Definition der orthogonalen Matrizen

Definition (15.23)

- (i) Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ wird **orthogonal** genannt, wenn ${}^tAA = E^{(n)}$ gilt.
- (ii) Die orthogonalen Matrizen bilden eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$, die sogenannte **orthogonale Gruppe** $O(n)$.
- (iii) Die Untergruppe $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$ wird **spezielle orthogonale Gruppe** genannt.

Beispiel: Drehmatrizen sind Elemente der $SO(2)$.

Charakterisierung durch das euklidische Skalarprodukt

Proposition (15.24)

Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ ist genau dann orthogonal, wenn $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Definition der Bewegungen

Definition (15.25)

Eine **Bewegung** im $\mathbb{R}^n$ ist eine bijektive, abstandserhaltende Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, also eine bijektive Abbildung mit der Eigenschaft $\|\phi(v) - \phi(w)\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Zwei Hilfsaussagen

Lemma (15.26)

Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}\|v + w\|^2 - \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2}\|w\|^2$.

Lemma (15.27)

Sei $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit $\langle \psi(v), \psi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Matrix $A \in O(n)$ mit $\psi = \phi_A$, insbesondere ist ψ linear.

$$\langle \phi_A(v), \phi_A(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \text{folgt } A \in O(n), \text{ nach Prop (15.24)} \quad \square$$

Beweis von Lemma (15.26)

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w \rangle = \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \quad \Rightarrow \\ \langle v, w \rangle &= \frac{1}{2} (\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2) \quad \square \end{aligned}$$

Beweis von Lemma (15.27)

Sei Abb. $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\langle \psi(v), \psi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$
 $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$. Beh. $\psi = \phi_A$ für eine orth. Matrix A
Wissen: $(e_1, \dots, e_n)$ ist ON-Basis des $\mathbb{R}^n$. Vor $\Rightarrow$
 $(\psi(e_1), \dots, \psi(e_n))$ ist ON-Basis ($\forall i, j: \langle \psi(e_i), \psi(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$) Sei $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

Stelle $\psi(v)$ durch die ON-Basis dar. $\rightarrow$

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}. \quad \psi(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(e_i)$$

$$\text{Für } 1 \leq j \leq n \text{ gilt } \langle \psi(v), \psi(e_j) \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(e_i), \psi(e_j) \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \psi(e_i), \psi(e_j) \rangle = \sum_{i=1}^n \delta_{ij} \lambda_i = \lambda_j$$

$$\Rightarrow \psi(v) = \sum_{j=1}^n \langle \psi(v), \psi(e_j) \rangle \psi(e_j) = \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle \psi(e_j) = \sum_{j=1}^n v_j \psi(e_j)$$

Zeige nun, dass ψ linear ist. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\psi(v+w) = \sum_{j=1}^n (v_j + w_j) \psi(e_j) = \sum_{j=1}^n v_j \psi(e_j) + \sum_{j=1}^n w_j \psi(e_j)$$

$$= \psi(v) + \psi(w), \quad \psi(\alpha v) = \sum_{j=1}^n \alpha v_j \psi(e_j) = \alpha \sum_{j=1}^n v_j \psi(e_j) = \alpha \psi(v)$$

ψ linear $\Rightarrow \exists A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ mit $\psi = \phi_A$. Aus $\langle \phi_A(v), \phi_A(w) \rangle = \langle v, w \rangle \forall v, w \in \mathbb{R}^n$ folgt $A \in O(n)$, nach Prop (15.24) $\square$

Explizite Beschreibung der Bewegungen

Satz (15.28)

Die Bewegungen in $\mathbb{R}^n$ sind genau die linearen Abbildungen der Form $\tau_u \circ \phi_A$, mit $u \in \mathbb{R}^n$ und $A \in O(n)$. Die Darstellung dieser Form ist eindeutig. Liegt A sogar in $SO(n)$, dann spricht man von einer **orientierungserhaltenden**, ansonsten von einer **orientierungsumkehrenden** Bewegung.

