§ 2. Konvergenz in metrischen Räumen

Definition (2.1)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $a \in X$ ein Punkt. Man sagt, die Folge konvergiert in (X, d) gegen a und schreibt

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} \quad = \quad a \quad ,$$

wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x \in B_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq N$ gilt. Der Punkt a wird in diesem Fall ein Grenzwert der Folge genannt. Eine Folge, die gegen keinen Punkt von X konvergiert, bezeichnet man als divergent.

Nach Definition ist die Bedingung $x \in B_\varepsilon(a)$ äquivalent zu $d(x, a) < \varepsilon$. Die Konvergenz der Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist also äquivalent dazu, dass

$$\lim_{n\to\infty} d(x^{(n)}, a) \quad = \quad 0 \qquad \text{gilt.} \qquad (1)$$

Cauchyfolgen in metrischen Rümen

Definition (2.6)

Eine Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ein einem metrischen Raum (X, d) wird Cauchyfolge genannt, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x^{(m)}, x^{(n)}) < \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N$ gilt.

Vollständige metrische Räume

Definition (2.8)

Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in (X, d) konvergiert. Ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, der vollständig bezüglich der induzierten Metrik ist, wird Banachraum genannt.

Definition der Kontraktionen

Definition (2.10)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $\phi : X \to X$ wird Kontraktion genannt, wenn eine Konstante $\gamma \in]0, 1[$ existiert, so dass $d(\phi(x), \phi(y)) \leq \gamma d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ erfüllt ist.

Der Banachsche Fixpunktsatz

Satz (2.11)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann besitzt jede Kontraktion $\phi : X \to X$ genau einen Fixpunkt. Es gibt also ein eindeutig bestimmtes $z \in X$ mit $\phi(z) = z$.

Proposition (2.12)

Für den Abstand der Folgenglieder zum Fixpunkt z hat man die „a priori"-Abschätzung

$$d(x^{(n)}, z) \quad \leq \quad \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(x^{(0)}, x^{(1)}).$$

$\overset{S.0}{\Rightarrow}$ $d(x^{(n)}, x^{(n+p)}) \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(x^{(0)}, x^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{d(x^{(0)}, x^{(1)})} d(x^{(0)}, x^{(1)})$

$= \varepsilon \quad \forall n \geq N, \ p \geq 0$

Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes

(X, d) vollständiger metrischer Raum

$\phi : X \to X$ Kontraktion, $\gamma \in]0,1[$ mit $d(\phi(x), \phi(y)) \leq \gamma\, d(x, y)$ für alle $x, y \in X$

zur Existenz eines Fixpunkts:

Sei $x^{(0)} \in X$ bel. gewählt, definiere eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in X durch $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$. Beh. $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt jeweils $d(x^{(n+1)}, x^{(n+2)}) =$

$d(\phi(x^{(n)}), \phi(x^{(n+1)})) \leq \gamma\, d(x^{(n)}, x^{(n+1)})$

vollst. Ind. über $p \in \mathbb{N}$ zeigt: $d(x^{(n+p)}, x^{(n+p+1)}) \leq \gamma^p d(x^{(n)}, x^{(n+1)})$

$$d(x^{(n)}, x^{(n+p)}) \le \sum_{k=0}^{p-1} d(x^{(n+k)}, x^{(n+k+1)}) \le$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} \gamma^k d(x^{(n)}, x^{(n+1)})$$

$$= d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) + d(x^{(n+1)}, x^{(n+2)}) + \dots + d(x^{(n+p-1)}, x^{(n+p)})$$

$$= d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \sum_{k=0}^{p-1} \gamma^k =$$

$$d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \frac{1-\gamma^p}{1-\gamma} \le \frac{1}{1-\gamma} d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(x^{(0)}, x^{(1)})$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \overset{(*)}{=} 0$. Dies zeigt, dass $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, denn: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Wegen (*) gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\gamma^n}{1-\gamma} < \frac{\varepsilon}{d(x^{(0)}, x^{(1)})}$ $\forall n \ge N$

$$\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} d(x^{(n)}, x^{(n+p)}) \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(x^{(0)}, x^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{d(x^{(0)}, x^{(1)})} d(x^{(0)}, x^{(1)})$$

$$= \varepsilon \quad \forall n \ge N, p \ge 0$$

Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes

$x-y$

$(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge, (X,d) vollständig $\Rightarrow$

$z \overset{(*_1)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$ existiert. Beh: $\phi(z)=z$

Sei $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ vorgeg. $(*_1) \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}\ d(z,x^{(n)})<\varepsilon$

$\forall n\ge N \Rightarrow d(x^{(n+1)},\phi(z)) = d(\phi(x^{(n)}),\phi(z)) \le$

$\gamma\, d(x^{(n)},z) < \gamma\varepsilon < \varepsilon \quad \forall n\ge N$

$\Rightarrow$ Folge konvergiert auch gegen $\phi(z)$. Eindeutigkeit des Grenzwerts $\Rightarrow \phi(z)=z$

Eindeutigkeit des Fixpunktes: Ang., $z_1\in X$ ist weiterer Fixpunkt, $z_1\neq z \Rightarrow d(z,z_1)>0$ aber:

$d(z,z_1) = d(\phi(z),\phi(z_1)) \le \gamma\, d(z,z_1) < d(z,z_1)$ ↯ $\square$

Anwendungsbeispiel: Berechnung von $\sqrt{2}$.

