

§ 3. Stetigkeit

Definition (3.1)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ wird **stetig** in einem Punkt $a \in X$ bezüglich der Metriken d_X und d_Y genannt, wenn für **jede** Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ die Implikation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \text{ in } (X, d_X) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = f(a) \text{ in } (Y, d_Y)$$

gilt. Wir bezeichnen f insgesamt als stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

ε - δ -Kriterium für metrische Räume

Satz (3.5)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig im Punkt a bezüglich d_X und d_Y , wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass die Implikation

$$d_X(a, x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist.

Kriterium für die Stetigkeit linearer Abbildungen

Satz (3.16)

Eine lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ zwischen normierten $\mathbb{R}$ -Vektorräumen ist genau dann stetig, wenn eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|\phi(v)\| \leq \gamma \|v\|$ für alle $v \in V$ existiert.

$\Rightarrow \|\phi(v)\| < \gamma \Rightarrow \|\phi(v)\| < \gamma$ □
 $\gamma \|v\| \|\phi(\tilde{v})\| < \gamma \|v\|$

Beweis von Satz (3.16)

geg.: V, W normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume

$\phi: V \rightarrow W$ lineare Abbildung

Beh.: ϕ ist stetig $\iff \exists \gamma \in \mathbb{R}^+ : \forall v \in V$
(in jedem Punkt des Def.-bereichs) $\|\phi(v)\| \leq \gamma \|v\|$

$\Leftarrow$ " Sei $v \in V$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg.
" z.zg.": Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $w \in V$
die Implikation $\|w - v\| < \delta \Rightarrow \|\phi(w) - \phi(v)\| < \varepsilon$
erfüllt ist. Setze $\delta = \frac{\varepsilon}{\gamma}$. Sei $w \in V$ mit
 $\|w - v\| < \delta \Rightarrow \|\phi(w) - \phi(v)\| = \|\phi(w - v)\| \leq$

↓ da $\|v\|$ unbeschränkt ist

$\gamma \|w - v\| < \gamma \delta = \gamma \frac{\varepsilon}{\gamma} = \varepsilon$ Die Stetigkeit in v folgt somit aus dem ε - δ -Kriterium.

" $\Rightarrow$ " Stetigkeit von ϕ in 0_v , ε - δ -Kriterium $\rightarrow$

Für $\varepsilon = 1$ gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass aus $\|v\| = \|v - 0_v\| < \delta$ jeweils $\|\phi(v)\| = \|\phi(v) - 0_w\| = \|\phi(v) - \phi(0_v)\| < \varepsilon = 1$ folgt. Setze $\gamma = 2\delta^{-1}$. Sei nun $v \in V$ bel.

worgeg., o.B.d.A. $v \neq 0_v$ (sonst $\|\phi(v)\| = 0 \leq \gamma \|v\|$ offensichtlich).

Sei $\tilde{v} = \frac{1}{\gamma \|v\|} v \Rightarrow \|\tilde{v}\| = \frac{1}{\gamma \|v\|} \|v\| = \gamma^{-1} = \frac{1}{2} \delta < \delta$

$\Rightarrow \|\phi(\tilde{v})\| < 1 \Rightarrow \|\phi(v)\| = \|\phi(\gamma \|v\| \tilde{v})\| =$

$\gamma \|v\| \|\phi(\tilde{v})\| < \gamma \|v\|$ □

Beispiel für eine unstetige lineare Abbildung

Proposition (3.17)

Sei V der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Polynomfunktionen auf dem Intervall $[0, 1]$, ausgestattet mit der Supremumsnorm

$\|f\|_{\infty} = \sup\{ |f(x)| \mid x \in [0, 1] \}$. Dann ist die Ableitungsabbildung $\phi_1 : V \rightarrow V, f \mapsto f'$ **unstetig**.

