§ 2. Konvergenz in metrischen Räumen

Definition (2.1)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $a \in X$ ein Punkt. Man sagt, die Folge konvergiert in (X, d) gegen a und schreibt

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} \quad = \quad a \quad ,$$

wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x \in B_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq N$ gilt. Der Punkt a wird in diesem Fall ein Grenzwert der Folge genannt. Eine Folge, die gegen keinen Punkt von X konvergiert, bezeichnet man als divergent.

Nach Definition ist die Bedingung $x \in B_\varepsilon(a)$ äquivalent zu $d(x, a) < \varepsilon$. Die Konvergenz der Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist also äquivalent dazu, dass

$$\lim_{n\to\infty} d(x^{(n)}, a) \quad = \quad 0 \qquad \text{gilt.} \tag{1}$$

Erinnerung: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$

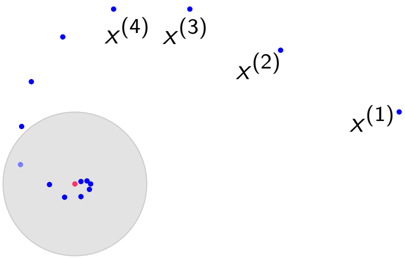
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+ : \exists N\in\mathbb{N} : \forall n\geq N : |x_n - a| < \varepsilon$$

„Abstand zwischen x_n und a"

$$x\in B_\varepsilon(a) \iff d(a,x) < \varepsilon$$

offene Ball vom Radius ε um a

Konvergenz in der Ebene



Eindeutigkeit des Grenzwerts

Proposition (2.2)

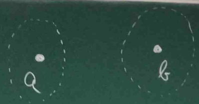
Jede Folge in einem metrischen Raum hat höchstens einen Grenzwert.

Proposition (2.3)

Sei X eine beliebige Menge. Eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X, δ_X) ausgestattet mit der diskreten Topologie konvergiert genau dann gegen einen Punkt $a \in X$, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x^{(n)} = a$ für alle $n \geq N$ existiert.

Beweis von Prop. (2.2).

geg. (X, d) metrischer Raum



$(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X

Ang., $a, b \in X$ sind zwei verschiedene Punkte, gegen die die Folge konvergiert. Sei $\varepsilon = d(a,b) > 0$

$a = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}$ mit $d(a, x^{(n)}) < \frac{1}{2}\varepsilon \ \forall n \geq N_1$

$b = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N}$ mit $d(b, x^{(n)}) < \frac{1}{2}\varepsilon \ \forall n \geq N_2$

Sei $N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow \varepsilon = d(a,b) \leq d(a, x^{(N)}) + d(x^{(N)}, b)$

$= d(a, x^{(N)}) + d(b, x^{(N)}) \underset{\substack{N \geq N_1 \\ N \geq N_2}}{<} \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon$ ↯ $\square$

gleichbedeutend: $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: \|x^{(n)} - a\|' < \varepsilon$

Beweis von Prop. (2.3)

X Menge, δ_X diskrete Metrik auf X, $a \in X$

$(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X z.zg.:

$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \iff \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: x^{(n)} = a$

„$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ Dann gilt $\forall n \geq N: \delta_X(a, x^{(n)}) =$

$d(a,a) = 0 < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$.

„$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon = 1$ Vor. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: \delta_X(a, x^{(n)}) < \varepsilon$

$\delta_X(a, x^{(n)}) \in \{0, 1\}$ $\forall n \geq N: \delta_X(a, x^{(n)}) = 0 \Rightarrow \forall n \geq N: x^{(n)} = a$ $\square$

$\Longrightarrow$

Äquivalente Normen $\Rightarrow$ gleicher Konvergenzbegriff

Proposition (2.4)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit zwei äquivalenten Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$, und seien d, d' die beiden von den Normen induzierten Metriken. Sei $a \in V$ und $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Genau dann konvergiert die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a im metrischen Raum (V, d), wenn sie im metrischen Raum (V, d') gegen a konvergiert.

Beweis von Prop (2.4):

geg $\mathbb{R}$-Vektorraum V, $\| \ \|$, $\| \ \|'$ äquivalente Normen auf V $\Rightarrow \exists\, \gamma, \gamma_1 \in \mathbb{R}^+$: $\|v\|' \leq \gamma \|v\|$, $\|v\| \leq \gamma_1 \|v\|'$ $\forall v \in V$

d, d' induzierte Metriken, geg durch

$$d(v,w) = \|w-v\|, \quad d'(v,w) = \|w-v\|'$$

$(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in V, $a \in V$ zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \text{ in } (V,d) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \text{ in } (V,d')$$

Bew.: nur "$\Rightarrow$" Vor: $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ in (V,d)

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. z.zg.: $\exists N \in \mathbb{N}: d'(a, x^{(n)}) < \varepsilon \ \forall n \geq N$

gleichbedeutend: $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: \|x^{(n)} - a\|' < \varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \text{ in } (V,d) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}:$$

$$\|x^{(n)} - a\| = d(a, x^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad \forall n \geq N \Rightarrow$$

$$\|x^{(n)} - a\|' \leq \gamma \|x^{(n)} - a\| < \gamma \, \frac{\varepsilon}{\gamma} = \varepsilon \quad \forall n \geq N \qquad \square$$

Konvergenz im $\mathbb{R}^m$

Satz (2.5)

Sei $m \in \mathbb{N}$. Eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^m$ konvergiert genau dann gegen einen Punkt $a \in \mathbb{R}^m$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = a_k$ für $1 \le k \le m$ erfüllt ist.

