## Mehrfache partielle Differenzierbarkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

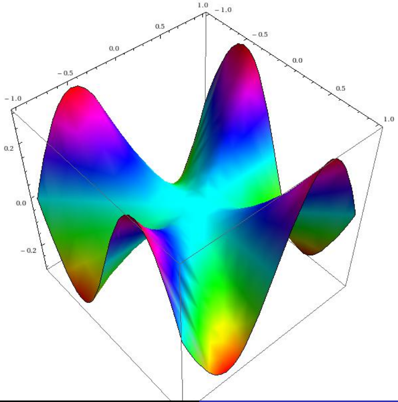
- Man bezeichnet $f$ als stetig partiell differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ für $1 \leq i \leq n$ auf $U$ existieren und stetig sind.
- Falls die Funktionen $\partial_i f$ ihrerseits alle partiell differenzierbar sind, spricht man von einer zweifach partiell differenzierbaren Funktion.
- Sind auch die Funktionen $\partial_i \partial_j f$ für $1 \leq i, j \leq n$ wieder stetig, nennt man $f$ zweifach stetig partiell differenzierbar.
- Auf naheliegende Weise definiert man $m$-fach (stetig) partiell differenzierbar für beliebige $m \geq 3$.
- An Stelle von $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_m} f$ verwendet man zur Abkürzung auch die Schreibweise $\partial_{i_1 \ldots i_m} f$.

## Beispiel 7

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dann gilt $\partial_{12} f(0,0) \neq \partial_{21} f(0,0)$.



## Mittelwertsatz für Richtungsableitungen

**Satz (7.5)**

Sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Seien $a, b \in U$ zwei verschiedene Punkte mit $[a, b] \subseteq U$ und der Eigenschaft, dass die Richtungsableitung $\partial_v f$ für $v = b - a$ auf ganz $U$ existiert. Dann gibt es ein $p \in \, ]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) \quad = \quad \partial_v f(p).$$

## Geometrische Interpretation der zweifachen Richtungsableitungen

**Lemma (7.6)**

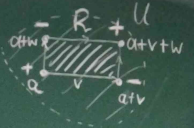
Sei $U \subseteq V$ offen. Seien $v, w \in V$, und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion mit der Eigenschaft, dass die doppelte Richtungsableitung $\partial_v \partial_w f$ auf ganz $U$ existiert. Sei außerdem $a \in U$ ein Punkt, so dass die Menge

$$R \quad = \quad \left\{ a + tv + t'w \mid t, t' \in [0,1] \right\}$$

vollständig in $U$ enthalten ist. Dann gibt es ein $p \in R$ mit

$$f(a+v+w) - f(a+v) - f(a+w) + f(a) \quad = \quad \partial_v \partial_w f(p).$$

Beweis von Lemma (7.6).




Vor.: $U \subseteq V$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ Fkt.

$a \in U$, $v, w \in V$, so dass

$$R = \{ a + \lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in [0,1] \} \subseteq U$$

Die 2-fache Richtungsableitung $\partial_v \partial_w f$ existiere auf ganz $U$.

z.zg: $\exists\, p \in R$ mit $f(a+v+w) - f(a+v) - f(a+w) + f(a) \overset{(*)}{=} \partial_v \partial_w f(p)$

<u>Ansatz</u>. Betrachte die Funktion $f_v(x) = f(x+v) - f(x)$

(Dann ist die linke Seite der Gl. (*) geg. durch

$f_v(a+w) - f_v(a)$.)

Bestimme zunächst einen Definitionsbereich für $f_v$.

Sei $\tau_v : V \to V$, $x \mapsto x + v$. Für jedes $x \in V$ gilt die

Aquivalenz $(x+v\in U)\wedge(x\in U) \iff (\tau_v(x)\in U)\wedge(x\in U)$

$\iff x\in \tau_v^{-1}(U)\cap U$ Setze $U_v := \tau_v^{-1}(U)\cap U$

Dann ist $f_v(x) = f(x+v)-f(x)$ auf $U_v$ definiert, und außerdem ist $U_v$ offen (denn: $U$ offen, $\tau_v$ stetig $\Rightarrow \tau_v^{-1}(U)$ offen $\Rightarrow$ $U_v$ ist offen als Durchschnitt zweier offener Teilmengen von $V$)