Beweis von Prop. (3.17):

$V = \mathbb{R}$ -Vektorraum der Pol.-fkt. auf $[0,1]$ mit
der Norm $\|f\|_{\infty} = \sup \{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$

Beh. $\phi: V \rightarrow V, f \mapsto f'$ ist unstetig

Ang. ϕ ist stetig. (3.16) $\Rightarrow \exists \delta \in V, \|\phi(f)\|_{\infty} \leq \delta \|f\|_{\infty}$
für alle $f \in V$

Betrachte die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geg. durch $f_n(x) = x^n$

$$\|f_n\|_{\infty} = \sup \{|x^n| \mid x \in [0,1]\} = 1$$

$$f_n'(x) = nx^{n-1} \Rightarrow \|f_n'\|_{\infty} = \sup \{|nx^{n-1}| \mid x \in [0,1]\} = n$$

$$\text{also } n = \|f_n'\|_{\infty} = \|\phi(f_n)\|_{\infty} \leq \delta \|f_n\|_{\infty} = \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\nRightarrow$ da $\mathbb{N}$ unbeschränkt ist

Definition der Operatornorm

Satz (3.18)

Für jedes $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$ existiert das Supremum

$$\|\phi\| = \sup\{ \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \}.$$

Durch die Zuordnung $\mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathbb{R}_+, \phi \mapsto \|\phi\|$ ist auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathcal{L}(V, W)$ eine Norm definiert, die sogenannte **Operatornorm**.

Nach Definition der Operatornorm gilt $\|\phi(v)\| \leq \|\phi\| \|v\|$ für alle $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$ und $v \in V$.

$$\Rightarrow \|\lambda \phi\| = \sup \{ \|(\lambda \phi)(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} = |\lambda| \|\phi\|$$

Beweis von Prop. (3.18)

geg. normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume V und W

$\mathcal{L}(V, W)$ = Raum der stetigen linearen Abb. $V \rightarrow W$

$$\|\phi\| = \sup \{ \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \}$$

Für jedes $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$ ist $\|\phi\|$ endlich, denn. Da ϕ stetig ist, existiert ein $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|\phi(v)\| \leq \gamma \|v\|$
 $\forall v \in V$, insb. also $\|\phi(v)\| \leq \gamma \quad \forall v \in V$ mit $\|v\| \leq 1$

Überprüfung der Normeigenschaften, in Einzelnen.

Für alle $\phi, \psi \in \mathcal{L}(V, W)$ gilt (i) $\|\phi\| = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$

$$(ii) \|\lambda \phi\| = |\lambda| \|\phi\| \quad (iii) \|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|$$

$$\underline{\text{zu (i)}} \quad \leftarrow \quad \phi = 0 \Rightarrow \sup \{ \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} = \\ \sup \{ \|0_W\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} = \sup \{ 0 \} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Var.: } \sup \{ \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} = 0 \Rightarrow \\ \|\phi(v)\| = 0 \quad \forall v \in V \text{ mit } \|v\| \leq 1. \text{ Für jedes } v \in V \setminus \{0_V\} \\ \text{folgt wegen } \left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = 1 \text{ somit } \left\| \phi\left(\frac{1}{\|v\|} v\right) \right\| = 0 \text{ und} \\ \|\phi(v)\| = \|v\| \cdot \left\| \phi\left(\frac{1}{\|v\|} v\right) \right\| = 0 \Rightarrow \phi(v) = 0_W \text{ also: } \phi = 0$$

zu (ii) allgemein gilt: $A \in \mathbb{R}_+$ nichtleer, beschränkt

$$\Rightarrow \sup |A| = |A| \sup A \quad \text{Wende dies auf}$$

$$A = \{ \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \}, \text{ es gilt}$$

$$\{ \|(\lambda\phi)(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} = |\lambda| \{ \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \}$$

$$\Rightarrow \|\lambda\phi\| = \sup \{ \|(\lambda\phi)(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} = |\lambda| \|\phi\|$$