$\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

$\sqrt{2}$ ist Fixpunkt von ϕ, denn $\phi(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

<u>Beh.</u> ϕ ist auf $[1, \frac{3}{2}] = X$ eine Kontraktion

$\phi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$. $x \in]1, \frac{3}{2}[\Rightarrow$

$-\frac{1}{2} = \phi'(1) < \phi'(x) < \frac{1}{18} = \phi'(\frac{3}{2})$

$\Rightarrow |\phi'(x)| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in]1, \frac{3}{2}[$ Seien nun

$x, y \in [1, \frac{3}{2}]$ Mittelwertsatz der Differentialr. $\to$

$\exists x_0 \in]1, \frac{3}{2}[$ mit $\phi'(x_0) = \frac{\phi(x) - \phi(y)}{x - y}$

$\ldots| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

$x - y$

$\Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| \leq |\phi'(x_0)| \, |x-y| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

$\Rightarrow$ ϕ ist Kontraktion mit der Konstanten $\gamma = \frac{1}{2}$

Satz (2.11) $\Rightarrow$ Die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch
$x^{(0)} = \frac{3}{2}$, $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$ konvergiert gegen $\sqrt{2}$.

§ 3. Stetigkeit

Definition (3.1)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ wird stetig in einem Punkt $a \in X$ bezüglich der Metriken d_X und d_Y genannt, wenn für jede Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ die Implikation

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \ \text{ in } \ (X, d_X) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = f(a) \ \text{ in } \ (Y, d_Y)$$

gilt. Wir bezeichnen f insgesamt als stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

Ergänzungen zur Definition

- Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einem metrischen Raum (X, d_X) bezeichnen wir als stetig, wenn sie bezüglich d_X und der von der 1-Norm induzierten Metrik $d_1(a, b) = |a - b|$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist.
- Ist auch X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $d_X = d_1$, dann stimmt der Stetigkeitsbegriff mit dem Begriff aus der Analysis einer Variablen überein!
- Sind X und Y Teilmengen von endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen, dann bezeichnen wir eine Funktion $f : X \to Y$ als *stetig* in einem Punkt $a \in X$, wenn sie bezüglich der induzierten Metriken von beliebig gewählten Normen auf X und Y stetig ist.

Beispiele stetiger Funktionen

Proposition (3.2)

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume.

(i) Jede konstante Funktion auf X ist stetig.

(ii) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen und $a \in X$ ein Punkt, so dass f in a und g in $f(a)$ stetig ist. Dann ist auch $g \circ f$ in a stetig.

Beweis von Prop. (3.2) $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ metrische Räume

zu (i) Sei $f: X \to Y$ konstant, d.h. $f(x) = y_0 \ \forall x \in X$, für ein $y_0 \in Y$. Sei $x_0 \in X$ z.zg.: f ist in x_0 stetig

Sei $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = x_0$ in (X, d_X).

z.zg.: $\lim_{n \to \infty} f(x^{(n)}) = f(x_0)$ in (Y, d_Y)

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Sei $N = 1$. Für alle $n \geq N$ gilt dann $d_Y(f(x_0), f(x^{(n)})) = d_Y(y_0, y_0) = 0 < \varepsilon$

<u>zu (ii)</u> $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ Abbildungen, $a \in X$.

f stetig in a, g stetig in $f(a)$.

z.zg: $g \circ f$ ist stetig in a.

Sei $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = a$ in (X, d_X)

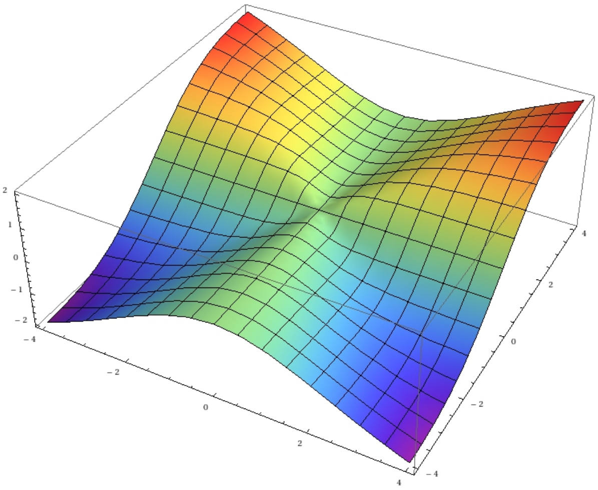
z.zg: $\lim_{n \to \infty} (g \circ f)(x^{(n)}) = (g \circ f)(a)$

f stetig in $a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x^{(n)}) = f(a)$ in (Y, d_Y)