<u>Beh.</u>: $\partial_w f_v(x) = \partial_w f(x+v) - \partial_w f(x)$ $\forall x\in U$

linke Seite: Definiere $\phi: \mathbb{R}\to V$, $t\mapsto x+tw$

Dann gilt $\partial_w f_v(x) = (f_v\circ\phi)'(0)$ nach Def. der Richtungsableitung.

rechte Seite: Definiere $\phi_v: \mathbb{R}\to V$, $t\mapsto x+v+tw$

$(\Rightarrow \phi_v = \tau_v\circ\phi)$

Dann gilt $(f\circ\phi_v)'(0) - (f\circ\phi)'(0) = \partial_w f(x+v) - \partial_w f(x)$

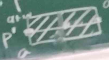
zzg also: $(f_v\circ\phi)'(0) = (f\circ\phi_v)'(0) - (f\circ\phi)'(0)$

Dies ist erfüllt, denn für alle $t\in\mathbb{R}$ mit $|t|$ hinreichend klein gilt $(f\circ\phi_v)(t) - (f\circ\phi)(t) = f(\phi_v(t)) - f(\phi(t)) =$

$f(x+v+tw) - f(x+tw) = f_v(x+tw) = (f_v\circ\phi)(t)$

($\Rightarrow$ Beh.) Aus dem Satz (7.5) folgt die Existenz eines Punktes $p'\in[a,a+w]$ mit $f(a+v+w) - f(a+v) - f(a+w)$ $+ f(a) = f_v(a+w) - f_v(a) = \partial_w f_v(p') \overset{\text{z Beh}}{=}$ $\partial_w f(p'+v) - \partial_w f(p')$ Satz (7.5) $\Rightarrow \exists p \in$ $[p', p'+v]$ mit $\partial_w f(p'+v) - \partial_w f(p') = \partial_v\partial_w f(p)$ $\square$

$a+v+w$



## Satz von Schwarz

### Satz (7.7)

Sei $U \subseteq V$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, und seien $0 \neq v, w \in V$ derart, dass die zweifachen Richtungsableitungen $\partial_v \partial_w f$ und $\partial_w \partial_v f$ auf $U$ existieren und stetig sind. Dann gilt

$$\partial_v \partial_w f = \partial_w \partial_v f$$

auf ganz $U$.

Beweis des Satzes (7.7) von Schwarz.

$U \subseteq V$ offen, $f : U \to V$, $v, w \in V$, so dass

$\partial_v \partial_w f$ und $\partial_w \partial_v f$ auf $U$ existieren und stetig sind

Sei $a \in U$ z.zg. $\partial_v \partial_w f(a) = \partial_w \partial_v f(a)$

OBdA. $v, w \neq 0$ Seien $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}^+$,

so dass $Q_n = \{a + tv + uw \mid t \in [0, \alpha_n], u \in [0, \beta_n]\}$

jeweils in $U$ liegt und $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \lim\limits_{n \to \infty} \beta_n = 0$

Satz (7.6) $\Rightarrow$ $\exists$ Punkte $p_n, q_n \in Q_n$ mit

$$\partial_{\alpha_n v} \partial_{\beta_n w} f(p_n) = f(a + \alpha_n v + \beta_n w) - f(a + \alpha_n v) - f(a + \beta_n w) + f(a) = \partial_{\beta_n w} \partial_{\alpha_n v} f(q_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\ldots = f(a+\alpha_n v+\beta_n w) - f(a+\alpha_n v) - f(a+\beta_n w)$

Wegen $p_n, q_n \in Q_n$, $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0$ gilt

$\lim p_n = \lim q_n = a$ Stetigkeit $\Longrightarrow$

$$\partial_v \partial_w f(a) = \lim_{n\to\infty} \partial_v \partial_w f(p_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n \beta_n} \partial_{\alpha_n v} \partial_{\beta_n w} f(p_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n \beta_n} \partial_{\beta_n w} \partial_{\alpha_n v} f(q_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \partial_w \partial_v f(q_n) = \partial_w \partial_v f(a) \qquad \square$$

## § 8. Totale Differenzierbarkeit

In der Analysis einer Variablen haben wir gesehen, dass sich die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in I$ dadurch charakterisieren lässt, dass sich $h \mapsto f(a+h)$ für kleines $h$ durch eine affin-lineare Funktion der Form $h \mapsto f(a) + f'(a)h$ approximieren lässt.

Dies bedeutet, dass eine Darstellung von $f$ der Form

$$f(a+h) \quad = \quad f(a) + f'(a)h + \psi(h)$$

existiert, mit einer Funktion $\psi$, die für $h \to 0$ sehr schnell gegen Null geht.

