§ 6. Zusammenhang

Definition (6.1)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ wird zusammenhängend genannt, wenn es keine disjunkten, nichtleeren, und in A relativ offenen Mengen $U, V \subseteq A$ mit $A = U \cup V$ gibt.

Wir bezeichnen den metrischen Raum (X, d_X) selbst als zusammenhängend, wenn die Teilmenge $A = X$ zusammenhängend ist.

Wegzusammenhang

Definition (6.6)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt wegzusammenhängend, wenn für beliebige Punkte $a, b \in A$ jeweils eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to A$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$ existiert. Man bezeichnet γ als Weg, der die Punkte a und b verbindet.

Konvexität

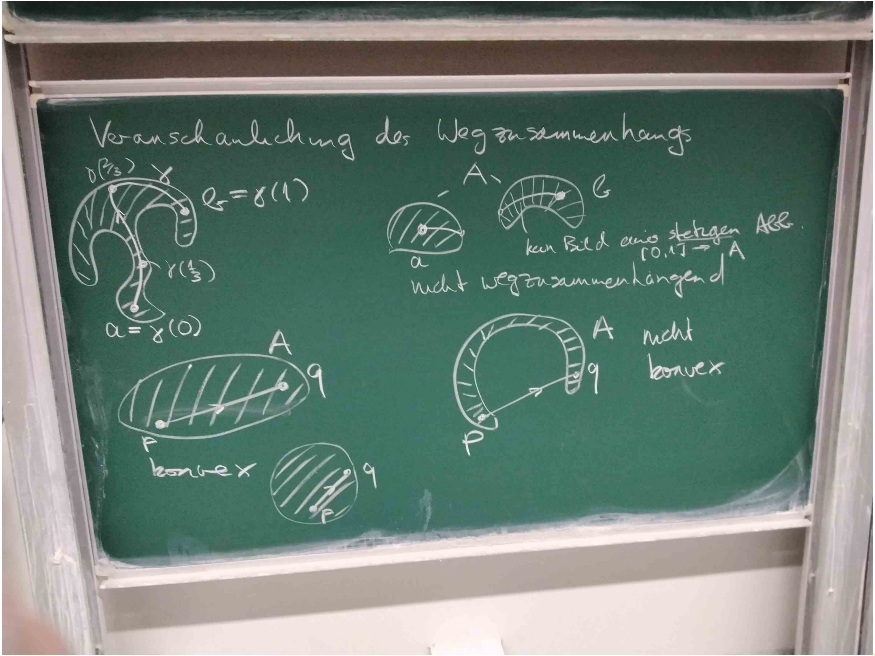
Definition (6.7)

Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien $p, q \in V$. Dann ist die Verbindungsstrecke zwischen p und q die Menge $[p, q] = \{(1-t)p + tq \mid t \in [0,1]\}$. Eine Teilmenge $A \subseteq V$ wird konvex genannt, wenn für alle $p, q \in A$ jeweils $[p, q] \subseteq A$ gilt.

Jede konvexe Teilmenge ist wegzusammenhängend.

Proposition (6.8)

Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann ist jeder offene und jeder abgeschlossene Ball in V konvex.


Veranschaulichung des Wegzusammenhangs
γ(2/3)
γ
b = γ(1)
γ(1/3)
a = γ(0)
A
p
q
konvex
q
p
A
b
a
kein Bild einer stetigen Abb.
[0,1] → A
nicht wegzusammenhängend
A
nicht
konvex
q
p

$[0,1]$ nicht zusammenhängend ↯ (Alle Intervalle in $\mathbb{R}$ sind zusammenhängend.) $\square$

Beweis von Prop. (6.8):

V normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum $a \in V$, $r \in \mathbb{R}^+$

zu zeigen: (i) $\bar{B}_r(a)$ konvex (ii) $B_r(a)$ konvex

zu (i) Seien $p, q \in \bar{B}_r(a) \Rightarrow \|p-a\| \leq r$, $\|q-a\| \leq r$

z.zg.: $[p,q] = \{(1-t)p + tq \mid t \in [0,1]\} \subseteq \bar{B}_r(a)$

Sei $t \in [0,1]$ $\|(1-t)p + tq - a\| \leq$

$\|(1-t)p - (1-t)a + tq - ta\| \leq \|(1-t)p - (1-t)a\| +$

$\|tq - ta\| \leq (1-t)\underbrace{\|p-a\|}_{\leq r} + t\underbrace{\|q-a\|}_{\leq r} \leq (1-t)r + tr = r$

$\Rightarrow (1-t)p + tq \in \bar{B}_r(a)$

zu (ii) ersetze „$\leq r$" durch „$< r$". $\square$

Wegzusammenhang impliziert Zusammenhang

Proposition (6.9)

Jeder wegzusammenhängende Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raums (X, d_X) ist zusammenhängend.

Es gibt Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, die zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend sind.

