§ 3. Stetigkeit

Definition (3.1)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ wird stetig in einem Punkt $a \in X$ bezüglich der Metriken d_X und d_Y genannt, wenn für jede Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ die Implikation

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \text{ in } (X, d_X) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = f(a) \text{ in } (Y, d_Y)$$

gilt. Wir bezeichnen f insgesamt als stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Stetigkeit der Koordinatenfunktionen

Proposition (3.4)

Für jedes $i \in \{1, ..., m\}$ ist die i-te Koordinatenfunktion

$$\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad , \quad (x_1, ..., x_m) \mapsto x_i$$

eine stetige Funktion.

ε-δ-Kriterium für metrische Räume

Satz (3.5)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig im Punkt a bezüglich d_X und d_Y, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass die Implikation

$$d_X(a, x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist.

Stetigkeit $\mathbb{R}^d$-wertiger Funktionen

Proposition (3.6)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, $r \in \mathbb{N}$ und $f : X \to \mathbb{R}^d$ eine Funktion mit den Komponenten $f_1, ..., f_d : X \to \mathbb{R}$, so dass also $f(x) = (f_1(x), ..., f_d(x))$ für alle $x \in X$ gilt. Genau dann ist f in einem Punkt $a \in X$ stetig, wenn die Funktionen $f_1, ..., f_d$ alle in a stetig sind.

Beweis von Prop (3.6). geg metr. Raum (X, d_X), und eine Abb. $f: X \to \mathbb{R}^d$. Es seien $f_1, \ldots, f_d: X \to \mathbb{R}$ geg. durch $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_d(x))$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$

Sei $a \in X$. Beh. f stetig in $a \Longleftrightarrow f_1, \ldots, f_d$ stetig in a

Wir beweisen die Äquiv. bzgl. der durch $\| \|_\infty$ induzierten Metrik d_∞ auf $\mathbb{R}^d$

„$\Longleftarrow$" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $f_1, \ldots, f_d$ stetig in $a \Rightarrow$ $\exists\, \delta_1, \ldots, \delta_d \in \mathbb{R}^+$, so dass $\forall x \in X$ jeweils

$$d_X(a,x) < \delta_i \Rightarrow |f_i(a) - f_i(x)| < \varepsilon \quad (1 \leq i \leq d)$$

Sei nun $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_d\}$. Sei $x \in X$ mit

$d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_X(a,x) < \delta_i$ für $1 \leq i \leq d$

$\overset{s.o.}{\Longrightarrow} |f_i(a) - f_i(x)| < \varepsilon$ für $1 \leq i \leq d$

$\Rightarrow d_\infty(f(a), f(x)) = \|f(x) - f(a)\|_\infty =$

$\max\{|f_1(x) - f_1(a)|, \dots, |f_d(x) - f_d(a)|\} < \varepsilon$

Damit ist das ε-δ-Krit. für f in a verifiziert $\Rightarrow$

f stetig in a

"$\Longrightarrow$" Sei $i \in \{1, \dots, d\}$, verifiziere das ε-δ-Krit. für f_i.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. f stetig in $a \Rightarrow \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+$ mit

$d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_\infty(f(a), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in X$.

Sei nun $x \in X$ mit $d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_\infty(f(a), f(x)) < \varepsilon \Rightarrow$

$\|f(x) - f(a)\|_\infty = \max\{|f_1(x) - f(a)|, \dots, |f_d(x) - f(a)|\} < \varepsilon$

Also gilt erst recht $|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ ε-δ-Krit. für f_i ist erfüllt $\Rightarrow$ f_i ist stetig in a. $\square$

Bsp.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x^2+y, \sin(xy))$

Komponentenfkt. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2+y$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sin(xy)$

Um zu zeigen, dass f stetig ist, genügt es, die Stetigkeit von f_1 und f_2 zu beweisen.

Stegtigkeit zusammengesetzter Funktionen

Proposition (3.7)

Die folgenden Abbildungen $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$, $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ und $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ sind stetig.

Folgerung (3.8)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, und seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \quad \text{stetig.}$$

Gilt zusätzlich $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, dann ist auch $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ stetig.

Bew. von Prop. (3.7):

Zeige nur, dass $\alpha: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$ stetig ist.

Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vorgeg. und $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$, die gegen (x,y) konvergiert, bzgl. einer bel. induzierten Metrik. bekannt: Aus $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x,y)$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \ \lim_{n\to\infty} y_n = y \underset{\substack{\text{Grenzwertsätze} \\ \text{Analysis I}}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = x+y$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = x+y = \alpha(x,y) \quad \square$$

Beweis von Folgerung (3.8):

<u>zeige</u>: (X, d) metrischer Raum, $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig

$\Longrightarrow f+g$ stetig

f, g stetig $\overset{\text{Prop. (3.6)}}{\Longrightarrow} (f,g) : X \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (f(x), g(x))$

stetig $\Longrightarrow \alpha \circ (f,g) : X \to \mathbb{R}$ stetig

Dabei gilt $\alpha \circ (f,g) = f+g$, denn

$$(\alpha \circ (f,g))(x) = \alpha((f,g)(x)) = \alpha(f(x), g(x))$$

$$= f(x) + g(x) = (f+g)(x) \quad \forall x \in X. \qquad \square$$

Ein Anwendungsbeispiel

Proposition (3.9)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \dfrac{x^3 y + 5xy}{x^2 + y^4 + 1}$ ist stetig.

Bew. von Prop. (3.9):

Begründung der Stetigkeit von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x,y) \mapsto \frac{x^3y + 5xy}{x^2 + y^4 + 1}$$

$(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto y$ sind stetig (Koordinatenfkt.)

Produkt stetiger Fkt. stetig $\Rightarrow$ $(x,y) \mapsto x^3y$ stetig,

ebenso $(x,y) \mapsto x^2$, $(x,y) \mapsto y^4$ $\quad$ $(x,y) \mapsto 5$ stetig

als konstante Fkt., $(x,y) \mapsto xy$ stetig $\Rightarrow$ $(x,y) \mapsto 5xy$

stetig $\quad$ Summe stetiger Fkt. stetig $\Rightarrow$ $(x,y) \mapsto x^3y + 5xy$

stetig. $(x,y) \mapsto x^2 + y^4 + 1$ stetig $\quad$ entsprechend für

Quotienten, $x^2 + y^4 + 1 \neq 0$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\to$ f stetig $\square$

Die Stetigkeit der Normfunktion

Lemma (3.10)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann gilt

$$\big|\|v\| - \|w\|\big| \quad \leq \quad \|v - w\| \qquad \text{für alle} \quad v, w \in V.$$

Folgerung (3.11)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann ist $V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ eine stetige Funktion.

Überprüfe hier nur die erste Gleichung.

Beweis von Lemma (3.10): $(V, \|\cdot\|)$ normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, $v, w \in V$, z.zg. $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v-w\|$

$\|v\| = \|v - w + w\| \leq \|v-w\| + \|w\|$

$\Rightarrow \|v\| - \|w\| \leq \|v-w\|$, genauso: $\|w\| - \|v\| \leq \|v-w\|$

insgesamt: $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v-w\|$ $\square$

Beweis von Folgerung (3.11): Beh. $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_+$ ist stetig

Sei $v \in V$ und $(v^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V mit

$\lim_{n\to\infty} v^{(n)} \overset{(*)}{=} v$ bzgl. $\|\cdot\|$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg.

$(*) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\|v^{(n)} - v\| < \varepsilon \; \forall n \geq N$

$\overset{(3.10)}{\Longrightarrow} |\|v^{(n)}\| - \|v\|| < \varepsilon \; \forall n \geq N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|v^{(n)}\| = \|v\|$ in $\mathbb{R}$. $\square$

Homömorphismen zwischen metrischen Räumen

Definition (3.12)

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) wird Homöomorphismus genannt, wenn sie bijektiv, stetig und die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig ist. Metrische Räume, zwischen denen ein Homöomorphismus existiert, nennt man homöomorph.

Das folgende Beispiel zeigt, dass Homöomorphismen auch zwischen Räumen ganz unterschiedlicher Gestalt existieren können.

Proposition (3.13)

Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $V = \mathbb{R}^n$. Dann ist der offene Ball $B_1(0_V)$ vom Radius 1 um den Ursprung homöomorph zum $\mathbb{R}^n$.

Bew von Prop (3.13):

$\| \ \|$ Norm auf $\mathbb{R}^n$, $B_1(0_{\mathbb{R}^n}) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \}$

<u>Beh.</u>: $f : B_1(0_{\mathbb{R}^n}) \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \frac{1}{1-\|x\|} x$

$g : \mathbb{R}^n \to B_1(0_{\mathbb{R}^n})$, $x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|} x$

sind stetig und zueinander invers.

