Analysis mehrerer Variablen

— Lösung Blatt 14 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Die Teilquader von Q bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}$ sind gegeben durch $K_1 = [0,1] \times [0,1]$, $K_2 = [0,1] \times [1,2]$, $K_3 = [1,2] \times [0,1]$ und $K_4 = [1,2] \times [1,2]$. Es gilt $v(K_1) = v(K_2) = v(K_3) = v(K_4) = 1$. Die minimalen und maximalen Funktionswerte auf diesen Teilquadern sind gegeben durch $c^-_{K_1,f} = \frac{1}{3}$, $c^-_{K_2,f} = c^-_{K_3,f} = \frac{1}{6}$, $c^-_{K_4,f} = \frac{1}{9}$ und $c^+_{K_1,f} = 1$, $c^+_{K_2,f} = c^+_{K_3,f} = \frac{1}{2}$, $c^+_{K_4,f} = \frac{1}{3}$. Für die Unter- und die Obersumme ergeben sich die Werte

$$\mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^{4} c^-_{K_i,f} v(K_i) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{10}{9} \quad , \quad \mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^{4} c^+_{K_i,f} v(K_i) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{3}.$$

zu (b) Betrachten wir den Fall, dass $f : Q \to \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt ist. Dann gibt es für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ jeweils mindestens einen Teilquader $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ mit der Eigenschaft, dass $f|_K$ nach oben unbeschränkt ist. Es gilt dann also $c^+_{K,f} = \sup\{f(x) \mid x \in K\} = +\infty$, und dementsprechend könnte man $\mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z})$ nur den Wert $+\infty$ zuordnen. Auch dem Oberintegral müsste man diesen Wert zuordnen. Entsprechend wäre das Unterintegral gleich $-\infty$, falls f auch nach unten unbeschränkt ist. Eine Übereinstimmung von Unter- und Oberintegral ist bei unbeschränkten Funktionen also ausgeschlossen. Man kann auf die Betrachtung dieser Funktionen also von vornherein verzichten.

zu (c) Das ist richtig. Auf Grund der Voraussetzung sind für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ und jeden Teilquader $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ sowohl Infimum als auch Supremum der Menge $\{f(x) \mid x \in K\}$ größer gleich Null, es gilt also $c^+_{K,f}, c^-_{K,f} \geq 0$. Daraus folgt $\mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z}) = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})} c^+_{K,f} v(K) \geq 0$ und ebenso $\mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}) \geq 0$.

zu (d) Die Substitutionsregel für eine stetig differenzierbare Substitutionsfunktion u lautet

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx \quad = \quad \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx.$$

Die Regel zur partiellen Integration lautet

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx \quad = \quad [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Aufgabe 1

Weil f beschränkt ist, gibt es ein $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(x)| \leq \gamma$ für alle $x \in Q$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die äquidistante Zerlegung $\mathcal{Z}^{(n)} = (\mathcal{Z}^{(n)}_1, \mathcal{Z}^{(n)}_2)$ gegeben durch

$$\mathcal{Z}^{(n)}_1 = \{a + k\tfrac{b-a}{n} \mid 1 \leq k < n\} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{Z}^{(n)}_2 = \{c + k\tfrac{d-c}{n} \mid 1 \leq k < n\}.$$

Setzen wir $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ und $y_k = c + k\frac{d-c}{n}$ für $0 \leq k \leq n$, dann ist die Quadermenge der Zerlegung gegeben durch

$$\mathcal{Q}(\mathcal{Z}) \quad = \quad \{Q_{k\ell} \mid 1 \leq k, \ell \leq n\} \qquad \text{mit} \qquad Q_{k\ell} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{\ell-1}, y_\ell].$$

