

§ 7. Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen

Voraussetzungen:

- V endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum
- $U \subseteq V$ offene Teilmenge
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $a \in U$, $v \in V$
- $\phi : \mathbb{R} \rightarrow V$ gegeben durch $\phi(t) = a + tv$

Dann ist die Komposition $f \circ \phi$ eine Abbildung $I \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge mit $0 \in I$ bezeichnet.

Definition (7.1)

Ist die Funktion $f \circ \phi$ im Punkt 0 differenzierbar, dann nennt man die Ableitung $\partial_v f(a) = (f \circ \phi)'(0)$ die **Richtungsableitung** von f im Punkt a in Richtung v .

Interpretation: Der Wert $\partial_v f(a)$ gibt die **Steigung** der Funktion im Punkt a an, wenn dieser Punkt in Richtung v durchlaufen wird.

Definition und Berechnung der partiellen Ableitungen

Definition (7.3)

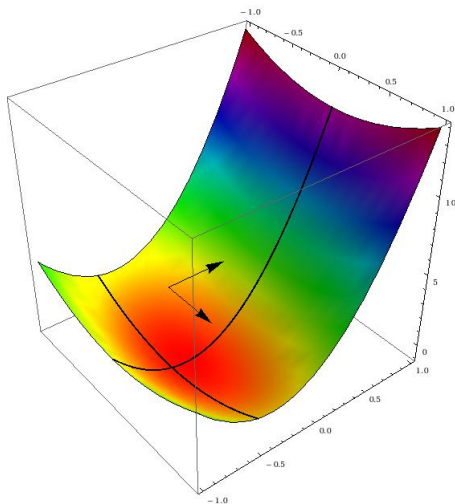
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. Die Richtungsableitung von f im Punkt a bezüglich des k -ten Einheitsvektors e_k wird die k -te partielle Ableitung $\partial_k f(a)$ von f im Punkt a genannt.

Ist $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ ein Punkt des Definitionsbereichs, dann ist $\partial_k f(a)$ die Ableitung von $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n)$ im Punkt a_k .

Um die k -te partielle Ableitung einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ zu berechnen, betrachtet man f als nur von x_k abhängige Funktion und leitet diese ab. Die übrigen Variablen x_ℓ mit $\ell \neq k$ werden als Konstanten betrachtet.

Geometrische Bedeutung der partiellen Ableitungen

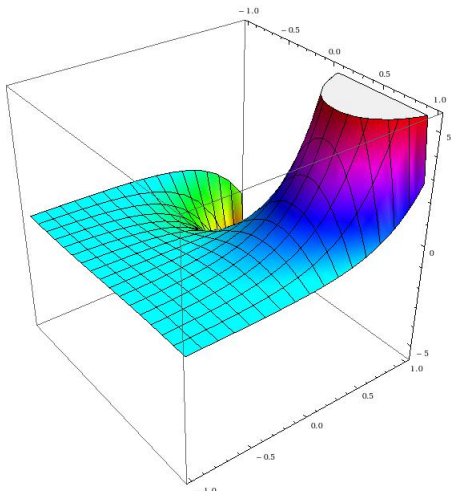
Die partiellen Ableitungen geben die Steigung einer Funktion in x - und y -Richtung an.



Beispiel 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \sin(2x)e^{3y}$. Dann sind die partiellen Ableitungen von f gegeben durch

$$\partial_1 f(x, y) = 2 \cos(2x)e^{3y} \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x, y) = 3 \sin(2x)e^{3y}.$$



Rechenregeln für Richtungsableitungen

Lemma (7.4)

Sei $U \subseteq V$ offen. Sei $v \in V$, und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen.

- (i) Ist f konstant, dann gilt $\partial_v f(x) = 0$ für alle $x \in U$.
- (ii) Ist $x \in U$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass die Richtungsableitungen $\partial_v f(x)$ und $\partial_v g(x)$ existieren, dann existiert auch $\partial_v(f + g)(x)$ und $\partial_v(fg)(x)$, und es gilt $\partial_v(f + g)(x) = \partial_v f(x) + \partial_v g(x)$ und
$$\partial_v(fg)(x) = f(x)\partial_v g(x) + g(x)\partial_v f(x).$$
- (iii) Existiert $\partial_v f(x)$ im Punkt $x \in U$, dann existiert auch $\partial_{cv} f(x)$ für alle $c \in \mathbb{R}$, und es gilt $\partial_{cv} f = c \partial_v f$.

