Globalübungsblatt 13

Aufgabe 1

zu (a) z. zg.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto e^{\sin(xy)} + x^2 - 2y - 1$

definiert in einer Umg. von $(0,0)$ implizit eine Fkt

genauer: Es gibt offene Intervalle $I, I' \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I, I'$ und eine stetig diff'bare Fkt. $g: I \to I'$ mit $f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$ $\forall (x,y) \in I \times I'$

überprüfe die Voraussetzungen des Satzes über implizite Fkt.

(1) Die Fkt. f ist stetig diff'bar, da sie aus bel. oft diff'baren Fkt. (Polynome, Exp.-Fkt., Sinusfkt.) zusam-

mengesetzt ist

(2) $\partial_2\left(\sin(xy)\right) = x\cos(xy)$

$\partial_2\left(e^{\sin(xy)}\right) = x\cos(xy)\,e^{\sin(xy)}$

$\partial_2 f(x,y) = x\cos(xy)\,e^{\sin(xy)} - 2$

$\partial_2 f(0,0) = -2 \neq 0$

Also sind die Voraussetzungen erfüllt.

zu (b) Lt. Vl ist die Ableitung der implizit def Fkt geg. durch $g'(0) = -\partial_2 f(0,0)^{-1}\partial_1 f(0,0)$

$\partial_1\left(\sin(xy)\right) = y\cos(xy)$

$\partial_1\left(e^{\sin(xy)}\right) = y\cos(xy)\,e^{\sin(xy)}$

$\partial_1 f(x,y) = y\cos(xy)\,e^{\sin(xy)} + 2x$

$$\Rightarrow g'(0) = \frac{1}{2}\,\partial_1 f(0,0) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Bestimmung der zweiten Ableitung:

Auf Grund der Äquivalenz $y = g(x) \Leftrightarrow f(x,y) = 0$ $\forall (x,y) \in I \times I'$ gilt $f(x, g(x)) = 0$ $\forall x \in I$

Sei $g_1 : I \to \mathbb{R}^2$ durch $x \mapsto (x, g(x))$. Dann ist
$\Phi = f \circ g_1$ geg. durch $I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (f \circ g_1)(x)$
$= f(g_1(x)) = f(x, g(x))$

Wie oben festgestellt, gilt $\Phi(x) = 0$ $\forall x \in I$

Daraus folgt $\Phi'(x) = \Phi''(x) = 0$ $\forall x \in I$.

Kettenregel $\Rightarrow \Phi'(x) = (f \circ g_1)'(x) =$

$$f'(g_1(x))\, g_1'(x) = \big(\partial_1 f(x,g(x))\ \ \partial_2 f(x,g(x))\big) \cdot \begin{pmatrix}1\\ g'(x)\end{pmatrix}$$

$$= \partial_1 f(x,g(x)) + \partial_2 f(x,g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= (\partial_1 f \circ g_1)(x) + (\partial_2 f \circ g_1)(x)\, g'(x)$$

Kettenregel $\Rightarrow (\partial_1 f \circ g_1)'(x) = (\partial_1 f)'(g_1(x))\, g_1'(x)$

$$= \big(\partial_{11} f(x,g(x))\ \ \partial_{12} f(x,g(x))\big) \begin{pmatrix}1\\ g'(x)\end{pmatrix}$$

$$= \partial_{11} f(x,g(x)) + \partial_{12} f(x,g(x)) \cdot g'(x)$$

Kettenregel $\Rightarrow (\partial_2 f \circ g_1)'(x) = \partial_{12} f(x,g(x)) + \partial_{22} f(x,g(x))\, g'(x)$

$$\Rightarrow \Phi''(x) = \partial_{11} f(x,g(x)) + \partial_{12} f(x,g(x))\, g'(x) + \big(\partial_{12} f(x,g(x)) + \partial_{22} f(x,g(x)) \cdot g'(x)\big) \cdot g'(x) +$$

$$\left\{\left[\tfrac{k-1}{n}, \tfrac{k}{n}\right] \times \left[\tfrac{l-1}{n}, \tfrac{l}{n}\right] 1 \leq k, l \leq n\right\}$$

$$(\partial_2 f(x, g(x)) \cdot g''(x)$$

$$\Phi''(0) = 0 \iff \partial_{11} f(0, g(0)) + \partial_2 f(0, g(0)) \cdot g''(0) = 0$$

$$[\ g'(0) = 0$$

$$\iff \partial_{11} f(0,0) + \partial_2 f(0,0) \cdot g''(0) = 0$$

$$\partial_1 f(x,y) = y \cos(xy)\, e^{\sin(xy)} + 2x$$

$$\partial_1 (y \cos(xy)) = -y^2 \sin(xy)$$

$$\partial_1 (e^{\sin(xy)}) = y \cos(xy)\, e^{\sin(xy)}$$

$$\Rightarrow \partial_{11} f(x,y) = -y^2 \sin(xy)\, e^{\sin(xy)} + y^2 \cos(xy)^2 e^{\sin(xy)} + 2$$

$$\partial_2 f(0, g(0)) = -2$$

$$\Rightarrow g''(0) = -\partial_2 f(0,0)^{-1} \cdot \partial_{11} f(0,0) = \tfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Aufgabe 2 $f: [0,2] \times [0,1] \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2 y$

geg: für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung $Z^{(n)} = (Z_1^{(n)}, Z_2^{(n)})$

von $Q = [0,2] \times [0,1]$ durch $Z_1^{(n)} = \{\frac{2k}{n} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$

und $Z_2^{(n)} = \{\frac{k}{n} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$

zu (a) Bestimmung von Ober- und Untersumme

$$S_f^-(Z^{(n)}),\ S_f^+(Z^{(n)})$$

geg: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Untersumme: $$S_f^-(Z^{(n)}) = \sum_{K \in Q(Z^{(n)})} c_{K,f}^- \, v(K)$$

dies: $$Q(Z^{(n)}) = \left\{ \left[\frac{2k-2}{n}, \frac{2k}{n}\right] \times \left[\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}\right] \mid 1 \leq k, l \leq n \right\}$$