Beide Abb. sind stetig, weil ihre Komponentenfkt. aus stetigen, $\mathbb{R}$-wertigen Abb. zusammengesetzt sind, u.a. aus der Normfunktion.

noch zu überprüfen $\forall x \in B_1(0_{\mathbb{R}^n}) : (g \circ f)(x) = x$

$\forall x \in \mathbb{R}^n : (f \circ g)(x) = x$

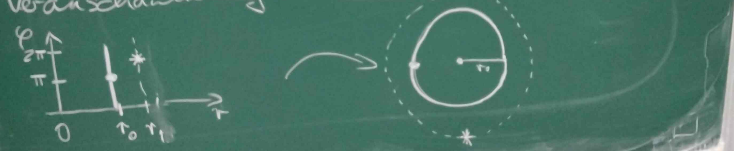
Überprüfe hier nur die erste Gleichung.

Sei $x \in B_1(0_{\mathbb{R}^n})$ $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) =$

$$g\left(\frac{1}{1-\|x\|}x\right) = \frac{1}{1+\left\|\frac{1}{1-\|x\|}x\right\|}\,\frac{1}{1-\|x\|}x =$$

$$\frac{1-\|x\|}{1-\|x\|+\|x\|}\,\frac{1}{1-\|x\|}x = (1-\|x\|)\frac{1}{1-\|x\|}x = x \qquad \square$$

Veranschaulichung der Polarkoordinatenabb.



Definition der Polarkoordinaten

Satz (3.14)

(i) Die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\varphi \mapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ ist stetig, und für jedes halboffene Intervall I der Länge 2π ist die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_I$ eine stetige Bijektion auf ihre Bildmenge.

(ii) Die Abbildung $\rho_{\mathrm{pol}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ wird Polarkoordinaten-Abbildung genannt. Für jedes Intervall I wie unter (i) ist auch $\rho_{\mathrm{pol}}|_{\mathbb{R}^+ \times I}$ eine stetige Bijektion auf ihre Bildmenge.

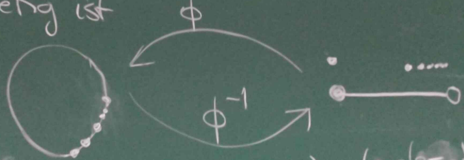
Stetigkeit und Bijektivität nicht hinreichend für Homöomorphismus

- Wie soeben gezeigt, ist die Abbildung $\phi : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $\varphi \mapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ stetig und eine Bijektion auf ihre Bildmenge, den Einheitskreis.

- Die Abbildung ist aber kein Homöomorphismus, denn die Umkehrabbildung ist nicht stetig!

Bsp. $S^1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_2 = 1 \}$
Einheitskreis

$\phi : [0, 2\pi[\to S^1,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ ist
kein Homöomorphismus, da die Umkehrfkt.
nicht stetig ist



Sei $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$
die Folge in S^1 geg. durch $(x_n, y_n) = \left(\cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)\right)$
$\Rightarrow \phi^{-1}(x_n, y_n) = 2\pi - \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \phi^{-1}(x_n, y_n) = 2\pi$

aber: $\lim (x_n, y_n) = \left(\lim\limits_{n \to \infty} \cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \lim\limits_{n \to \infty} \sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right) \right)$

aber: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right) \right)$

$= \left(\cos(2\pi), \sin(2\pi) \right) = (1, 0)$

aber: $\phi^{-1}(1,0) = 0 \neq 2\pi$

also: $\lim\limits_{n\to\infty} \phi^{-1}(x_n, y_n) \neq \phi^{-1}\left(\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) \right)$

$\Rightarrow \phi^{-1}$ unstetig in $(1, 0)$

Definition der Zylinder- und Kugelkoordinaten

Satz (3.15)

Sei I ein halboffenes Intervall der Länge 2π.

(i) Die Abbildung $\rho_{\mathrm{zyl}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, h) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), h)$ ist stetig, und die Einschränkung $\rho_{\mathrm{zyl}}|_{M_I}$ auf $M_I = \mathbb{R}^+ \times I \times \mathbb{R}$ ist eine stetige Bijektion auf ihre Bildmenge.

(ii) Die Abbildung $\rho_{\mathrm{kug}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$(r, \vartheta, \varphi) \quad \mapsto \quad (r\sin(\vartheta)\cos(\varphi), r\sin(\vartheta)\sin(\varphi), r\cos(\vartheta))$$

ist ebenfalls stetig, und die Einschränkung $\rho_{\mathrm{kug}}|_{N_I}$ auf $N_I = \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\times I$ ist eine stetige Bijektion auf ihre Bildmenge.

Die Abbildung ρ_{zyl} wird Zylinderkoordinaten-Abbildung, die Abbildung ρ_{kug} Kugelkoordinaten-Abbildung genannt.