Sinnvolle Eigenschaften einer Winkelfunktion

Eine Abbildung, die jedem Paar (v, w) von Vektoren ungleich null eine Zahl $[0, \pi]$ (Winkel im Bogenmaß) zuordnet, sollte folgende Eigenschaften besitzen, wenn sie eine geometrisch sinnvoll definierte Winkelfunktion sein soll.

(W_0) Es gilt $\angle(v, w) = \angle(w, v)$ und $\angle(v, v) = 0$.

(W_1) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ gilt $\angle(v, \lambda w) = \angle(v, w)$.

(W_2) Gilt $(w - v) \perp v$, dann folgt daraus $\cos \angle(v, w) = \frac{\|v\|}{\|w\|}$.

(W_3) Es gilt $\angle(v, -w) = \pi - \angle(v, w)$.

Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren

Definition (15.7)

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $v, w \neq (0,0)$. Dann ist der Winkel zwischen v und w die eindeutig bestimmte Zahl $\angle(v,w) \in [0,\pi]$ mit der Eigenschaft

$$\cos \angle(v,w) \quad = \quad \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

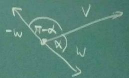
Eindeutigkeit der Winkelfunktion

Proposition (15.9)

Sei α eine Vorschrift, die jedem Paar (v, w) von Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ ungleich Null eine Zahl $\alpha(v, w) \in [0, \pi]$ zuweist zuordnet derart, dass die Bedingungen (W_0) bis (W_3) erfüllt sind. Dann gilt $\alpha(v, w) = \angle(v, w)$, wobei $\angle$ wie in Def. (15.7) definiert ist.

Bew. von Prop. (15.9): geg. $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

z.zg.: $\cos \alpha(v,w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \, \|w\|} \in [-1, 1]$



Seien v, w linear unabh., $\lambda := \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2}$

gezeigt: $w - \lambda v \perp v \Rightarrow \langle w - \lambda v, v \rangle = 0$

1. Fall: $\lambda > 0$

$$\cos \alpha(v,w) \overset{(W_1)}{=} \cos \alpha(\lambda v, w) \overset{(W_2)}{=} \frac{\|\lambda v\|}{\|w\|} = \frac{|\langle v,w \rangle|}{\|v\|^2} \frac{\|v\|}{\|w\|}$$

$$= \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

2. Fall: $\lambda < 0$, setze $w' = -w \Rightarrow -\lambda > 0$, $(w' - (-\lambda) v) \perp v$

$$\Rightarrow \cos \alpha(v,w) = \cos(\pi - \alpha(v,w')) = -\cos \alpha(v,w') \overset{s.o.}{=}$$

$$- \frac{\langle v, w' \rangle}{\|v\| \, \|w'\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$ $\square$

ebenso: $\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \overset{s.o.}{=} \frac{\mu}{|\mu|} \frac{\langle v, v \rangle}{\|v\| \cdot \|v\|} = (-1) \cdot 1 = -1$

Betrachte nun den Fall, dass v, w linear abhängig

$\Rightarrow w = \mu v$ für ein $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

<u>1. Fall</u>: $\mu > 0$ $\quad \alpha(v,w) = \alpha(v,\mu v) = \alpha(v,v) = 0$

$\Rightarrow \cos \alpha(v,v) = \cos(0) = 1$

ebenso: $\dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \dfrac{\langle v,\mu v\rangle}{\|v\| \|\mu v\|} = \dfrac{\mu}{|\mu|} \dfrac{\langle v,v\rangle}{\|v\| \|v\|} = 1$

<u>2. Fall</u>: $\mu < 0$ $\quad \alpha(v,w) = \alpha(v,\mu v) = \pi - \alpha(v,(-\mu)v) = \pi$

$\Rightarrow \cos \alpha(v,u) = \cos(\pi) = -1$

ebenso: $\dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \overset{\text{s.o.}}{=} \dfrac{\mu}{|\mu|} \dfrac{\langle v,v\rangle}{\|v\| \cdot \|v\|} = (-1) \cdot 1 = -1$ $\quad \square$

Satz (15.10)

Die durch Def. (15.2) definierte Längenfunktion auf dem $\mathbb{R}^n$ erfüllt die Bedingungen (L_0) bis (L_3). Ebenso sind für die dort definierte Relation $\perp$ die Bedingungen (O_0) bis (O_3) erfüllt, und der Satz des Pythagoras ist gültig.

