Analysis mehrerer Variablen

— Lösung Blatt 12 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Das n-te Taylorpolynom von f an der Stelle a ist nach Definition gegeben durch

$$\tau_p(f,a)(x) \quad = \quad f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x-a,...,x-a)$$

wobei der Vektor $x-a$ in die k-te Ableitung jeweils k-mal eingesetzt wird. Insbesondere gilt

$$\tau_1(f,a)(x) \quad = \quad f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$\tau_2(f,a)(x) \quad = \quad f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2} f''(a)(x-a,x-a)$$

$$\tau_3(f,a)(x) \quad = \quad f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2} f''(a)(x-a,x-a) + \tfrac{1}{6} f'''(a)(x-a,x-a,x-a).$$

Dabei erhält man $f'(a)(x-a)$ durch Multiplikation der Jacobi-Matrix (die wir ebenfalls mit $f'(a)$ bezeichnet hatten) mit dem Vektor $x-a \in \mathbb{R}^m$. Der Term $\frac{1}{2}f''(a)(x-a)$ kann auch mit der Hesse-Matrix ausgedrückt werden: Es gilt $\frac{1}{2}f''(a) = \frac{1}{2}{}^{\mathrm{t}}(x-a) \cdot \mathcal{H}(f)(a) \cdot (x-a)$.

zu (b) Nach Prop. (12.5) gilt $f'''(a)(u,v,w) = \partial_u \partial_v \partial_w f(a)$ für alle $u,v,w \in \mathbb{R}^3$. Insbesondere gilt also $f'''(a)(e_1,e_3,e_3) = \partial_{e_1}\partial_{e_3}\partial_{e_3} f(a) = \partial_{133} f(a)$.

zu (c) Die Gleichung folgt aus der Multilinearität (hier: Trilinearität) der Abbildung $f'''(1,1,2) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: Die Additivität in der zweiten Komponente liefert zunächst

$$f'''(1,1,2)(2u,3v+v',4w) \quad = \quad f'''(1,1,2)(2u,3v,4w) + f'''(1,1,2)(2u,v',4w).$$

Weiter gilt auf Grund der Linearität in jeder Komponente

$$\begin{aligned} f'''(1,1,2)(2u,3v,4w) \quad &= \quad 2 \cdot f'''(1,1,2)(u,3v,4w) \quad = \quad 2 \cdot 3 \cdot f'''(1,1,2)(u,v,4w) \\ &= \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot f'''(1,1,2)(u,v,w) \quad = \quad 24 f'''(1,1,2)(u,v,w) \quad , \end{aligned}$$

und ebenso erhält man $f'''(1,1,2)(2u,v',4w) = 8f'''(1,1,2)(u,v',w)$.

zu (d) Das Kriterium (12.11)(ii) besagt: Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $a \in U$ ein Punkt mit $f'(a) = 0$ und negativ definiter Hesse-Matrix $\mathcal{H}(f)(a)$, dann besitzt f in a ein isoliertes lokales Maximum. Ist $m = 1$, dann besitzt die Jacobi-Matrix von f an der Stelle a nur einen Eintrag, nämlich $\partial_1 f(a)$. Dies ist genau die Ableitung $f'(a)$ im Sinne der Analysis einer Variablen. Die Jacobi-Matrix ist also genau dann die Nullmatrix, wenn die erste Ableitung im Sinne der Analysis einer Variablen gleich Null ist. Ebenso besitzt die Hesse-Matrix $\mathcal{H}(f)(a)$ im Fall $m = 1$ nur einen Eintrag, nämlich $\partial_{11} f(a)$. Dies ist genau die zweite Ableitung $f''(a)$, wie sie in der Analysis einer Variablen definiert wurde. Offenbar ist die 1×1-Matrix genau dann negativ definit, wenn dieser Eintrag negativ ist, d.h. genau dann gilt $v \cdot (\partial_{11} f(a)) \cdot v = v^2 \partial_{11} f(a) < 0$ für alle $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Insgesamt ist die Bedingung $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$ im Sinne der Analysis einer Variablen ist als äquivalent zu der Bedingung, dass die Jacobi-Matrix an der Stelle a die Nullmatrix und die Hesse-Matrix an der Stelle a negativ definit ist.

