§ 16. Allgemeine Theorie der Bilinearformen

Definition (16.1)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Bilinearform auf V ist eine Abbildung $b : V \times V \to \mathbb{R}$, die für $v, v', w, w' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgende Bedingungen erfüllt.

(i) $b(v + v', w) = b(v, w) + b(v', w)$

(ii) $b(v, w + w') = b(v, w) + b(v, w')$

(iii) $b(\lambda v, w) = \lambda b(v, w)$

(iv) $b(v, \lambda w) = \lambda b(v, w)$

Darstellungsmatrix einer Bilinearform

Definition (16.2)

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorrau, $\mathscr{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine geordnete Basis und b eine Bilinearform auf V. Dann nennt man die reelle $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Einträgen

$$a_{ij} \quad = \quad b(v_i, v_j) \qquad \text{für} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

die Darstellungsmatrix $M_{\mathscr{B}}(b)$ von b bezüglich $\mathscr{B}$.

Jede Bilinearform ist durch die Einträge der Darstellungsmatrix eindeutig festgelegt.

Existenz von Bilinearformen zu vorgegebenen Darstellungsmatrizen

Satz (16.3)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathscr{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine geordnete Basis von V. Dann existiert für jede Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine eindeutig bestimmte Bilinearform b auf V mit $M_{\mathscr{B}}(b) = A$.

Berechnung von Bilinearformen mit Darstellungsmatrizen

Proposition (16.4)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathscr{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine geordnete Basis von V. Dann gilt für alle $v, w \in V$ jeweils

$$b(v, w) \quad = \quad {}^{\mathrm{t}}\Phi_{\mathscr{B}}(v)\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(b)\Phi_{\mathscr{B}}(w).$$

Def. V $\mathbb{R}$-Vektorraum. Bilinearform auf V = Abbildung $b: V \times V \to \mathbb{R}$ mit

$b(v+v', w) = b(v,w) + b(v',w)$, $b(\lambda v, w) = \lambda b(v,w)$

$b(v, w+w') = b(v,w) + b(v,w')$, $b(v, \lambda w) = \lambda b(v,w)$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v, v', w, w' \in V$

Def. V n-dim. $\mathbb{R}$-VR, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ geordnete Basis

$b: V \times V \to \mathbb{R}$ Bilinearform

Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(b)$ = Matrix $A \in M_{n,\mathbb{R}}$ mit den Einträgen $a_{ij} = b(v_i, v_j)$ $(1 \leq i, j \leq n)$

Prop (16.4) V, $\mathcal{B}$, b wie oben

Dann gilt $b(v,w) = {}^t\Phi_{\mathcal{B}}(v) M_{\mathcal{B}}(b) \Phi_{\mathcal{B}}(w)$

$$\sum_{i=1} \sum_{j=1} t_{ik} t_{jl} b(w_i, w_j) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} t_{ik} t_{jl} b_{ij}$$

Bew.: $\Phi_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ Sei $A = (a_{ij}) = M_B(b)$

$\Phi_B(w) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \Rightarrow w = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$

Dann gilt einerseits $(\lambda_1 \dots \lambda_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} =$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_{k1} \cdots \sum_{k=1}^n \lambda_k a_{nn}\right) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_k \mu_l a_{kl}$$

andererseits. $b(v,w) = b\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k, \sum_{l=1}^n \mu_l v_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_k \mu_l b(v_k, v_l)$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_k \mu_l a_{kl}$$

$\square$

Transformationsformel für Bilinearformen

Satz (16.5)

- Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und b eine Bilinearform auf V.
- Seien $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ zwei geordnete Basen von V und $A = M_{\mathscr{A}}(b)$, $B = M_{\mathscr{B}}(b)$ die Darstellungsmatrizen von b bezüglich dieser Basen.
- Sei $T = T^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}$ die Matrix des Basiswechsels von $\mathscr{A}$ nach $\mathscr{B}$.

Dann gilt $A = {}^{\mathrm{t}}TBT$.

Symmetrische Bilinarformen

Definition (16.6)

Eine Bilinearform b auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V wird symmetrisch genannt, wenn $b(v, w) = b(w, v)$ für alle $v, w \in V$ gilt.