$$\Rightarrow \|\lambda\phi\| = \sup \{ \|(\lambda\phi)(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} = |\lambda| \|\phi\|$$

zu (iii) z.zg. $\|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|$

Sei $v \in V$ mit $\|v\| \leq 1$ $\|(\phi + \psi)(v)\| \leq \|\phi(v) + \psi(v)\|$

$$\leq \|\phi(v)\| + \|\psi(v)\| \leq \|\phi\| + \|\psi\| \Rightarrow$$

$$\sup \{ \|(\phi + \psi)(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1 \} \leq \|\phi\| + \|\psi\|$$

$$\Rightarrow \|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|$$

□

Zeilensummennorm als Spezialfall der Operatornorm

Proposition (3.19)

Seien $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ jeweils mit der Supremums-Norm $\|\cdot\|_\infty$ ausgestattet und $A \in \mathcal{M}_{m \times n, \mathbb{R}}$ eine Matrix. Dann ist die Operatornorm von $\phi_A : V \rightarrow W$, $v \mapsto Av$ gegeben durch

$$\|\phi_A\| = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \mid 1 \leq i \leq m \right\}$$

Man bezeichnet diese Norm auch als **Zeilensummennorm**.

Stetigkeit im endlich-dimensionalen Fall

Folgerung (3.20)

Jede lineare Abbildung von einem endlich-dimensionalen in einen normierten $\mathbb{R}$ -Vektorraum beliebiger Dimension ist stetig. Jeder Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ -Vektorräumen derselben endlichen Dimension ist ein Homöomorphismus.

Stetigkeit von $\mathcal{L}(V, W)$ -wertiger Abbildungen

Satz (3.21)

Sei X ein metrischer Raum, und seien V, W zwei endlich-dimensionale, normierte $\mathbb{R}$ -Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi : X \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ ist genau dann stetig, wenn die Zuordnung $\varphi_v : X \rightarrow W, x \mapsto \varphi(x)(v)$ für jeden Vektor $v \in V$ stetig ist.

§ 4. Offene und abgeschlossene Teilmengen

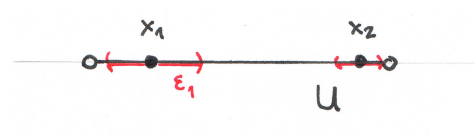
Definition (4.1)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird **offen** genannt, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ existiert.

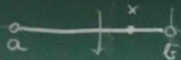
Offene Intervalle sind offen

Proposition (4.2)

Jedes offene Intervall $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ ist eine offene Teilmenge bezüglich der Standard-Metrik $d(x, y) = |x - y|$.



Beweis von Prop (3.2)



Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Beh. $]a, b[$ ist offen
im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$, wobei $d(x, y) = |y - x|$ ist

Sei $x \in]a, b[$ z.zg. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : B_\varepsilon(x) \subseteq]a, b[$

Setze $\varepsilon := \min \{x - a, b - x\}$ überprüfe $B_\varepsilon(x) \subseteq]a, b[$

Sei $y \in B_\varepsilon(x) \rightarrow d(x, y) < \varepsilon \rightarrow |y - x| < \varepsilon$

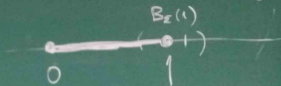
$\rightarrow x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \rightarrow y < x + \varepsilon \leq x + (b - x) = b$
 $\rightarrow x - \varepsilon < y < x + \varepsilon \rightarrow y > x - \varepsilon \geq x - (x - a) = a$ z.zg. $a < y < b$

und $y > x - \varepsilon \geq x - (x - a) = a$
 $\rightarrow y \in]a, b[$

Beh. $[0, 1]$ ist keine offene Teilmenge in $(\mathbb{R}, d)$

Ang. $[0, 1]$ ist offen $\rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : B_\varepsilon(1) \subseteq [0, 1]$

Sei $y = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$



$$d(1, y) = |y - 1| = \left|1 + \frac{1}{2}\varepsilon - 1\right| = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$$