Beweis von Prop. (6.9)

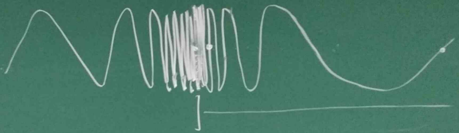
geg.: (X, d) metrischer Raum, $A \subseteq X$ wegzusammenhängend

Ang. A nicht zusammenhängend $\Rightarrow \exists$ offene Teilmengen $U, V \subseteq X$, so dass $U \cap A,\ V \cap A \neq \emptyset$, $A \subseteq U \cup V$, $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$. Sei $a \in U \cap A$, $b \in V \cap A$.

A wegzusammenhängend $\Rightarrow \exists\ \gamma : [0,1] \to A$ stetig mit $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ $\Rightarrow [0,1] = \gamma^{-1}(U \cap A) \cup \gamma^{-1}(V \cap A)$ ist eine Zerlegung in nichtleere offene Teilmengen $\Rightarrow$ $[0,1]$ nicht zusammenhängend $\lightning$ (Alle Intervalle in $\mathbb{R}$ sind zusammenhängend.) $\square$

Beispiel für eine zusammenhängende, nicht wegzusammenhängende Menge.

$$\Gamma = \{ (x, \sin(\tfrac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \} \cup \{ (0,0) \}$$



§ 7. Partielle Ableitungen und Richtungsableitungen

Voraussetzungen:

- V endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum
- $U \subseteq V$ offene Teilmenge
- $f : U \to \mathbb{R}$ Funktion, $a \in U$, $v \in V$
- $\phi : \mathbb{R} \to V$ gegeben durch $\phi(t) = a + tv$

Dann ist die Komposition $f \circ \phi$ eine Abbildung $I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge mit $0 \in I$ bezeichnet.

Definition (7.1)

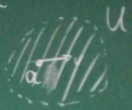
Ist die Funktion $f \circ \phi$ im Punkt 0 differenzierbar, dann nennt man die Ableitung $\partial_v f(a) = (f \circ \phi)'(0)$ die Richtungsableitung von f im Punkt a in Richtung v.

Interpretation: Der Wert $\partial_v f(a)$ gibt die Steigung der Funktion im Punkt a an, wenn dieser Punkt in Richtung v durchlaufen wird.

V endlich-dim. normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum

$U \subseteq V$ offene Teilmenge, $f: U \to \mathbb{R}$

$p \in U$, $v \in V$



Betrachte die Abbildung $\phi: \mathbb{R} \to V$,

$t \mapsto a + tv \Rightarrow \phi(0) = a$

$t \mapsto (f \circ \phi)(t) = f(p + tv)$

$\Rightarrow$ erhalte durch

eine Abbildung $I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ offen

Beispiele für Richtungsableitungen:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 3x^2 + 5xy - 7y$

$a = (1,1)$

(i) Berechnung von $\partial_v f(a)$ für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\phi_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto a + tv = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix}$

Dann gilt $\partial_v f(a) = (f \circ \phi_v)'(0)$

$$(f \circ \phi_v)(t) = f(1+t, 1) = 3(t+1)^2 + 5(1+t)\,1 - 7\,1$$

$$= 3t^2 + 6t + 3 + 5 + 5t - 7 = 3t^2 + 11t + 1$$

$$\Rightarrow (f \circ \phi_v)'(t) = 6t + 11$$

$$\Rightarrow \partial_v f(a) = (f \circ \phi_v)'(0) = 11$$

$\Rightarrow \partial_v f(a)$

(iii) Berechnung $\partial_w f(a)$ für $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\phi_w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\quad t \mapsto a + tw = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t+1 \end{pmatrix}$$

$$(f \circ \phi_w)(t) = f(t+1, 2t+1) = 3(t+1)^2 + 5(t+1)(2t+1)$$
$$- 7(2t+1) = 3t^2 + 6t + 3 + 10t^2 + 15t + 5$$
$$- 14t - 7 = 13t^2 + 7t + 1$$

$$(f \circ \phi_w)'(t) = 26t + 7 \Rightarrow \partial_w f(a) = (f \circ \phi_w)'(0) = 7$$

Definition und Berechnung der partiellen Ableitungen

Lemma (7.2)

Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\phi(t) \in U$ existiert $\partial_v f(a + tv)$ genau dann, wenn $f \circ \phi$ an der Stelle t differenzierbar ist, und in diesem Fall gilt $\partial_v f(a + tv) = (f \circ \phi)'(t)$.