Satz (15.11)

Die durch Def. (15.7) festgelegte Winkelfunktion $\angle$ besitzt die Eigenschaften (W_0) bis (W_3).

Beweis von Prop. (15.10):

Zeige nur die Δ-Ungleichung. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\|v+w\| \overset{(**)}{\le} \|v\| + \|w\| \iff \|v+w\|^2 \le (\|v\| + \|w\|)^2 \iff$$

$$\langle v+w, v+w \rangle \le \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \iff$$

$$\langle v, v+w \rangle + \langle w, v+w \rangle \le \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \iff$$

$$\langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \le \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2$$

$$\iff \cancel{\langle v, v \rangle} + \cancel{2}\langle v, w \rangle + \cancel{\langle w, w \rangle} \le \cancel{\|v\|^2} + \cancel{2}\|v\| \cdot \|w\| + \cancel{\|w\|^2}$$

$$\iff \langle v, w \rangle \overset{(*)}{\le} \|v\| \cdot \|w\|$$ Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$

$$|\langle v, w \rangle| \le \|v\| \cdot \|w\| \Rightarrow$$ $(*)$ gilt immer, also auch $(**)$ $\square$

Orthogonalprojektionen auf Untervektorräume

Definition (15.12)

Sei U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Eine Orthogonalprojektion auf U ist eine lineare Abbildung $\pi_U : \mathbb{R}^n \to U$ mit der Eigenschaft $\pi_U|_U = \mathrm{id}_U$ und $(v - \pi_U(v)) \perp U$ für alle $v \in V$. Dabei bedeutet $v \perp U$ für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, dass $v \perp u$ für alle $u \in U$ gilt.

Definition der Orthonormalbasen

Definition (15.13)

Sei U ein m-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Eine geordnete Basis $\mathscr{B} = (u_1, ..., u_m)$ von U wird Orthonormalbasis (kurz *ON*-Basis) von U genannt, wenn

$$\langle u_k, u_\ell \rangle \quad = \quad \delta_{k\ell} \qquad \text{für} \quad 1 \leq k, \ell \leq n \quad \text{erfüllt ist.}$$

Berechnung von Orthogonalprojektionen

Proposition (15.14)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein m-dimensionaler Untervektorraum und $(u_1, ..., u_m)$ eine ON-Basis von U. Dann ist durch

$$\pi_U(v) \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} \langle u_k, v \rangle u_k$$

eine Orthogonalprojektion auf U definiert.

Bew. von Prop. (15.14): $m = \dim U$, $(u_1, \dots, u_m)$ ON-Basis

z.zg.: $\pi_U : V \to U$, $v \mapsto \sum_{k=1}^{m} \langle v, u_k \rangle u_k$ ist

Orthogonalproj., d.h. (i) $\pi_U | U = id$ (ii) $\forall v \in V : v - \pi_U(v) \perp U$

(0) π_U ist linear

zu (i) Sei $u \in U$. $(u_1, \dots, u_m)$ Basis $\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

mit $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_k u_k \Rightarrow \pi_U(u) = \sum_{k=1}^{m} \langle u, u_k \rangle u_k =$

$$\sum_{k=1}^{m} \left\langle \sum_{l=1}^{m} \lambda_l u_l , u_k \right\rangle u_k \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \langle u_l, u_k \rangle u_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \delta_{kl} u_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k 1 \cdot u_k = u$$

zu (0) siehe Skript

z.zg: $\pi_U : V \to U,\ v \mapsto \sum^{m} \langle v, u_k \rangle u_k$ ist … $(u_1, \dots, u_m)$ ON-Basis

zu (*): $\langle u_1 + u_2 + u_3, w \rangle = \langle u_1, w \rangle + \langle u_2, w \rangle + \langle u_3, w \rangle$