Setze $Q_{kl} = \left[\frac{2k-2}{n}, \frac{2k}{n}\right] \times \left[\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}\right]$ für $k, l \in$  $n=3$

$\{1, \dots, n\}$. $\Rightarrow$ erhalte jeweils $v(Q_{kl}) = \left(\frac{2k}{n} - \frac{2k-2}{n}\right)\left(\frac{l}{n} - \frac{l-1}{n}\right)$

$$= \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2}$$

$$\bar{c}_{Q_{kl}, f} = \inf f(Q_{kl}) = \inf f\left(\left[\frac{2k-2}{n}, \frac{2k}{n}\right] \times \left[\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}\right]\right)$$

$$= f\left(\frac{2k-2}{n}, \frac{l-1}{n}\right) = \left(\frac{2k-2}{n}\right)^2 \frac{l-1}{n}$$

einsetzen $\Rightarrow$ $\bar{S}_f(Z^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \bar{c}_{Q_{kl}, f} \, v(Q_{kl})$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{2k-2}{n}\right)^2 \left(\frac{l-1}{n}\right) \cdot \frac{2}{n^2}$$

$$= \frac{8}{n^5} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (k-1)^2 (l-1) = \frac{8}{n^5} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sum_{l=1}^{n-1} l =$$

$$\frac{8}{n^5}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)\,n = \frac{4(n-1)}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 =$$

$$\frac{4(n-1)}{n^4}\cdot\frac{1}{6}(n-1)\,n\,(2n-1) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

Analog erhält man für die Obersummen

$$S_f^+(Z^{(n)}) = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(2+\frac{1}{n}\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

zu (b) z.zg: f ist Riemann-integrierbar

gleichbed: $\int_{Q*} f(x)\,dx = \int_Q^* f(x)\,dx$

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$S_f^-(Z^{(n)}) \le \int_{Q*} f(x)\,dx \le \int_Q^* f(x)\,dx \le S_f^+(Z^{(n)})$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} S^-_f(Z^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(2-\frac{1}{n}\right)$

$= \frac{2}{3}\cdot(1-0)(2-0) = \frac{4}{3}$. ebenso $\lim_{n\to\infty} S^+_f(Z^{(n)}) = \frac{4}{3}$

Daraus folgt $\int_{Q_*} f(x)\,dx = \int_Q^* f(x)\,dx = \frac{4}{3}$.

$\Rightarrow$ f ist Riemann-integrierbar, $\int_Q f(x)\,dx = \frac{4}{3}$.

zu (c) $\int_Q f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^2 \left(\int_0^1 f_x(y)\,dy \right) dx =$

$\int_0^2 \left(\int_0^1 x^2 y\,dy \right) dx = \int_0^2 x^2 \left[\frac{1}{2} y^2\right]_0^1 dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^2\,dx$

$= \left[\frac{1}{6} x^3\right]_0^2 = \frac{1}{6}\cdot(8-0) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\square$

Aufgabe 3 geg.: affine Ebene $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+2y+z=10\}$

Sphäre $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

zu (a) Ziel: Bestimmung der Abstandsfkt.

$$f: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad p\mapsto d(p,E)^2$$

Lt. Angabe gilt $d(p,E)=\|q-p\|_2$, wobei $q-p$ skalares Vielfaches des Einheitsnormalenvektors $n=\frac{1}{3}(2,2,1)$. Es gilt jeweils

Ansatz: $q=p+\lambda n$ mit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$q\in E \iff p+\lambda n\in E \iff \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\lambda\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\in E$$

$$\iff 2\left(p_1+\frac{2}{3}\lambda\right)+2\left(p_2+\frac{2}{3}\lambda\right)+\left(p_3+\frac{1}{3}\lambda\right)=10$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda + 2p_1 + 2p_2 + p_3 = 10$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}p_1 - \frac{2}{3}p_2 - \frac{1}{3}p_3$$

$$\Rightarrow f(p) = d(p,E)^2 = \|q-p\|_2^2 = \|\lambda n\|^2 = \lambda^2$$

$$= \frac{1}{9}(10 - 2p_1 - 2p_2 - p_3)^2$$

<u>Bsp</u> Fubini mit $n = 3$ $\quad f : [0,1]^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto xyz$

$$Q = [0,1]^3 = [0,1] \times [0,1]^2$$

$$\int_Q f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_0^1 \Big(\int_{[0,1]\times[0,1]} xyz\, d(y,z) \Big) dx$$

$$= \int_0^1 x \Big(\int_{[0,1]^2} yz\, d(y,z) \Big) dx \underset{[s.\ \mathrm{VL}]}{=} \int_0^1 \frac{1}{4} x\, dx = \Big[\frac{1}{8}x^2\Big]_0^1 = \frac{1}{8}$$