Beweis von Prop. (7.4).

V endl.-dim. normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum, $U \subseteq V$ offen,
 $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in U$, $v \in V$

Sei $\phi: \mathbb{R} \rightarrow V$, $t \mapsto x + tv$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ so definiert,
dass $\phi([-\varepsilon, \varepsilon]) \subseteq U$. $\leadsto$ erhalte $f \circ \phi:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$

Noch Def. gilt $\partial_v f(x) = (f \circ \phi)'(0)$ und

$$\partial_v g(x) = (g \circ \phi)'(0).$$

zu li) f konstant $\rightarrow f \circ \phi$ konstant $\Rightarrow$

$$\partial_v f(x) = (f \circ \phi)'(0) = 0$$

zu lii) $\Rightarrow$ gilt $((f+g) \circ \phi)(t) = (f+g)(\phi(t)) =$

$$f(\phi(t)) + g(\phi(t)) = (f \circ \phi)(t) + (g \circ \phi)(t) \Rightarrow \partial_v (f + g)(x) = \\
= ((f + g) \circ \phi)'(0) = (f \circ \phi)'(0) + (g \circ \phi)'(0) = \\
= \partial_v f(x) + \partial_v g(x)$$

ebenfalls $((fg) \circ \phi)(t) = (fg)(\phi(t)) = f(\phi(t))g(\phi(t)) \\
= (f \circ \phi)(t) \cdot (g \circ \phi)(t)$

$$\partial_v (fg)(x) = ((fg) \circ \phi)'(0) = ((f \circ \phi)(g \circ \phi))'(0) \\
= (f \circ \phi)'(0) \cdot (g \circ \phi)(0) + (f \circ \phi)(0) \cdot (g \circ \phi)'(0)$$

Δ Produktregel

Analysis I

$$= \partial_v f(x) g(x) + f(x) \partial_v g(x)$$

zu (vi) z.zg. $\partial_{cv} f(x) = c \partial_v f(x) \quad (c \in \mathbb{R})$

Nach Def. gilt $\partial_{cv} f(x) = (f \circ \phi_c)'(0)$ mit

$$\phi_c(t) = x + t \cdot v \quad \text{Sei } \pi_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto ct$$

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt } (f \circ \phi_c)(t) &= f(x + (ct) \cdot v) = (f \circ \phi)(ct) \\ &= (f \circ \phi \circ \pi_c)(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

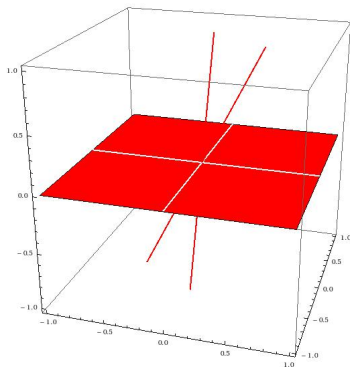
$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_{cv} f(x) &= (f \circ \phi_c)'(0) = (f \circ \phi \circ \pi_c)'(0) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \\ &= \pi_c'(0) (f \circ \phi)'(\pi_c(0)) = c (f \circ \phi)'(0) = c \partial_v f(x) \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 4

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x & \text{für } y = 0 \\ 3y & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\partial_1 f(0, 0) = 2$, $\partial_2 f(0, 0) = 3$, aber für $v \notin \text{lin}(e_1) \cup \text{lin}(e_2)$ ist $\partial_v f(0, 0) = 0$.



zu Beispiel 4 Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} 2x & \text{falls } y=0 \\ 3y & \text{falls } x=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Wir berechnen $\partial_{(1,0)} f(0,0)$, $\partial_{(0,1)} f(0,0)$, $\partial_{(1,1)} f(0,0)$

Vorwende dazu die Hilfsfkt. $\phi_1(t) = t(1,0)$, $\phi_2(t) = t(0,1)$,
 $\phi_3(t) = t(1,1)$

(1) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $(f \circ \phi_1)(t) = f(t,0) = 2t$
 $\Rightarrow \partial_{(1,0)} f(0,0) = (f \circ \phi_1)'(0) = 2$