Proposition (16.7)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und b eine Bilinearform auf V. Sei $\mathscr{B}$ eine beliebige Basis von V und $A = M_{\mathscr{B}}(b)$. Unter diesen Voraussetzungen ist b genau dann symmetrisch, wenn A symmetrisch ist.

b symmetrisch $\iff$ A symmetrisch $({}^tA = A)$

Satz (16.5) (Transformationsformel für Bilinearformen)

V n-dim $\mathbb{R}$-VR, b Bilinearform auf V,
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ geordnete Basen von V
$A = M_{\mathcal{A}}(b)$, $B = M_{\mathcal{B}}(b)$, $T = T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$. Dann gilt

$$A = {}^tT\, B\, T$$

Bew: Sei $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $T = (t_{ij})$,
$\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$. Nach Def. von $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ gilt $v_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} w_i$ für $1 \le j \le n$. Daraus folgt

$$a_{kl} = b(v_k, v_l) = b\Big(\sum_{i=1}^n t_{ik} w_i, \sum_{j=1}^n t_{jl} w_j\Big) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ik} t_{jl}\, b(w_i, w_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ik} t_{jl}\, b_{ij} \quad \text{für } 1 \le k, l \le n$$

$\ldots = \sum_{i=1} \sum_{j=1} t_{ik} t_{jl} b_{ij}$ $\quad 1 \le k, l \le n$

Sei $C = {}^tTB$ $\quad c_{rs} = \sum_{i=1}^{n} t_{ir} b_{is}$ für $1 \le r, s \le n$

$${}^tTBT = CT \Rightarrow a_{kl} = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} t_{jl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ik} b_{ij} t_{jl}$$

Damit ist gezeigt, dass $b(v_k, v_l) = a_{kl}$ auch der Eintrag von ${}^tTBT$ an der Stelle (k, l) $\square$

<u>Def (16.6)</u> Eine Bilinearform b auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V wird <u>symmetrisch</u> genannt, wenn $b(v,w) = b(w,v)$ für alle $v, w \in V$ gilt.

<u>Prop. (16.7)</u> V endl.-dim. $\mathbb{R}$-VR, b Bilinearform, $\mathcal{B}$ geordnete Basis, $A = M_{\mathcal{B}}(b)$. Dann gilt:

b symmetrisch $\iff$ A symmetrisch $({}^tA = A)$

Positiv definite Bilinearformen.

Definition (16.8)

(i) Eine symmetrische Bilinearform b auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V wird positiv definit genannt, wenn $b(v, v) > 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$ gilt. Man bezeichnet eine solche Bilinearform auch als Skalarprodukt auf V.

(ii) Ein Paar (V, b) bestehend aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einem Skalarprodukt b auf V wird ein euklidischer Vektorraum genannt.

Beispiel: Das euklidische Standard-Skalarprodukt $\langle\cdot, \cdot\rangle$ auf dem $\mathbb{R}^n$ ist positiv definit.

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in euklidischen Vektorräumen

Proposition (16.9)

Sei (V, b) ein euklidischer Vektorraum und die Abbildung $\| \cdot \|_b : V \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch $\|v\|_b = \sqrt{b(v, v)}$ für alle $v \in V$. Dann gilt $|b(v, w)| \leq \|v\|_b \|w\|_b$ für alle $v, w \in V$ mit Gleichheit genau dann, wenn das Paar (v, w) linear abhängig ist.

Def (16.8) V $\mathbb{R}$-Vektorraum, b symm. Bilinearform

b positiv definit $\Leftrightarrow$ $b(v,v) > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0_V\}$

Skalarprodukt = positiv definite (symm.) Bilinearform

Ist b Skalarprodukt auf V, dann nennt man (V, b) einen euklidischen Vektorraum.

Prop. (16.9) (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sei (V, b) ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt

$$|b(v,w)| \leq \sqrt{b(v,v)}\,\sqrt{b(w,w)} \quad \forall v,w \in V.$$

Bew: Seien $v,w \in V$, setze $\lambda = \frac{b(v,w)}{b(v,v)}$. Dann gilt $b(v, w-\lambda v) = 0$, denn:

$$b(v, w-\lambda v) = b(v,w) - \lambda b(v,v) = b(v,w) - \frac{b(v,w)}{b(v,v)} b(v,v) = 0$$

$$0 \leq b(w-\lambda v, w-\lambda v) = b(w,w) - 2b(\lambda v, w) + b(\lambda v, \lambda v)$$

$$= b(w,w) - 2\lambda b(v,w) + \lambda^2 b(v,v) \Rightarrow$$

einsetzen von $\lambda \Rightarrow b(w,w) - 2\frac{b(v,w)^2}{b(v,v)} + \frac{b(v,w)^2}{b(v,v)^2} b(v,v) \geq 0$

$$\Rightarrow b(w,w) - 2\frac{b(v,w)^2}{b(v,v)} + \frac{b(v,w)^2}{b(v,v)} \geq 0$$

$$\Rightarrow b(w,w) \geq \frac{b(v,w)^2}{b(v,v)} \Rightarrow b(v,w)^2 \leq b(v,v)\, b(w,w) \qquad \square$$

$$\xRightarrow{\sqrt{}} |b(v,w)| \leq \sqrt{b(v,v)}\sqrt{b(w,w)}$$

Normen auf $\mathbb{R}$-Vektorräumen

Definition (16.10)

Eine Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Für jedes $v \in V$ gilt $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0_V$ ist.