Dabei gilt jeweils $v(Q_{k\ell}) = (x_k - x_{k-1})(y_\ell - y_{\ell-1}) = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n} = \frac{1}{n^2}(d-c)(b-a) = \frac{1}{n^2}v(Q)$. Ist $(x,y) \in Q_{k\ell}$ mit $1 < k, \ell < n$, dann gilt $f(x,y) = 0$, denn in diesem Fall liegt (x,y) nicht auf dem Rand von Q. Auf diesen Quadern ist das Infimum $c^-_{k\ell}$ und das Supremum $c^+_{k\ell}$ also gleich Null. Auf den übrigen Quadern gilt $-\gamma \le f(x,y) \le \gamma$, also $c^-_{k\ell} \ge -\gamma$ und $c^+_{k\ell} \le \gamma$ falls $k \in \{1,n\}$ oder $\ell \in \{1,n\}$. Wir erhalten somit für die Untersummen die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}^{(n)}) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n c^-_{k\ell} v(Q_{k\ell}) = \sum_{\ell=1}^n c^-_{1\ell} v(Q_{1\ell}) + \sum_{\ell=1}^n c^-_{n\ell} v(Q_{n\ell}) + \sum_{k=2}^{n-1} c^-_{k1} v(Q_{k1}) + \sum_{k=2}^{n-1} c^-_{kn} v(Q_{kn}) \\
&\ge \sum_{\ell=1}^n (-\gamma)\frac{v(Q)}{n^2} + \sum_{\ell=1}^n (-\gamma)\frac{v(Q)}{n^2} + \sum_{k=2}^{n-1} (-\gamma)\frac{v(Q)}{n^2} + \sum_{k=2}^{n-1} (-\gamma)\frac{v(Q)}{n^2} \\
&= (4n-4)(-\gamma)\cdot \frac{v(Q)}{n^2} = 4\gamma v(Q)\left(\tfrac{1}{n^2} - \tfrac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir für die Obersummen die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z}^{(n)}) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n c^+_{k\ell} v(Q_{k\ell}) = \sum_{\ell=1}^n c^+_{1\ell} v(Q_{1\ell}) + \sum_{\ell=1}^n c^+_{n\ell} v(Q_{n\ell}) + \sum_{k=2}^{n-1} c^+_{k1} v(Q_{k1}) + \sum_{k=2}^{n-1} c^+_{kn} v(Q_{kn}) \\
&\le \sum_{\ell=1}^n \gamma\frac{v(Q)}{n^2} + \sum_{\ell=1}^n \gamma\frac{v(Q)}{n^2} + \sum_{k=2}^{n-1} \gamma\frac{v(Q)}{n^2} + \sum_{k=2}^{n-1} \gamma\frac{v(Q)}{n^2} = (4n-4)\gamma\cdot \frac{v(Q)}{n^2} = 4\gamma v(Q)\left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$\begin{aligned}
4\gamma v(Q)\left(\tfrac{1}{n^2} - \tfrac{1}{n}\right) &\le \mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}^{(n)}) \le \int_{Q\star} f(x,y)\, d(x,y) \le \int_Q^\star f(x,y)\, d(x,y) \\
&\le \mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z}^{(n)}) \le 4\gamma v(Q)\left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ zeigt, dass Unter- und Oberintegral übereinstimmen von f beide den Wert 0 haben. Also ist f Riemann-integrierbar, und es gilt $\int_Q f(x,y)\, d(x,y) = 0$.

Aufgabe 2

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die zur Zerlegung $\mathcal{Z}^{(n)}$ gehörende Quadermenge ist gegeben durch

$$\mathcal{Q}(\mathcal{Z}^{(n)}) = \{Q_{k\ell} \mid 1 \le k,\ell \le n\} \quad \text{mit} \quad Q_{k\ell} = [\tfrac{k-1}{n}, \tfrac{k}{n}] \times [\tfrac{\ell-1}{n}, \tfrac{\ell}{n}].$$

Das Volumen jedes Teilquaders ist gegeben durch $v(Q_{k\ell}) = (\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n})(\frac{\ell}{n} - \frac{\ell-1}{n}) = \frac{1}{n^2}$ für $1 \le k,\ell \le n$. Das Infimum der Funktion f auf $Q_{k\ell}$ ist $c^-_{k\ell} = 2\frac{k-1}{n} + \frac{\ell-1}{n}$, das Supremum ist $c^+_{k\ell} = 2\frac{k}{n} + \frac{\ell}{n}$. Wir erhalten für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Untersumme