(2) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $(f \circ \phi_2)(t) = f(0,t) = 3t$
 $\Rightarrow \partial_{(0,1)} f(0,0) = (f \circ \phi_2)'(0) = 3$
Fallunterscheidung
 $t=0, t \neq 0$
 $\downarrow$
 0

(3) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $(f \circ \phi_3)(t) = f(t,t) = 0$
 $\Rightarrow \partial_{(1,1)} f(0,0) = (f \circ \phi_3)'(0) = 0$

Beispiel 5

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^6} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann existiert $\partial_v f(0, 0)$ für jedes $v \in \mathbb{R}^2$, aber f ist in $(0, 0)$ unstetig.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^6} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(1) f ist unstetig in $(0, 0)$:

Betrachte die Folge $\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^6} = \frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{2}{n^6}} = \frac{1}{2} \frac{n^6}{n^5} = \frac{1}{2} n$$

Es gilt somit $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) = +\infty$ und nicht

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) = 0 = f(0, 0)$$

Existenz der Richtungsableitungen. Sei $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{und } \phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } (f \circ \phi)(t) &= f(ta, tb) = \frac{(ta)(tb)^2}{(ta)^2 + (tb)^6} = \frac{t^3 a b^2}{t^2(a^2 + t^4 b^6)} \\ &= \frac{t a b^2}{a^2 + t^4 b^6} \text{ falls } t \neq 0 \text{ und } a \neq 0 \end{aligned}$$

Aufgrund der Fallunterscheidung gilt die Gleichung auch für $t=0$, also für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (f \circ \phi)'(t) = \frac{a b^2(a^2 + t^4 b^6) - t a b^2(4 b^6 t^3)}{(a^2 + t^4 b^6)^2}$$

$$\Rightarrow \partial_{(a,b)} f(0,0) = (f \circ \phi)'(0) = \frac{a^3 b^2}{(a^2)^2} = a^{-1} b^2 \text{ für } a \neq 0$$

Betrachte nun den Fall $a=0, b \neq 0$.

$$\Rightarrow (f \circ \phi)(t) = f(0, tb) = 0 \text{ für } t \neq 0 \text{ und } t=0$$

$$\Rightarrow \partial_{(a,b)} f(0,0) = (f \circ \phi)'(0) = 0$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^6} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Fall $a = b = 0$: $(f \circ \phi)(t) = f(0, 0) = 0$
 für alle $t \in \mathbb{R} \Rightarrow \partial_{(0,0)} f(0, 0) = 0$

□

Mehrfache partielle Differenzierbarkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- Man bezeichnet f als **stetig partiell differenzierbar**, wenn die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ für $1 \leq i \leq n$ auf U existieren und stetig sind.
- Falls die Funktionen $\partial_i f$ ihrerseits alle partiell differenzierbar sind, spricht man von einer **zweifach partiell differenzierbaren** Funktion.
- Sind auch die Funktionen $\partial_i \partial_j f$ für $1 \leq i, j \leq n$ wieder stetig, nennt man f **zweifach stetig partiell differenzierbar**.
- Auf naheliegende Weise definiert man m -fach (stetig) partiell differenzierbar für beliebige $m \geq 3$.
- An Stelle von $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_m} f$ verwendet man zur Abkürzung auch die Schreibweise $\partial_{i_1 \dots i_m} f$.

Beispiel 6

Wir betrachten wieder die Funktion $f(x, y) = \sin(2x)e^{3y}$ mit den beiden partiellen Ableitungen $\partial_1 f(x, y) = 2 \cos(2x)e^{3y}$ und $\partial_2 f(x, y) = 3 \sin(2x)e^{3y}$. Beide partiellen Ableitungen sind erneut partiell differenzierbar. Es gilt

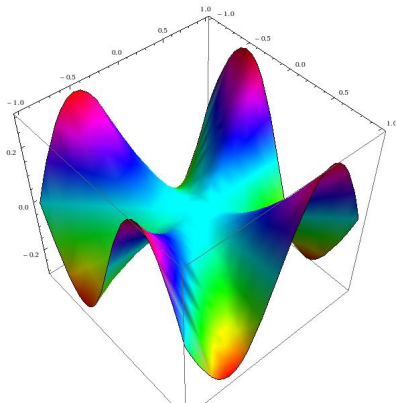
- $\partial_{11} f(x, y) = -4 \sin(2x)e^{3y},$
- $\partial_{12} f(x, y) = 6 \cos(2x)e^{3y}$
- $\partial_{21} f(x, y) = 6 \cos(2x)e^{3y}$
- $\partial_{22} f(x, y) = 9 \sin(2x)e^{3y}.$

Beispiel 7

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dann gilt $\partial_{12}f(0, 0) \neq \partial_{21}f(0, 0)$.