## Definition der totalen Differenzierbarkeit

Im gesamten Abschnitt seien $V, W$ jeweils endlich-dimensionale, normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume.

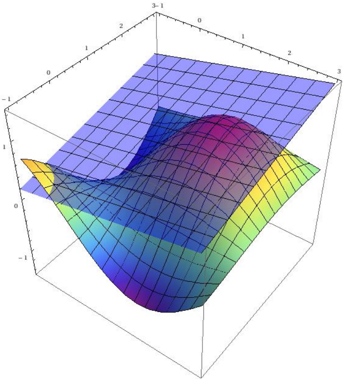
### Definition (8.1)

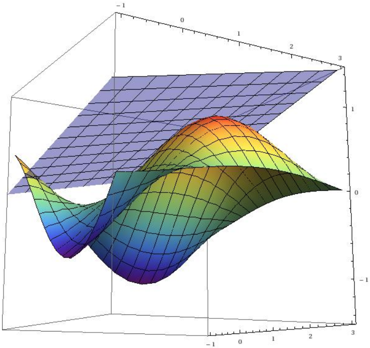
Sei $U \subseteq V$ offen, $a \in U$ und $U_a = \{x \in V \mid a + x \in U\}$. Außerdem sei $f : U \to W$ eine Abbildung. Man sagt, die Funktion $f$ ist im Punkt $a$ total differenzierbar, wenn eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ und eine Funktion $\psi : U_a \to W$ existieren, so dass

$$f(a+h) = f(a)+\phi(h)+\psi(h) \text{ für alle } h \in U_a \text{ und } \lim_{h \to 0_V} \frac{\psi(h)}{\|h\|} = 0_W$$

erfüllt ist. Man nennt $\phi$ dann die Ableitung von $f$ an der Stelle $a$ und bezeichnet sie mit $f'(a)$.

# Veranschaulichung der totalen Differenzierbarkeit





Durch die blaue Ebene wird die affin-lineare Approximation der Funktion dargestellt.

## Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, ist die Voraussetzungen der partiellen Differenzierbarkeit zu schwach, um die Stetigkeit der Funktion sicherzustellen. Für die totale Differenzierbarkeit aber gilt

**Proposition (8.2)**

Sei $f : U \to W$ eine Abbildung auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq V$, und $a \in U$ ein beliebiger Punkt. Ist $f$ in $a$ differenzierbar, dann ist $f$ auch in $a$ stetig.

Beweis von Prop (8.2).

$f: U \to W$ ($U \subseteq V$ offen, $V, W$ endl.-dim normierte Vektorräume), $a \in U$ $f$ ist in $a$ diff'bar

$\Rightarrow$ Es gibt eine Nullumgebung $U_a \subseteq V$ und eine lineare Abb. $\phi: V \to W$, so dass

$$\forall h \in U_a: \; f(a+h) = f(a) + \phi(h) + \psi(h),$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\psi(h)}{\|h\|} = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} f(a+h) =$$

$$f(a) + \lim_{h \to 0} \phi(h) + \lim_{h \to 0} \frac{\psi(h)}{\|h\|} \cdot \|h\| =$$

$$f(a) + \phi(0) + 0 \cdot 0 = f(a) \Rightarrow f \text{ stetig in } a. \qquad \square$$

## Rückführung der totalen Differenzierbarkeit auf reellwertige Funktionen

**Proposition (8.3)**

Sei $W = \mathbb{R}^m$, $U \subseteq V$ offen und $a \in U$. Eine Abbildung $f : U \to W$ ist genau dann in $a$ differenzierbar, wenn die Komponentenfunktionen $f_i : U \to \mathbb{R}$ in $a$ differenzierbar sind, für $1 \leq i \leq m$.
Die Komponentenfunktionen der Ableitung $f'(a)$ sind dann die Ableitungen $f_1'(a), ..., f_m'(a)$.