Beweis von Lemma (7.2):

geg. $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq V$ offen, $a \in U$

$v \in V$, $\phi : \mathbb{R} \to V$, $t \mapsto a + tv$

Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $a + t_0 v \in U$

<u>Beh.</u>: $\partial_v f(a + t_0 v)$ existiert g.d.w. $f \circ \phi$ in t_0 differenzierbar ist, und dann gilt $\partial_v f(a + t_0 v) = (f \circ \phi)'(t_0)$

Sei $\psi : \mathbb{R} \to V$ geg. durch $\psi(t) = a + t_0 v + tv$
$= a + (t_0 + t)v = \phi(t + t_0)$. Nach Def. existiert $\partial_v f(a + t_0 v)$ g.d.w. $f \circ \psi$ in 0 diff'bar ist, und dann

gilt $\partial_v f(a+t_0 v) = (f \circ \psi)'(0)$

Es gilt $\psi = \phi \circ \tau$, wobei $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t + t_0$

$\Longrightarrow f \circ \psi = f \circ \phi \circ \tau$

Kettenregel, angewendet auf τ und $f \circ \phi$ $\to$

$f \circ \psi = f \circ \phi \circ \tau$ ist genau dann in 0 diff'bar, wenn $f \circ \phi$ in $\tau(0) = t_0$ diff'bar ist, und dann gilt $(f \circ \psi)'(0) = ((f \circ \phi) \circ \tau)'(0) =$

$(f \circ \phi)'(\tau(0)) \cdot \tau'(0) = (f \circ \phi)'(t_0) \cdot 1 = (f \circ \phi)'(t_0)$

$\Longrightarrow \partial_v f(a+t_0 v) = (f \circ \psi)'(0) = (f \circ \phi)'(t_0)$ $\square$

Definition und Berechnung der partiellen Ableitungen

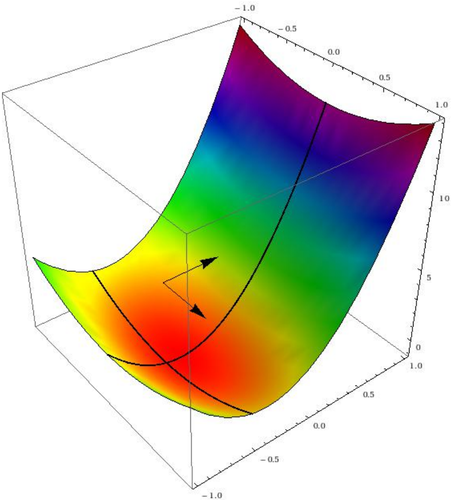
Definition (7.3)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in U$ und $k \in \{1, ..., n\}$. Die Richtungsableitung von f im Punkt a bezüglich des k-ten Einheitsvektors e_k wird die k-te partielle Ableitung $\partial_k f(a)$ von f im Punkt a genannt.

Ist $a = (a_1, ..., a_n) \in U$ ein Punkt des Definitionsbereichs, dann ist $\partial_k f(a)$ die Ableitung von $t \mapsto f(a_1, ..., a_{k-1}, t, a_{k+1}, ..., a_n)$ im Punkt a_k.

Geometrische Bedeutung der partiellen Ableitungen

Die partiellen Ableitungen geben die Steigung einer Funktion in x- und y-Richtung an.



$$\partial_1 f(1,1) + b \cdot \partial_2 f(1,1)$$

<u>Beispiel</u>: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 3x^2 + 5xy - 7y$

$a = (1,1)$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$ s.o. $\Rightarrow \partial_1 f(1,1) = 11$

alternativer Rechenweg:

Betrachte die Abb. $t \mapsto f(t,1)$, leite diese an der Stelle 1 ab. $f(t,1) = 3t^2 + 5 \cdot t \cdot 1 - 7 \cdot 1$

$= 3t^2 + 5t - 7$ Ableitung: $6t + 5$

Ableitung an der Stelle 1: 11

Berechnung von $\partial_2 f(1,1)$:

Betrachte $t \mapsto f(1,t) = 3 + 5t - 7t = 3 - 2t$

Ableitung: -2 Ableitung an der Stelle 1: -2

insgesamt: $\partial_1 f(1,1) = 11$, $\partial_2 f(1,1) = -2$

$$\partial_{(\underline{\underline{1}},\underline{\underline{2}})} f(1,1) = 7 = \underline{\underline{1}} \cdot 11 + \underline{\underline{2}}\,(-2)$$

Berechnung von $\partial_{(a,b)} f(1,1)$ für bel. $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Betrachte $\phi_v(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ta \\ 1+tb \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (f \circ \phi_v)(t) = f(1+ta, 1+tb) = 3(1+ta)^2 +$

$5(1+ta)(1+tb) - 7(1+tb) =$

$3 + 6ta + t^2a^2 + 5 + 5t(a+b) + 5t^2ab - 7 - 7tb$

$\Rightarrow (f \circ \phi_v)'(t) = 6a + 2at + 5(a+b) + 10abt - 7b$

$\Rightarrow (\partial_v f)'(0) = 6a + 5(a+b) - 7b = 11a - 2b$

$= a\, \partial_1 f(1,1) + b\, \partial_2 f(1,1)$

<u>Beispiel</u>: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 3x^2 + 5xy - 7y$

Berechnung von $\partial_1 f(x_0, y_0)$, $\partial_2 f(x_0, y_0)$ für einen beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$t \mapsto f(t, y_0) = 3t^2 + 5ty_0 - 7y_0$

Ableitung: $6t + 5y_0$

Ableitung an der Stelle x_0: $6x_0 + 5y_0 = \partial_1 f(x_0, y_0)$

Genauso erhält man $\partial_2 f(x_0, y_0) = 5x_0 - 7$