 + 6y - 3)$$