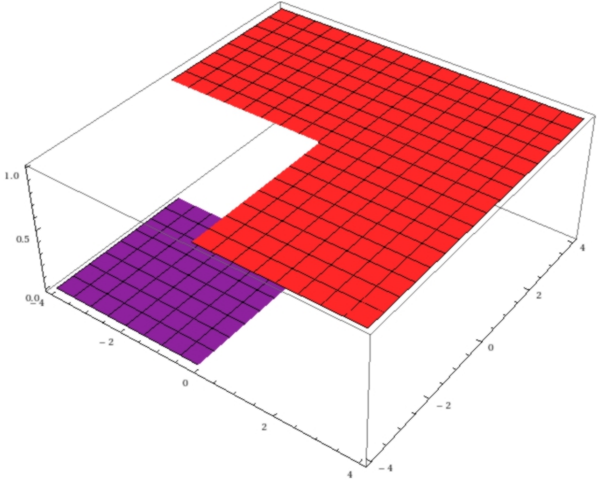
g stetig in $f(a) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} g(f(x^{(n)})) = g(f(a))$ $\square$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (g \circ f)(x^{(n)}) = (g \circ f)(a)$

Graph einer 2-dim. stetigen Funktion



Graph einer 2-dim. unstetigen Funktion



Definition der Funktionsgrenzwerte

Definition (3.3)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : D \to Y$ eine Abbildung auf einer Teilmenge $D \subseteq X$ und a ein Punkt in $X \setminus D$. Wir bezeichnen $b \in Y$ als Grenzwert von f für $x \to a$, wenn eine Folge $(x^{(n)})$ in D existiert, so dass $\lim_n x^{(n)} = a$ in (X, d_X) gilt und außerdem für jede solche Folge jeweils

$$\lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = b \qquad \text{in } (Y, d_Y) \text{ erfüllt ist.}$$

Stetigkeit der Koordinatenfunktionen

Proposition (3.4)

Für jedes $i \in \{1, ..., m\}$ ist die i-te Koordinatenfunktion

$$\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad , \quad (x_1, ..., x_m) \mapsto x_i$$

eine stetige Funktion.

Bew. von Prop. (3.4): z.zg.: $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \mapsto x_i$ ist stetig

Sei $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ vorgeg. zeige: π_i stetig in a

Sei $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^m$ mit $\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = a$ (*) in $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$, wobei $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$

z.zg.: $\lim_{n \to \infty} \pi_i(x^{(n)}) = \pi_i(a)$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. (*) $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\|x^{(n)} - a\|_\infty < \varepsilon$ $\forall n \geq N$ $\Rightarrow \max\{|x_k^{(n)} - a_k| \mid 1 \leq k \leq m\} < \varepsilon$ $\forall n \geq N$

$\Rightarrow |x_i^{(n)} - a_i| < \varepsilon$ $\forall n \geq N \Rightarrow |\pi_i(x^{(n)}) - \pi_i(a)| < \varepsilon$ $\forall n \geq N \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \pi_i(x^{(n)}) = \pi_i(a)$ $\square$

ε-δ-Kriterium für metrische Räume

Satz (3.5)

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig im Punkt a bezüglich d_X und d_Y, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass die Implikation

$$d_X(a, x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist.

Beweis des ε-δ-Kriteriums:

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $f: X \to Y$, $a \in X$

zzg:

f stetig in $a \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; \forall x \in X:$

$$d_X(a, x) < \delta \overset{(*)}{\Rightarrow} d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

„$\Leftarrow$": Sei $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ in (X, d_X)

zzg: $\lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = f(a)$ in (Y, d_Y)

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $\delta \in \mathbb{R}^+$ so, dass $(*)$ $\forall x \in X$ erfüllt ist

$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $d_X(a, x^{(n)}) < \delta \;\; \forall n \geq N$

$(*) \Rightarrow d_Y(f(a), f(x^{(n)})) < \varepsilon \;\; \forall n \geq N$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = f(a)$

... N mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Dann folgt

$d_X(a, x^{(n)}) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \;\; \forall n \geq N$. Wegen $d_Y(f(a), f(x^{(n)}))$

„$\Longrightarrow$": Ang. f ist stetig in a, aber die Aussage rechts gilt nicht $\Rightarrow$ $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass <u>kein</u> $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $\forall x \in X$ jeweils $d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

Insbesondere gibt es also für $\delta = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ jeweils ein $x^{(n)} \in X$, das die Implikation nicht erfüllt, d. h. es gilt jeweils $d_X(a, x^{(n)}) < \frac{1}{n}$, aber $d_Y(f(a), f(x)) \geq \varepsilon$.

Die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt nun $\lim\limits_{n \to \infty} x^{(n)} = a$, denn:

Ist $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. und $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon_1$, dann folgt $d_X(a, x^{(n)}) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon_1 \;\forall n \geq N$. Wegen $d_Y(f(a), f(x^{(n)})) \geq \varepsilon \;\forall n \in \mathbb{N}$ gilt aber <u>nicht</u> $\lim\limits_{n \to \infty} f(x^{(n)}) = f(a)$ ↯ zur Stetigkeit von f in a.

$\square$