Beispiel: Konvergenz im $\mathbb{R}^2$:

betrachte $x^{(n)} = \left(1+\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

Satz (2.5) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right), \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n}\right)$

$\underset{\text{eine Var}}{\overset{\text{Analysis}}{=}} (1, 2)$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)$

<u>Beweis von Satz (2.5)</u>

geg. Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^m$, $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$

und ein Punkt $a = (a_1, \dots, a_m)$

z.zg.: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = a_k$ für $1 \le k \le m$

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ bedeutet Konvergenz bezüglich einer von einer beliebigen Norm induzierten Metrik

Wir entscheiden uns für $d_\infty(v,w) = \|v-w\|_\infty$

Erinnerung: $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|,\dots,|v_m|\}$

„$\Longrightarrow$" Vor: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ in $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$ $(*)$

Sei $k\in\{1,\dots,m\}$ zzg: $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = a_k$ in $\mathbb{R}$

Sei $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$. Vor $(*)$ $\Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\geq N:$

$\|x^{(n)}-a\|_\infty = d_\infty(a,x^{(n)}) < \varepsilon \longrightarrow$

$\max\{|x_1^{(n)}-a_1|, |x_2^{(n)}-a_2|, \dots, |x_m^{(n)}-a_m|\} < \varepsilon \quad \forall n\geq N$

$\Longrightarrow |x_k^{(n)}-a_k| < \varepsilon \ \forall n\geq N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = a_k$

"$\Leftarrow$" Vor.: $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = a_k$, $1 \le k \le m$

z.zg: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ in $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ Vor $\Rightarrow$ Für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$ gibt es ein $N_k \in \mathbb{N}$, so dass $|x_k^{(n)} - a_k| < \varepsilon \ \forall n \ge N_k$

Sei $N = \max\{N_1, \dots, N_k\}$ Dann gilt

$$|x_k^{(n)} - a_k| < \varepsilon \quad \forall n \ge N \ \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

$\Rightarrow$ erhalte $\forall n \ge N$ jeweils $d_\infty(a, x^{(n)}) = \|x^{(n)} - a\|_\infty$

$$= \max\{\underbrace{|x_1^{(n)} - a_1|}_{<\varepsilon}, \underbrace{|x_2^{(n)} - a_2|}_{<\varepsilon}, \dots, \underbrace{|x_m^{(n)} - a_m|}_{<\varepsilon}\} < \varepsilon \qquad \square$$

Cauchyfolgen in metrischen Räumen

Definition (2.6)

Eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ein einem metrischen Raum (X,d) wird Cauchyfolge genannt, wenn für jedes $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ ein $N\in\mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x^{(m)},x^{(n)})<\varepsilon$ für alle $m,n\in\mathbb{N}$ mit $m,n\geq N$ gilt.

Proposition (2.7)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit zwei äquivalenten Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$, und seien d,d' die beiden von den Normen induzierten Metriken. Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Genau dann ist die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (V,d), wenn sie eine Cauchyfolge in (V,d') ist.

Vollständige metrische Räume

Definition (2.8)

Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in (X, d) konvergiert. Ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, der vollständig bezüglich der induzierten Metrik ist, wird Banachraum genannt.

Anmerkungen:

- Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist eine Cauchyfolge.
- Es gibt Cauchyfolgen in metrischen Räumen, die nicht konvergieren.

geg.: metrischer Raum (X,d), $a \in X$,

$(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ in (X,d)

zzg.: $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in (X,d)

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Vor. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$

$d(a, x^{(n)}) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Für alle $m, n \geq N$ gilt dann

$$d(x^{(m)}, x^{(n)}) \leq d(x^{(m)}, a) + d(a, x^{(n)}) < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \quad \square$$

$1{,}4142135\ldots$

$1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \ldots$

Vollständigkeit in endlicher Dimension

Satz (2.9)

Jeder normierte, endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

zum Beweis von Satz (2.9):

Zeige nur die Vollständigkeit von $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$

Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^m$. z.zg.:

$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ in $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$, für ein $a \in \mathbb{R}^m$

Beh. $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ für $1 \le k \le m$

Sei $k \in \{1,\dots,m\}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, n' \geq N : \| x^{(n')} - x^{(n)} \|_\infty < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n, n' \geq N : \max\{ |x_1^{(n')} - x_1^{(n)}|, \dots, |x_m^{(n')} - x_m^{(n)}| \} < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n, n' \geq N : |x_k^{(n')} - x_k^{(n)}| < \varepsilon \quad \Rightarrow$ Beh.

Analysis einer Var. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = a_k$ für ein $a_k \in \mathbb{R}$, für $1 \le k \le m$

Setze $a = (a_1, \dots, a_m)$. Satz (2.5) $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x^{(n)} = a$

$\square$