$$\left\langle \sum_{l=1}^{m} \lambda_l u_l, u_k \right\rangle u_k = \sum_{l=1}^{m} \langle \lambda_l u_l, u_k \rangle u_k$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \langle u_l, u_k \rangle u_k$$

zu (ii) Sei $v \in V$ z.zg.: $v - \pi_U(v) \perp U$. Sei $k \in \{1, \dots, m\}$

zeige: $v - \pi_U(v) \perp u_k$ $\quad \langle v - \pi_U(v), u_k \rangle = \langle v, u_k \rangle - \langle \pi_U(v), u_k \rangle$

$$= \langle v, u_k \rangle - \left\langle \sum_{l=1}^{m} \langle v, u_l \rangle u_l, u_k \right\rangle = \langle v, u_k \rangle - \sum_{l=1}^{m} \langle v, u_l \rangle \langle u_l, u_k \rangle$$

$$= \langle v, u_k \rangle - \sum_{l=1}^{m} \langle v, u_l \rangle \delta_{lk} = \langle v, u_k \rangle - \langle v, u_k \rangle = 0$$

Sei nun $u \in U$ bel., zeige $v - \pi_U(v) \perp u$. Schreibe $u = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l u_l$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. $\left\langle v - \pi_U(v), \sum_{l=1}^{m} \lambda_l u_l \right\rangle = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \underbrace{\langle v - \pi_U(v), u_l \rangle}_{=0} = 0$ $\square$

Existenz von ON-Basen

Satz (15.15)

(i) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension $m \in \mathbb{N}_0$ von V, $(u_1, ..., u_m)$ eine ON-Basis und $U' \supseteq U$ ein $(m+1)$-dimensionaler Untervektorraum. Dann existiert ein Vektor $u_{m+1} \in U'$, so dass $(u_1, ..., u_m, u_{m+1})$ eine ON-Basis von U' ist.

(ii) Jeder Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine ON-Basis.

Verfahren der Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

Sei U ein m-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

(1) Wähle eine beliebige Basis $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_m)$ von U und und setze $k = 0$, $\mathscr{B}' = \varnothing$.

(2) Im Fall $k = m$ ist das Verfahren beendet. Ansonsten nehmen wir an, dass $\mathscr{B}' = (u_1, \dots, u_k)$ bereits eine *ON*-Basis von $U_k = \mathrm{lin}(v_1, \dots, v_k)$ ist.

(3) Berechne die Orthogonalprojektion $w_{k+1} = \pi_{U_k}(v_{k+1})$ von v_{k+1} auf U_k durch

$$w_{k+1} \quad = \quad \sum_{\ell=1}^{k} \langle u_\ell, v_{k+1} \rangle u_\ell.$$

(4) Definiere den Vektor $\tilde{u}_{k+1} = v_{k+1} - w_{k+1}$ und normiere ihn zu $u_{k+1} = \|\tilde{u}_{k+1}\|^{-1} \tilde{u}_{k+1}$.

(5) Erweitere $\mathscr{B}'$ um den Vektor u_{k+1}, ersetze k durch $k+1$, und gehe zurück zu Schritt (2).

Beispiel zur Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

$U = \mathbb{R}^3$ $\quad \boxed{u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}} \quad (\|u_1\| = 1)$

Ziel: ergänze u_1 zu einer ON-Basis von $U = \mathbb{R}^3$

k=1 Wähle $v_2 = e_2$. $\langle u_1, e_2\rangle = \frac{1}{3}\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{2}{3}$

Projektion: $w_2 = \langle u_1, e_2\rangle\, u_1 = \frac{2}{3} u_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$

Differenz: $\tilde{u}_2 = v_2 - w_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2\\5\\-4\end{pmatrix}$

Normierung: $\|\tilde{u}_2\| = \frac{1}{9}\cdot\sqrt{45} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$

$$u_2 = \|\tilde{u}_2\|^{-1}\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{1}{3}\sqrt{5}\\ -\frac{4}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

k=2 Wähle $v_3 = e_3$ $\quad \langle u_1, e_3\rangle = \frac{2}{3}, \quad \langle u_2, e_3\rangle = -\frac{4}{3\sqrt{5}}$