Die Bewegungen des $\mathbb{R}^2$ sind Translationen, Drehungen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen.

Translationen = Abbildungen der Form
 $\tau_u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, v \mapsto v + u \quad (u \in \mathbb{R}^n)$

Beweis von Satz (15.28): geg. Bewegung $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

z.zg: $\exists u \in \mathbb{R}^n, A \in O(n)$ mit $\phi = \tau_u \circ \phi_A$

Sei $u = \phi(0_{\mathbb{R}^n})$, setze $\psi = \tau_u^{-1} \circ \phi$ klar ψ ist

Bewegung, außerdem: $\|\psi(v)\| = \|\psi(v) - 0_{\mathbb{R}^n}\| =$

$$\|\psi(v) - \psi(0_{\mathbb{R}^n})\| = \|v - 0_{\mathbb{R}^n}\| = \|v\|$$

$$\text{Seien } v, w \in \mathbb{R}^n \quad \langle \psi(v), \psi(w) \rangle = -\langle \psi(v), -\psi(w) \rangle$$

$$= -\frac{1}{2} \|\psi(v) - \psi(w)\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi(v)\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi(w)\|^2$$

$$\text{Seien } v, w \in \mathbb{R}^n \quad \langle \psi(v), \psi(w) \rangle = -\langle \psi(v), -\psi(w) \rangle \\ = -\frac{1}{2} \|\psi(v) - \psi(w)\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi(v)\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi(w)\|^2$$

$$= -\frac{1}{2} \|v - w\|^2 + \frac{1}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{2} \|w\|^2 = -\langle v, -w \rangle = \langle v, w \rangle$$

$$(15.27) \Rightarrow \exists A \in O(n) \text{ mit } \psi = \phi_A \Rightarrow$$

$$\phi = \tau_u \circ \psi = \tau_u \circ \phi_A$$

□

§ 16. Allgemeine Theorie der Bilinearformen

Definition (16.1)

Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine **Bilinearform** auf V ist eine Abbildung $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, die für $v, v', w, w' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgende Bedingungen erfüllt.

- (i) $b(v + v', w) = b(v, w) + b(v', w)$
- (ii) $b(v, w + w') = b(v, w) + b(v, w')$
- (iii) $b(\lambda v, w) = \lambda b(v, w)$
- (iv) $b(v, \lambda w) = \lambda b(v, w)$

Beispiele für Bilinearformen

- (i) Das euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Bilinearformen auf dem $\mathbb{R}^n$.
- (ii) Ist $A \in \mathcal{M}_{m \times n, \mathbb{R}}$ und bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^m$, dann ist durch $b(v, w) = \langle Av, Aw \rangle$ eine Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert.
- (iii) Seien V, W zwei $\mathbb{R}$ -Vektorraum, b eine Bilinearform auf W und $\phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann ist durch $\tilde{b}(v, w) = b(\phi(v), \phi(w))$ eine Bilinearform auf V definiert.
- (iv) Sei V der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Dann ist durch $b(f, g) = f'(0)g'(0)$ eine Bilinearform auf V definiert.
- (v) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und V der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann ist durch

$$b(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

eine Bilinearform auf V definiert.

Beispiel (ii) geg $A \in M_{m \times n, \mathbb{R}}$, definiere

$b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch $b(v, w) = \langle Av, Aw \rangle$

Beh. b ist Bilinearform Seien $v, v', w, w' \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

$$b(v+v', w) = \langle A(v+v'), Aw \rangle = \langle Av + Av', Aw \rangle = \langle Av, Aw \rangle + \langle Av', Aw \rangle = b(v, w) + b(v', w)$$