(ii) Es gilt $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$.

(iii) Für alle $v, w \in V$ gilt $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Def. (16.10) Eine **Norm** auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine Abb. $\| \ \| : V \to \mathbb{R}_+$ mit den Eigenschaften

(i) $\forall v \in V: \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$

(ii) $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}: \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

(iii) $\forall v, w \in V: \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Satz (16.11): (V, b) euklidischer Vektorraum

Dann gilt (i) $\| \ \|_b, \perp_b$ erfüllen $(L_1)-(L_3)$, $(O_1)-(O_3)$ und den Satz des Pythagoras

(ii) $\sphericalangle_b$ erfüllt (W_0) bis (W_3)

Insb. ist $\| \ \|_b$ eine Norm auf V, die durch b auf V **induzierte** Norm.

Geometrie in euklidischen Vektorräumen

Sei (V, b) ein euklidischer Vektorraum.

- Die Abbildung $\| \cdot \|_b : V \to \mathbb{R}_+,\ v \mapsto \sqrt{b(v,v)}$ bezeichnet man als die durch b auf V induzierte euklidische Norm.
- Auf V eine kann durch $v \perp_b w \Leftrightarrow b(v,w) = 0$ eine Orthogonalitätsrelation $\perp_b$ definiert werden.
- Für zwei Vektoren v, w ungleich Null ist der Winkel zwischen diesen Vektoren bezüglich b die eindeutig bestimmte Zahl $\angle_b(v,w) \in [0,\pi]$ mit $\cos \angle_b(v,w) = \frac{b(v,w)}{\|v\|_b \|w\|_b}$.

Def Sei (V, b) ein euklidischer Vektorraum

Seien $v, w \in V$. Dann ist

$\|v\|_b = \sqrt{b(v,v)}$ die Länge von v bzgl. b

Man setzt $v \perp_b w \iff b(v,w) = 0$

Sind $v, w \neq 0_V$, dann nennt man die eind. best. Zahl

$\sphericalangle_b(v,w) \in [-\pi, \pi]$ mit $\cos \sphericalangle_b(v,w) = \dfrac{b(v,w)}{\|v\|_b \|w\|_b}$

den Winkel zwischen v und w bzgl. b.

Geometrie in euklidischen Vektorräumen (Forts.)

Satz (16.11)

(i) Die Abbildung $\|\cdot\|_b$ besitzt die Eigenschaften (L_1) bis (L_3) aus § 15; insbesondere handelt es sich tatsächlich um eine Norm.

(ii) Die Relation $\perp_b$ besitzt die Eigenschaften (O_1) bis (O_3).

(iii) Es gilt der Satz des Pythagoras.

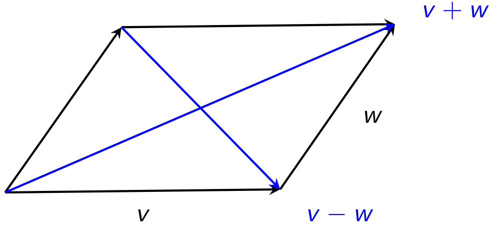
(iv) Die Winkelfunktion $\angle_b$ hat die Eigenschaften (W_0) bis (W_3).

Kriterium für induzierte Normen

Satz (16.12)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Norm $\|\cdot\|$ auf V wird genau dann durch ein Skalarprodukt b induziert, wenn für alle $v, w \in V$ die sog. Parallelogrammgleichung

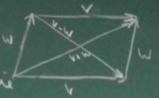
$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 \quad = \quad 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \qquad \text{erfüllt ist.}$$



(ii) $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}: \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$

(iii) $\forall v, w \in V: \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

<u>Satz (16.12)</u> Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\| \ \|$ eine Norm. Genau dann gilt $\|\cdot\| = \|\cdot\|_b$ für ein Skalarprodukt b auf V, wenn die <u>Parallelogrammgl.</u> $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ für alle $v, w \in V$ erfüllt ist.



Bew: „$\Longrightarrow$" zeige: $\| \ \|_b$ erfüllt die Parallelogrammgleichung

$$\|v+w\|_b^2 + \|v-w\|_b^2 = b(v+w, v+w) + b(v-w, v-w) =$$

$$b(v,v) + \cancel{2b(v,w)} + b(w,w) + b(v,v) \cancel{- 2b(v,w)} + b(w,w)$$

$$= 2b(v,v) + 2b(w,w) = 2\|v\|_b^2 + 2\|w\|_b^2 . \qquad \square$$

Definition der positiv definiten Matrizen

Definition (16.13)

Eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{R}}$ wird als positiv definit bezeichnet, wenn die (eindeutig bestimmte) Bilinearform b auf $\mathbb{R}^n$ mit der Darstellungsmatrix $\mathscr{M}_{\mathscr{E}_n}(b) = A$ bezüglich der Einheitsbasis $\mathscr{E}_n$ positiv definit ist.