Beweis von Prop. (8.3):

geg. $U \subseteq V$ offen, $V$ endl.-dim. normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum

$a \in U$, $f: U \to \mathbb{R}^m$, $f_i: U \to \mathbb{R}$ $(1 \le i \le m)$

z. zg.: $f$ diff'bar in $a$ mit Ableitung $\phi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^m)$ $\Leftrightarrow$ $f_1, \dots, f_m$ diff'bar in $a$, mit Ableitungen $\phi_i \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ $(1 \le i \le m)$

Für geg. $f$ und $\phi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ setze

$\psi(h) = f(a+h) - f(a) - \phi(h)$ $\forall h$ in einer hinr. kleinen Umg. von $0$. Dann sind die Komponenten von $\psi$ geg. durch $\psi_i(h) = f_i(a+h) - f_i(a) - \phi_i(h)$

Da die Konvergenz gegen Null komponentenweise überprüft werden kann (siehe § 4), gilt $\lim_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{\|h\|} = 0$ genau dann, wenn $\lim_{h\to 0} \frac{\psi_i(h)}{\|h\|} = 0$ für $1 \leq i \leq m$ erfüllt ist.

„$\Rightarrow$" $f$ diff'bar in $a$, $f'(a) = \phi$ $\Rightarrow$ Für $\psi$ wie oben gilt $\lim_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{\|h\|} = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\psi_i(h)}{\|h\|} = 0$ für $1 \leq i \leq m$ $\Rightarrow$ $f_i$ in $a$ diff'bar, mit $f_i'(a) = \phi_i$ $\square$

„$\Leftarrow$" analog

## Zusammenhang zwischen totaler Ableitung und Richtungsableitung

**Proposition (8.4)**

Sei $U \subseteq V$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion, und $a \in U$. Ist $f$ im Punkt $a$ differenzierbar, dann existiert für jedes $v \in V$ die Richtungsableitung $\partial_v f(a)$, und es gilt

$$\partial_v f(a) \quad = \quad f'(a)(v).$$

## Rechenregel für Richtungsableitungen im total differenzierbaren Fall

**Folgerung (8.5)**

Ist $U \subseteq V$ offen, $a \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ in $a$ differenzierbar, dann gilt $\partial_{v+w} f(a) = \partial_v f(a) + \partial_w f(a)$ für alle $v, w \in V$.

Mit $t \to 0$ geht $tv$ …

Beweis von Folgerung (8.5):

$$\partial_{v+w} f(a) \overset{(8.4)}{=} f'(a)(v+w) \underset{\text{linear}}{\overset{f'(a): V \to \mathbb{R}}{=}} f'(a)(v) + f'(a)(w) \overset{(8.4)}{=} \partial_v f(a) + \partial_w f(a)$$

Beweis von Satz (8.4):

$U \subseteq V$ offen, $a \in U$, $f: U \to \mathbb{R}$ diff'bar in $a$

$v \in V$ z.zg.: $\partial_v f(a) = f'(a)(v)$

Betrachte die Hilfsfkt. $\phi: \mathbb{R} \to V$, $t \mapsto a + tv$.

Wähle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so klein, dass $\phi(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subseteq U$.

$\Rightarrow$ erhalte $f \circ \phi: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to \mathbb{R}$

z. zg: $f \circ \phi$ diff'bar in $0$, $(f \circ \phi)'(0) = f'(a)(v)$

Nach Def gilt $(f \circ \phi)'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}\big((f \circ \phi)(t) - (f \circ \phi)(0)\big)$

$f$ total diff'bar $\rightarrow$ $f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + \psi(h)$

mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\psi(h)}{\|h\|} = 0$

$\Rightarrow$ Für jedes $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $|t| < \varepsilon$ gilt

$$\frac{1}{t}\big((f \circ \phi)(t) - (f \circ \phi)(0)\big) = \frac{1}{t}\big(f(a+tv) - f(a)\big) =$$

$$\frac{1}{t}\big(f(a) + f'(a)(tv) + \psi(tv) - f(a)\big) =$$

$$\frac{1}{t}\big(t f'(a)(v) + \psi(tv)\big) = f'(a)(v) + \frac{1}{t}\psi(tv)$$

Mit $t \to 0$ geht $tv \to 0$. OBdA sei $v \neq 0$.

Mit $t \to 0$ geht $tv \to 0$. OBdA sei $v \neq 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{\|h\|} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\psi(tv)}{\|tv\|} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to 0} \|v\|^{-1} \frac{\psi(tv)}{t} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\psi(tv)}{t} = 0$$

einsetzen $\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big( (f\circ\phi)(t) - (f\circ\phi)(0) \big) = f'(a)(v)$

$\Rightarrow$ $f\circ\phi$ ist in 0 diff'bar, die Ableitung ist gleich $f'(a)(v)$ $\square$