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}^{(n)}) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n c^-_{k\ell} v(Q_{k\ell}) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \left(2\tfrac{k-1}{n} + \tfrac{\ell-1}{n}\right)\cdot \tfrac{1}{n^2} = \\
\tfrac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} (2k+\ell) &= \tfrac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} 2k + \tfrac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell = \tfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} 2k + \tfrac{1}{n^2}\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell \\
&= \tfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} 3k = \tfrac{3}{n^2}\cdot\tfrac{1}{2}(n-1)n = \tfrac{3}{2}(1-\tfrac{1}{n})
\end{aligned}$$

und für die Obersumme entsprechend

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z}^{(n)}) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n c^+_{k\ell} v(Q_{k\ell}) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \left(2\tfrac{k}{n} + \tfrac{\ell}{n}\right)\cdot \tfrac{1}{n^2} = \\
\tfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} (2k+\ell) &= \tfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} 2k + \tfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \ell = \tfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 2k + \tfrac{1}{n^2}\sum_{\ell=1}^{n} \ell \\
&= \tfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 3k = \tfrac{3}{n^2}\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1) = \tfrac{3}{2}(1+\tfrac{1}{n}).
\end{aligned}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt also die Abschätzung

$$\tfrac{3}{2}(1-\tfrac{1}{n}) = \mathcal{S}^-_f(\mathcal{Z}^{(n)}) \le \int_{Q\star} f(x,y)\, d(x,y) \le \int_Q^\star f(x,y)\, d(x,y) \le \mathcal{S}^+_f(\mathcal{Z}^{(n)}) = \tfrac{3}{2}(1+\tfrac{1}{n}).$$

Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ sieht man, dass Unter- und Oberintegral übereinstimmen und beide den Wert $\frac{3}{2}$ annehmen. Also ist f Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_Q f(x,y)\ d(x,y) \quad = \quad \tfrac{3}{2}.$$

Dieses Ergebnis kann mit dem Satz von Fubini überprüft werden. Für jedes $x \in [0,1]$ gilt

$$\int_0^1 (2x+y)\ dy \quad = \quad \left[2xy + \tfrac{1}{2}y^2\right]_0^1 \quad = \quad 2x + \tfrac{1}{2}$$

und somit

$$\int_Q f(x,y)\ d(x,y) \quad = \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 (2x+y)\ dy \right)\ dx \quad = \quad \int_0^1 (2x + \tfrac{1}{2})\ dx \quad = \quad \left[x^2 + \tfrac{1}{2}x\right]_0^1 \quad = \quad \tfrac{3}{2}.$$

Aufgabe 3

zu (a)(i)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \sqrt{2x+5}\,dx \quad &= \quad \tfrac{1}{2}\int_1^2 2\sqrt{2x+5}\,dx \quad = \quad \tfrac{1}{2}\int_7^9 \sqrt{x}\,dx \quad = \quad \tfrac{1}{2}\int_7^9 x^{1/2}\,dx \quad = \quad \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_7^9 \\
&= \quad \tfrac{1}{3}\left[x^{3/2}\right]_7^9 \quad = \quad \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{729} - \sqrt{343}\right) \quad \approx \quad 2{,}827
\end{aligned}$$

zu (a)(ii)