Dies ist gleichbedeutend mit ${}^{\mathrm{t}}vAv > 0$ für alle $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

Das Hurwitz-Kriterium für positiv definite Matrizen

Satz (16.14)

Sei $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine symmetrische Matrix und A_k jeweils die linke obere $k \times k$-Teilmatrix, für $1 \leq k \leq n$. Genau dann ist A positiv definit, wenn $\det(A_k) > 0$ für $1 \leq k \leq n$ erfüllt ist.

Def. (16.13) $A \in M_{n,\mathbb{R}}$ heißt <u>positiv definit</u> $:\Leftrightarrow$

$A = M_{\mathcal{E}_n}(b)$ für eine positiv definite Bilinearform b auf $\mathbb{R}^n$ ($\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$ Einheitsbasis)

gleichbedeutend: ${}^t v A v > 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

Satz (16.14) Hurwitz-Kriterium

Sei $A \in M_{n,\mathbb{R}}$ symmetrisch. Für $1 \leq k \leq n$ sei A_k jeweils die linke obere $(k \times k)$-Teilmatrix. Dann gilt

A positiv definit $\Leftrightarrow \det(A_k) > 0$ für $1 \leq k \leq n$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 1 & 19 & 10 \\ 9 & 10 & 30 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A_1) = \det(5) = 5 > 0$

$\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 19 \end{pmatrix} = 94 > 0$, $\det(A_3) = \det(A) = 961 > 0$

$\Longrightarrow$ A ist positiv definit

<u>Bew.</u> von (16.14)

Notation: $\mathcal{E}_k = (e_1, \ldots, e_k)$, $U_k = \mathrm{lin}(\mathcal{E}_k) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$

$b_k = b|_{U_k \times U_k}$. Dann gilt $A_k = M_{\mathcal{E}_k}(b_k)$

„$\Longrightarrow$" b positiv definit $\Longrightarrow$ $\exists$ ON-Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V bezüglich b, d.h. $b(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq n$, so dass $\mathcal{B}_k = (v_1, \ldots, v_k)$ jeweils die ON-Basis von U_k ist

$\mathcal{B}_k$ ON-Basis $\Longrightarrow$ $M_{\mathcal{B}_k}(b_k) = E_k$. Transformationsformel für Bilinearformen $\Longrightarrow$ $A_k = M_{\mathcal{E}_k}(b_k) = {}^tT^{\mathcal{E}_k}_{\mathcal{B}_k} M_{\mathcal{B}_k}(b_k) T^{\mathcal{E}_k}_{\mathcal{B}_k} = {}^tT^{\mathcal{E}_k}_{\mathcal{B}_k} T^{\mathcal{E}_k}_{\mathcal{B}_k} \Longrightarrow \det(A_k) = \det(T^{\mathcal{E}_k}_{\mathcal{B}_k})^2 > 0$

$${}^tT_{B_k} M_{B_k}(b_k)\, T_{B_k} = {}^tT_{B_k} T_{B_k} \Rightarrow \det(A_k) = \det(T_{B_k})^2 > 0$$

"$\Leftarrow$" zeige durch vollst. Ind. b_k positiv definit

Ind-Anf. $k=1$ einfach, s. Skript

Ind-Schritt $k \mapsto k+1$. Vor.: b_k positiv definit z. zg. b_{k+1} pos. def.

b_k pos. definit $\Rightarrow \exists$ ON-Basis $(u_1,\dots,u_k)$ von U_k bzgl. b_k

$$w = e_{k+1} - \underbrace{\pi_{U_k}(e_{k+1})}_{\text{Orthogonalproj. von } e_{k+1} \text{ auf } U_k}$$

Dann folgt $b(w,u_j) = 0$ für $1 \le j \le k$ $\Rightarrow$ Die Darst.-matrix

Setze $B = (u_1,\dots,u_k,w) \Rightarrow M_B(b_{k+1}) = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right)$

mit $a = b(w,w)$ Setze $T = T^{\mathcal{E}_{k+1}}_{B} \Rightarrow$

$$A_{k+1} = M_{\mathcal{E}_{k+1}}(b_{k+1}) = {}^tT\, M_B(b_{k+1})\, T \Rightarrow$$

$\det(A_{k+1}) = \det(T)^2 a \quad \det(A_{k+1}) > 0 \Rightarrow$

$b(w,w) = a > 0$ Daraus folgt, dass b_{k+1} positiv definit ist. $\square$