zu (e) Das Satz über die lokale Umkehrbarkeit im Eindimensionalen besagt: Ist $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung, und ist $a \in U$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass $f'(a)$ invertierbar ist, so gibt es offene Umgebungen U_1 von a und V_1 von $b = f(a)$, so dass $f|_{U_1}$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus zwischen U_1 und V_1 ist. Wie in Teil (d) ausgeführt, hat die Jacobi-Matrix an der Stelle a als einzigen Eintrag die Ableitung im Sinne der Analysis einer Variablen. Die Invertierbarkeit dieser 1×1-Matrix an der Stelle a ist äquivalent dazu, dass dieser Eintrag ungleich Null ist, also zu $f'(a) \neq 0$ im Sinner der Analysis einer Variablen. Die offene Menge U_1 enthält ein offenes Intervall I_1 mit $a \in I_1$; weil f stetig ist, muss auch $J_1 = f(I_1)$ ein zusammenhängend und somit ein Intervall sein, und aus der Stetigkeit von $g = (f|_{U_1})^{-1}$ folgt die Offenheit von $J_1 = g^{-1}(I_1)$. Insgesamt können wir deshalb den Satz über die lokale Umkehrbarkeit deshalb auch folgendermaßen aussprechen: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung, und sei $a \in I$ ein Punkt mit $f'(a) \neq 0$. Dann gibt es ein offenes Intervall $I_1 \subseteq I$ mit $a \in I_1$ derart, dass $J_1 = f(I_1)$ ebenfalls ein offenes Intervall, die Abbildung $f|_{I_1} : I_1 \to J_1$ bijektiv und die Umkehrabbildung $g = (f|_{I_1})^{-1} : J_1 \to I_1$ ebenfalls stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 1

zu (a) Die beiden partiellen Ableitungen von f sind gegeben durch $\partial_1 f(x,y) = (y+1)e^{x+y}$ und $\partial_2 f(x,y) = (y+2)e^{x+y}$, und die zweifachen partiellen Ableitungen durch

$$\partial_{11} f(x,y) = (y+1)e^{x+y} \quad , \quad \partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = (y+2)e^{x+y} \quad , \quad \partial_{22} f(x,y) = (y+3)e^{x+y}.$$

(Die Berechnung von $\partial_{21} f(x,y)$ kann man sich auf Grund des Satzes (10.7) von Schwarz sparen.) Jacobi-Matrix und Hesse-Matrix an der Stelle $(1,2)$ sind also gegeben durch

$$f'(1,2) \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_1 f(1,2) & \partial_2 f(1,2) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 3e^3 & 4e^3 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathcal{H}(f)(1,2) \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_{11} f(1,2) & \partial_{12} f(1,2) \\ \partial_{21} f(1,2) & \partial_{22} f(1,2) \end{pmatrix} \quad = \quad e^3 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Das erste Taylorpolynom an der Stelle $(1,2)$ ist somit $\tau_1(f,(1,2))(x,y) = f(1,2) + f'(1,2) \cdot (x-1, y-2) = 3e^3 + 3e^3(x-1) + 4e^3(y-2) = 3e^3 x + 4e^3 y - 8e^3 = e^3(3x+4y-8)$, und das zweite Taylorpolynom an dieser Stelle durch