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{x^2+3x+5}{x^2+2}\,dx \quad &= \quad \int_a^b \frac{x^2+2}{x^2+2}\,dx + \int_a^b \frac{3x+3}{x^2+2}\,dx \quad = \quad \int_a^b 1\,dx + \tfrac{3}{2}\int_a^b \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \int_a^b \frac{3}{x^2+2}\,dx \\
&= \quad [x]_a^b + \tfrac{3}{2}\int_{a^2+2}^{b^2+2} \frac{dx}{x} + \int_a^b \frac{3}{x^2+2}\,dx \quad = \quad [x]_a^b + \tfrac{3}{2}\left[\ln(x)\right]_{a^2+2}^{b^2+2} + \int_a^b \frac{3}{x^2+2}\,dx \\
&= \quad [x]_a^b + \tfrac{3}{2}\left[\ln(x^2+2)\right]_a^b + \int_a^b \frac{3}{x^2+2}\,dx \quad = \quad \left[\tfrac{3}{2}\ln(x^2+2) + x\right]_a^b + \int_a^b \frac{3}{x^2+2}\,dx \\
&= \quad \left[\tfrac{3}{2}\ln(x^2+2) + x\right]_a^b + \tfrac{3}{2}\int_a^b \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1} \quad = \quad \left[\tfrac{3}{2}\ln(x^2+2) + x\right]_a^b + \tfrac{3}{\sqrt{2}}\int_a^b \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}dx}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1} \\
&= \quad \left[\tfrac{3}{2}\ln(x^2+2) + x\right]_a^b + \tfrac{3}{\sqrt{2}}\int_{a/\sqrt{2}}^{b/\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2+1} \quad = \quad \left[\tfrac{3}{2}\ln(x^2+2) + x\right]_a^b + \tfrac{3}{\sqrt{2}}\left[\arctan(x)\right]_{a/\sqrt{2}}^{b/\sqrt{2}} \\
&= \quad \left[\tfrac{3}{2}\ln(x^2+2) + x\right]_a^b + \tfrac{3}{\sqrt{2}}\left[\arctan(\tfrac{x}{\sqrt{2}})\right]_a^b \quad = \quad \left[\tfrac{3}{2}\ln(x^2+2) + \tfrac{3}{\sqrt{2}}\arctan(\tfrac{x}{\sqrt{2}}) + x\right]_a^b
\end{aligned}$$

zu (a)(iii)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \tan(x)\,dx \quad &= \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx \quad = \quad -\int_0^{\pi/4} \frac{(-\sin(x))}{\cos(x)}\,dx \quad = \quad -\int_{\cos(0)}^{\cos(\pi/4)} \frac{dx}{x} \\
&= \quad -\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{x} \quad = \quad \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dx}{x} \quad = \quad \left[\ln(x)\right]_{1/\sqrt{2}}^1 \quad = \quad -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \quad \ln(\sqrt{2}) \quad = \quad \tfrac{1}{2}\ln(2) \quad \approx \quad 0{,}347.
\end{aligned}$$

zu (b)(i)

$$\int_0^1 \arctan(x)\,dx \quad = \quad \int_0^1 1\cdot\arctan(x)\,dx \quad = \quad [x\arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \quad [x\arctan(x)]_0^1 - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx \quad = \quad [x\arctan(x)]_0^1 - \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{dx}{x} \quad = \quad [x\arctan(x)]_0^1 - \tfrac{1}{2}\,[\ln(x)]_1^2$$

$$= \quad [x\arctan(x)]_0^1 - \tfrac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 \quad = \quad \left[x\arctan(x) - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1$$

$$= \quad \arctan(1) - \tfrac{1}{2}\ln(2) \quad = \quad \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\ln(2) \quad \approx \quad 0{,}439.$$

zu (b)(ii)

$$\int_a^b \cos(x)^2\,dx \quad = \quad \int_a^b \cos(x)\cdot\cos(x)\,dx \quad = \quad [\sin(x)\cos(x)]_a^b + \int_a^b \sin(x)^2\,dx$$

$$= \quad [\sin(x)\cos(x)]_a^b + \int_a^b \left(1-\cos(x)^2\right)\,dx \quad = \quad [\sin(x)\cos(x)]_a^b + \int_a^b 1\,dx - \int_a^b \cos(x)^2\,dx$$

$$= \quad [\sin(x)\cos(x)]_a^b + [x]_a^b - \int_a^b \cos(x)^2\,dx \quad = \quad [\sin(x)\cos(x)+x]_a^b - \int_a^b \cos(x)^2\,dx.$$

Dies kann umgeformt werden zu

$$2\int_a^b \cos(x)^2\,dx = [\sin(x)\cos(x)+x]_a^b \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_a^b \cos(x)^2\,dx = \left[\tfrac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \tfrac{1}{2}x\right]_a^b.$$