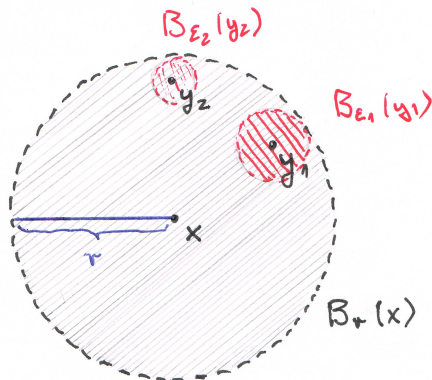
$\Rightarrow y \in B_\varepsilon(1)$ aber: $y = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon > 1 \rightarrow y \notin [0, 1]$

also: $B_\varepsilon(1) \not\subseteq [0, 1]$

Offene Bälle sind offen

Proposition (4.3)

Ist (X, d) ein metrischer Raum, dann ist jeder offene Ball $B_r(x)$ eine offene Teilmenge von X .



Beweis von Prop. (3.3)

geg (X, d) metrischer Raum, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$

Beh. $B_r(x)$ ist offene Teilmenge von X

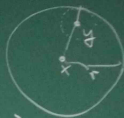
Sei $y \in B_r(x)$ $y \in B_r(x) \Rightarrow d(x, y) < r$

Setze $\varepsilon = r - d(x, y)$. Beh. $B_\varepsilon(y) \subseteq B_r(x)$

Sei $z \in B_\varepsilon(y) \Rightarrow d(y, z) < \varepsilon \Rightarrow$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \varepsilon$$

$$d(x, y) + (r - d(x, y)) = r \Rightarrow z \in B_r(x) \quad (\Rightarrow \text{Beh.})$$



Offenheit bei äquivalenten Normen

Proposition (4.4)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $\|\cdot\|'$ eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann offen bezüglich der Norm $\|\cdot\|$, wenn sie bezüglich der Norm $\|\cdot\|'$ offen ist.

Betrachtet man einen **endlich-dimensionalen** $\mathbb{R}$ -Vektorraum V , ohne dass auf V explizit eine bestimmte Metrik angegeben wurde, dann ist mit der **Offenheit** einer Teilmenge $U \subseteq V$ immer die Offenheit bezüglich der von einer beliebigen Norm induzierten Metrik gemeint.

Familien von Teilmengen

Sei X eine Menge und $\mathfrak{P}(X)$ seine **Potenzmenge**, also die Menge aller Teilmengen von X . Ein **Familie** von Teilmengen der Menge X über einer Indexmenge I ist einfach eine Abbildung $\phi : I \rightarrow \mathfrak{P}(X)$. Jedem Element aus I wird also eine Teilmenge von X zugeordnet.

In der Regel verwendet man an Stelle der Abbildung- die **Indexschreibweise**, wobei dann $(X_i)_{i \in I}$ für die Abbildung $I \rightarrow \mathfrak{P}(X)$, $i \mapsto X_i$ steht.

Metrische Räume als topologische Räume

Satz (4.5)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt

- (i) Die Teilmengen $\emptyset$ und X sind offen.
- (ii) Sind U und V offen, dann auch die Schnittmenge $U \cap V$.
- (iii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen, dann ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Ist X eine Menge, dann wird ein System $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X mit den Eigenschaften (i) bis (iii) eine **Topologie** auf X genannt. Das Paar $(X, \mathcal{T})$ bezeichnet man dann als **topologischen Raum**.

Beh.: (X, d) metrischer Raum, U, V offene Teilmengen, dann ist auch $U \cap V$ offen

Sei $x \in U \cap V$ z.zg. $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$

$x \in U$, U offen $\rightarrow \exists \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U$

$x \in V$, V offen $\rightarrow \exists \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V$

Sei $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. $\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U$

$B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V$ insgesamt: $B_\varepsilon(x) \subseteq U \cap V$