$$\begin{aligned} \tau_2(f,(1,2)) \quad &= \quad \tau_1(f,(1,2)) + \tfrac{1}{2} f''(1,2)((x-1,y-2),(x-1,y-2)) \quad = \\ &\tau_1(f,(1,2)) + \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y-2 \end{pmatrix} \mathcal{H}(f)(1,2) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \quad = \\ &\tau_1(f,(1,2)) + \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y-2 \end{pmatrix} \cdot e^3 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \quad = \\ &e^3 \left(3x + 4y - 8 + 3(x-1)^2 + 8(x-1)(y-2) + 5(y-2)^2\right) \quad = \\ &e^3 \left(3x + 4y - 8 + 3x^2 - 6x + 3 + 8xy - 16x - 8y + 16 + 5y^2 - 20y + 20\right) \quad = \\ &e^3 \left(3x^2 + 8xy + 5y^2 - 19x - 24y + 31\right). \end{aligned}$$

zu (b) Die dreifachen partiellen Ableitungen von f sind gegeben durch

$$\partial_{111}f(x,y) = (y+1)e^{x+y} \quad , \quad \partial_{112}f(x,y) = \partial_{121}f(x,y) = \partial_{211}f(x,y) = (y+2)e^{x+y} \quad ,$$
$$\partial_{122}f(x,y) = \partial_{212}f(x,y) = \partial_{221}f(x,y) = (y+3)e^{x+y} \quad , \quad \partial_{222}f(x,y) = (y+4)e^{x+y}.$$

An der Stelle $(1,2)$ ergeben sich die Werte

$$\partial_{111}f(1,2) = 3e^3 \quad , \quad \partial_{112}f(1,2) = \partial_{121}f(1,2) = \partial_{211}f(1,2) = 4e^3 \quad ,$$
$$\partial_{122}f(1,2) = \partial_{212}f(1,2) = \partial_{221}f(1,2) = 5e^3 \quad , \quad \partial_{222}f(1,2) = 6e^3.$$

Auf Grund der Multilinearität von $f'''(1,2)$ erhalten wir

$$f'''(1,2)((3,4),(5,6),(7,8)) \quad = \quad f'''(1,2)(3e_1+4e_2, 5e_1+6e_2, 7e_1+8e_2) \quad =$$
$$3f'''(1,2)(e_1, 5e_1+6e_2, 7e_1+8e_2) + 4f'''(1,2)(e_2, 5e_1+6e_2, 7e_1+8e_2) \quad =$$
$$15f'''(1,2)(e_1,e_1,7e_1+8e_2) + 18f'''(1,2)(e_1,e_2,7e_1+8e_2)$$
$$+20f'''(1,2)(e_2,e_1,7e_1+8e_2) + 24f'''(1,2)(e_2,e_2,7e_1+8e_2) \quad =$$
$$105f'''(1,2)(e_1,e_1,e_1) + 120f'''(1,2)(e_1,e_1,e_2) + 126f'''(1,2)(e_1,e_2,e_1) +$$
$$144f'''(1,2)(e_1,e_2,e_2) + 140f'''(1,2)(e_2,e_1,e_1) + 160f'''(1,2)(e_2,e_1,e_2) +$$
$$168f'''(1,2)(e_2,e_2,e_1) + 192f'''(1,2)(e_2,e_2,e_2) \quad =$$

$$105\partial_{111}f(1,2) + 120\partial_{112}f(1,2) + 126\partial_{121}f(1,2) +$$
$$144\partial_{122}f(1,2) + 140\partial_{211}f(1,2) + 160\partial_{212}f(1,2) + 168\partial_{221}f(1,2) + 192\partial_{222}f(1,2) \quad =$$

$$e^3 \cdot (105 \cdot 3 + (120+126+140) \cdot 4 + (144+160+168) \cdot 5 + 192 \cdot 6) \quad =$$
$$e^3 \cdot (105 \cdot 3 + 386 \cdot 4 + 472 \cdot 5 + 192 \cdot 6) \quad = \quad 5299e^3.$$