Beispiel 7.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

wichtig: Für die Berechnung von Richtungsableitungen ist nur relevant, wie die Funktion in einer kleinen Umgebung des Punktes aussieht

Ist $(x,y) \neq (0,0)$, dann ist f in einer Umg. (nämlich $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) durch $f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}$ geg., und somit können $\partial_1 f, \partial_2 f$ durch die üblichen Ableitungsregeln bestimmt werden.

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ ebenso}$$

$$\partial_z f(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

Berechnung von $\partial_1 f(0, 0)$, $\partial_2 f(0, 0)$.

Definiere $\phi_1(t) = (t, 0)$, $\phi_2(t) = (0, t)$

$$\Rightarrow (\phi_1 \circ \phi_1)(t) = f(t, 0) = 0$$

$\hookrightarrow$ für $t \neq 0$ und $t = 0$

$$\Rightarrow \partial_1 f(0, 0) = (\phi_1 \circ \phi_1)'(0) = 0$$

$$\text{ebenso } (\phi_2 \circ \phi_2)(t) = f(0, t) = 0 \Rightarrow \partial_2 f(0, 0) = 0$$

$$\text{zusammen: } \partial_1 f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\partial_2 f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

... auf 10.11 mit Hilfe von Funktion Mittelwertsatz

$$\partial_z f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Berechnung von $\partial_{21} f(0,0)$:

$$(\partial_1 f \circ \phi_2)(t) = \partial_1 f(0,t) = \frac{(-t^5)}{t^4} = -t$$

↗ Für $t \neq 0$ und $t=0$ richtig.

$$\Rightarrow (\partial_{21} f)(0,0) = (\partial_1 f \circ \phi)'(0) = -1$$

Berechnung von $\partial_{12} f(0,0)$:

$$(\partial_z f \circ \phi_1)(t) = \partial_z f(t,0) = \frac{t^5}{(t^2)^2} = t$$

← Für $t=0$ und $t \neq 0$ korrekt.

$$\Rightarrow (\partial_{12} f)(0,0) = (\partial_z f \circ \phi_1)'(0) = 1$$

Mittelwertsatz für Richtungsableitungen

Satz (7.5)

Sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Seien $a, b \in U$ zwei verschiedene Punkte mit $[a, b] \subseteq U$ und der Eigenschaft, dass die Richtungsableitung $\partial_v f$ für $v = b - a$ auf ganz U existiert. Dann gibt es ein $p \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = \partial_v f(p).$$

Beweis des Mittelwertsatzes für Richtungsableitungen:

$$\exists p \in]a, b[: \partial_v f(p) = f(b) - f(a), \quad v = b - a$$

$$\text{Sei } \phi: \mathbb{R} \rightarrow V, \quad t \mapsto (1-t)a + tb = a + tv$$

$$\text{Lemma (7.2)} \Rightarrow \partial_v f(a+tv) = (f \circ \phi)'(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

mit $\phi(t) \in U$. beachte: $f \circ \phi$ ist eine auf $[0,1]$

stetige, auf $]0,1[$ diff'bare Funktion Mittelwertsatz

$$(\text{Analysis I}) \Rightarrow (f \circ \phi)(1) - (f \circ \phi)(0) = (f \circ \phi)'(t_0) (1-0)$$

$$= (f \circ \phi)'(t_0) \text{ für ein } t_0 \in]0,1[\text{ Setze } p = (1-t_0)a + t_0 b$$

$$= \phi(t_0) \Rightarrow \partial_v f(p) = (f \circ \phi)'(t_0), \quad (f \circ \phi)(1) = f(b),$$

$$(f \circ \phi)(0) = f(a) \Rightarrow f(b) - f(a) = \partial_v f(p). \quad \square$$