übrige Regeln analog

zu Beispiel (iii) Seien $v, v' \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\tilde{b}(\lambda v, v') = b(\phi(\lambda v), \phi(v')) = b(\lambda \phi(v), \phi(v')) = \lambda b(\phi(v), \phi(v')) = \lambda \tilde{b}(v, v')$$

zu Beispiel (iv) Seien $f, g, h \in V$

$$b(f+g, h) = (f+g)'(0) h'(0) = (f'(0) + g'(0)) h'(0) =$$

$$L(f+g, h) = (f+g)'(0) h'(0) = (f'(0)+g'(0))h'(0) =$$

$$f'(0)h'(0) + g'(0)h'(0) = L(f, h) + L(g, h)$$

zu Beispiel (v) Seien $f, g, h \in V$

$$L(f, g+h) = \int_a^b f(x)(g+h)(x) dx =$$

$$\int_a^b f(x)(g(x)+h(x)) dx = \int_a^b (f(x)g(x) + f(x)h(x)) dx =$$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)h(x) dx = L(f, g) + L(f, h)$$

Sei $n \in \mathbb{N}$, V n -dim. $\mathbb{R}$ -Vektorraum

Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis

Sei $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf V

Seien $v, w \in V \Rightarrow \exists \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}: v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, w = \sum_{j=1}^n \mu_j v_j$

$$\Rightarrow b(v, w) = b\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\right) = \sum_{i=1}^n b\left(\lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i b\left(v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \underline{b(v_i, v_j)}$$

$\Rightarrow$ Die Bilinearform b ist durch die Zahlen $b(v_i, v_j)$ eindeutig festgelegt!

Darstellungsmatrix einer Bilinearform

Definition (16.2)

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis und b eine Bilinearform auf V . Dann nennt man die reelle $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ mit den Einträgen

$$a_{ij} = b(v_i, v_j) \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n$$

die **Darstellungsmatrix** $M_{\mathcal{B}}(b)$ von b bezüglich $\mathcal{B}$.

Jede Bilinearform ist durch die Einträge der Darstellungsmatrix **eindeutig festgelegt**.

Beispiel für eine Darstellungsmatrix:

$V = \mathbb{R}$ -Vektorraum der Polynomfkt. vom Grad ≤ 2

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$B = (1, x, x^2)$ geordnete Basis von V

Berechnung der Einträge von $M_B(\langle \cdot, \cdot \rangle) \in M_{3, \mathbb{R}}$:

$$a_{11} = \langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1 \cdot 1 dx = [x]_0^1 = 1$$

$$a_{12} = \langle 1, x \rangle = \int_0^1 1 \cdot x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} = \langle x, 1 \rangle = a_{21}$$

$$a_{13} = \langle 1, x^2 \rangle = \int_0^1 1 \cdot x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} = a_{31}$$

$$\text{Ergebnis: } M_B(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Existenz von Bilinearformen zu vorgegebenen Darstellungsmatrizen

Satz (16.3)

Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V . Dann existiert für jede Matrix $A \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{R}}$ eine eindeutig bestimmte Bilinearform b auf V mit $M_{\mathcal{B}}(b) = A$.

Berechnung von Bilinearformen mit Darstellungsmatrizen

Proposition (16.4)

Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V . Dann gilt für alle $v, w \in V$ jeweils

$$b(v, w) = {}^t\Phi_{\mathcal{B}}(v) \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b) \Phi_{\mathcal{B}}(w).$$

$$b(2x+3, 4x+5) = \int_0^1 (2x+3)(4x+5) dx =$$

$$\int_0^1 (8x^2 + 22x + 15) dx = \left[\frac{8}{3}x^3 + 11x^2 + 15x \right]_0^1$$

$$= \frac{8}{3} + 11 + 15 = \frac{8}{3} + \frac{78}{3} = \frac{86}{3}$$

$$\Phi_{\mathbb{B}}(2x+3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Phi_{\mathbb{B}}(4x+5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (3 \ 2 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = (4 \ \frac{13}{6} \ \frac{3}{2}) \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 20 + \frac{52}{6} = \frac{172}{6}$$

$$= \frac{86}{3}$$