Aufgabe 2

zu (a) Die erste Ableitung von f ist gegeben durch $f'(x,y) = (3x^2 - 3y \; 3y^2 - 3x)$, und die Hesse-Matrix ist für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\mathcal{H}(f,(x,y)) \quad = \quad \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Ist (x,y) eine kritische Stelle von f, dann gilt $3x^2 - 3y = 0$ und $3y^2 - 3x = 0$, also $x^2 = y$ und $y^2 = x$. Durch Einsetzen erhalten wir $y = x^2 = y^4$, was zu $y(y^3 - 1) = 0$ umgeformt werden kann. Weil 1 die einzige reelle Nullstelle von $y^3 - 1$ ist, folgt $y \in \{0,1\}$. Setzen wir dies in die Gleichung $x = y^2$ sein, so kommen wir zu dem Ergebnis, dass die Menge der kritischen Stellen von f in der Menge $\{(0,0),(1,1)\}$ enthalten ist. Durch Einsetzen überprüft man, dass es sich bei $(0,0)$ und $(1,1)$ tatsächlich um kritische Punkte handelt. Nun gilt

$$\mathcal{H}(f,(0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{H}(f,(1,1)) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathcal{H}(f,(0,0))$ ist indefinit, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -6 < 0 \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 > 0.$$

(Die Vektoren $(1,1)$ und $(1,-1)$ findet man durch Probieren.) Also existiert an der Stelle $(0,0)$ kein lokales Extremum. Dagegen ist $\mathcal{H}(f,(1,1))$ nach dem Hurwitz-Kriterium positiv definit, denn es gilt $6 > 0$ und $\det \mathcal{H}(f,(1,1)) = 6^2 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27 > 0$. Also ist $(1,1)$ ein (isoliertes) lokales Minimum von f. Insgesamt besitzt die Funktion also nur ein einziges lokales Extremum, ein lokales Minimum.

zu (b) Für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sind die Jacobi- und die Hesse-Matrix jeweils gegeben durch $g'(x,y) = (\partial_1 g(x,y) \;\; \partial_2 g(x,y)) = (2y\sin(x)\cos(x) \;\; \sin(x)^2)$ und

$$\mathcal{H}(g)(x,y) \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_{11}g(x,y) & \partial_{12}g(x,y) \\ \partial_{21}g(x,y) & \partial_{22}g(x,y) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2y(\cos(x)^2 - \sin(x)^2) & 2\sin(x)\cos(x) \\ 2\sin(x)\cos(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt $g'(x,y) = (0 \;\; 0)$ genau dann, wenn $2y\sin(x)\cos(x) = \sin(x)^2 = 0$ gilt, was zu $\sin(x) = 0$ äquivalent ist. Weil die Nullstellenmenge der Sinusfunktion durch $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gegeben ist, ist

$$\{(k\pi, y) \mid k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}\}$$

die Menge der kritischen Stellen von g. Die Menge der lokalen Extrema von g ist laut Vorlesung in dieser Menge enthalten. Einsetzen in die Jacobi-Matrix liefert

$$\mathcal{H}(g)(k\pi, y) \quad = \quad \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{R}$. Wegen ${}^{\mathrm{t}}e_2 \cdot \mathcal{H}(g)(k\pi,y) \cdot e_2 = 0$ sind diese Matrizen weder positiv noch negativ definit. Deshalb kann das hinreichende Kriterium nicht angewendet werden. Es ist aber leicht direkt zu sehen, dass $(k\pi, y)$ im Fall $y > 0$ ein lokales Minimum und im Fall $y < 0$ ein lokales Maximum ist. In beiden Fällen gilt $g(k\pi, y) = 0$. Ist y positiv, so gilt dasselbe für alle y_1 in einer hinreichend kleinen Umgebung von y, und es gilt stets $\sin(x)^2 \geq 0$. Dies zeigt, dass in einer hinreichend kleinen Umgebung von (x,y) die Ungleichung $g(x_1,y_1) \geq 0 = g(k\pi, y)$ erfüllt ist. Folglich ist $(k\pi, y)$ ein lokales Minimum. Im Fall $y < 0$ läuft die Argumentation vollkommen analog.