$\ldots u_1 + \langle u_2, e_3\rangle u_2 =$

Projektion: $w_2 = \langle u_1, e_2 \rangle\, u_1 = \frac{2}{3} u_1 = \frac{1}{\ldots} \begin{pmatrix} 2 \\ \ldots \end{pmatrix}$

$\underline{k=2}$ Wahle $v_3 = e_3$ $\quad \langle u_1, e_3 \rangle = \frac{2}{3}, \quad \langle u_2, e_3 \rangle = -\frac{4}{3\sqrt{5}}$

Projektion: $w_3 = \langle u_1, e_3 \rangle u_1 + \langle u_2, e_3 \rangle u_2 =$

$$\frac{2}{3} u_1 + \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}\right) u_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

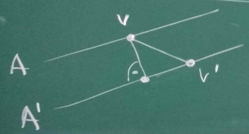
Differenz: $\tilde{u}_3 = v_3 - w_3 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normierung: $\|\tilde{u}_3\| = \frac{1}{5} \sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\boxed{u_3 = \sqrt{5}\, \tilde{u}_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}$$

$$\langle u_2, u_3 \rangle = \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) + \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{5}} - \frac{4}{3\sqrt{5}} = 0 \quad (\checkmark)$$



Definition des Abstands zweier affiner Unterräume

Definition (15.16)

Seien $A, A' \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei affine Unterräume mit $A \cap A' = \varnothing$. Ist $\mathscr{L}(A) \subseteq \mathscr{L}(A')$ oder $\mathscr{L}(A') \subseteq \mathscr{L}(A)$, dann bezeichnen wir A und A' als parallel, ansonsten als windschief. Die Zahl

$$d(A, A') \quad = \quad \inf\{\, \|v - v'\| \;\mid\; v \in A, v' \in A' \}$$

wird der (euklidische) Abstand von A und A' genannt.

Berechnung des Abstands zweier affiner Unterräume

Proposition (15.17)

Seien $A, A' \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei affine Unterräume und $v, v' \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren mit der Eigenschaft, dass $A = v + \mathscr{L}(A)$, $A' = v' + \mathscr{L}(A')$ und außerdem $(v' - v) \perp (\mathscr{L}(A) + \mathscr{L}(A'))$ gilt. Dann ist $d(A, A') = \|v' - v\|$.

Satz (15.18)

Seien $A, A' \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei affine Unterräume und $v \in A$, $v' \in A'$ beliebige Punkte. Sei $U = \mathscr{L}(A) + \mathscr{L}(A')$ und $w = \pi_U(v' - v)$. Dann gilt $d(A, A') = \|v' - v - w\|$.

Bew. von Prop. (15.17) $A, A' \subseteq \mathbb{R}^n$ affine Unterräume

$v \in A,\ v' \in A' \Rightarrow A = v + \mathcal{L}(A),\ A' = v' + \mathcal{L}(A')$

z.zg.: $\|v'-v\| = \min S,\ S = \{\|w'-w\| \mid w \in A, w' \in A'\}$

klar: $\|v'-v\| \in S$ z.zg.: $\|v'-v\|$ untere Schranke, falls $(v'-v) \perp (\mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(A'))$

Seien $w \in A,\ w' \in A'$. $w - v \in \mathcal{L}(A),\ w'-v' \in \mathcal{L}(A')$.

$(v'-v) \perp (\underbrace{(w'-v') - (w-v)}_{\in \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(A')})$ Satz des Pythagoras $\Rightarrow$

$$\|w'-w\|^2 = \|(w'-v') + (v'-v) + (v-w)\|^2 \overset{\perp}{=}$$

$$\|(w'-v') + (v-w)\|^2 + \|v'-v\|^2 \geq \|v'-v\|^2$$

$$\Rightarrow \|w'-w\| \geq \|v'-v\|$$

$\square$