Aufgabe 3

zu (a) Das eindeutig bestimmte Polynom mit den Nullstellen α und β ist jeweils $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$. Die gesuchte Abbildung ist also gegeben durch $\phi(\alpha,\beta) = (-\alpha-\beta, \alpha\beta)$ mit den Komponenten $\phi_1(\alpha,\beta) = -\alpha-\beta$ und $\phi_2(\alpha,\beta) = \alpha\beta$. Die Ableitung an der Stelle (α,β) ist jeweils gegeben durch

$$\phi'(\alpha,\beta) \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_1\phi_1(\alpha,\beta) & \partial_2\phi_1(\alpha,\beta) \\ \partial_1\phi_2(\alpha,\beta) & \partial_2\phi_2(\alpha,\beta) \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

zu (b) Die Abbildungen ϕ_1, ϕ_2 aus Teil (a) ist nach Satz (11.8) differenzierbar, weil die partiellen Ableitungen als Polynomfunktionen stetig sind. Also ist nach Proposition (11.3) die Abbildung ϕ eine differenzierbare Funktion. Auf Grund der Stetigkeit der partiellen Ableitungen ist die Ableitungsfunktion ϕ' stetig; insgesamt ist $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ also ein $\mathcal{C}^1$-Abbildung. Die Determinante der Jacobi-Matrix an der Stelle α, β ist gegeben durch

$$\det \phi'(\alpha,\beta) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad = \quad \beta - \alpha \quad \neq \quad 0 \quad ,$$

wobei im letzten Schritt die Voraussetzung $\alpha \neq \beta$ verwendet wurde. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes (13.3) über die lokale Umkehrbarkeit erfüllt. Wegen $(p,q) = \phi(\alpha,\beta)$ gibt es also offene Umgebungen U_1 von (α,β) und V_1 von (p,q), so dass $\phi|_{U_1}$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist. Sei $\psi : V_1 \to U_1$

gegeben durch $\psi = (\phi|_{U_1})^{-1}$. Diese Abbildung hat die in der Aufgabenstellung angegebenen Eigenschaften: Als Umkehrabbildung eines $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist sie ebenfalls ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, und ist $(p_1, q_1) \in V_1$, $(\alpha_1, \beta_1) = \psi(p_1, q_1)$, dann ist wegen $(p_1, q_1) = \phi(\alpha_1, \beta_1)$ und der Definition von ϕ durch $x^2 + p_1 x + q_1$ das Polynom mit den Nullstellen α_1, β_1 gegeben. Dies bedeutet, dass (p_1, q_1) jeweils auf die reellen Nullstellen des Polynoms $x^2 + p_1 x + q_1$ abgebildet wird.

zu (c) Das Polynom $x^2 - 10x + 21$ hat die Nullstellen 3 und 7, wie man mit Hilfe der p-q-Formel ausrechnet. Es gilt also $\phi(3,7) = (-10, 21)$, und für die nach Teil (b) in einer Umgebung von $(-10, 21)$ definierte lokale Umkehrfunktion ψ gilt $\psi(-10, 21) = (3, 7)$. Auf Grund der Umkehrregel aus Satz (11.16) gilt nun

$$\psi'(-10,21) \quad = \quad \phi'(3,7)^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \quad = \quad \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hat ein Polynom $f = x^2 + p_1 x + q_1$ zwei reelle Nullstellen, dann sind dies laut p-q-Formel gegeben durch $-\frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{2}\sqrt{p_1^2 - 4q_1}$ und $-\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}\sqrt{p_1^2 - 4q_1}$. Dies kann man verwenden, um die lokale Umkehrfunktion ψ explizit anzugeben: Sie ist gegeben durch

$$\psi(p_1, q_1) \quad = \quad \left(-\tfrac{1}{2}p_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{p_1^2 - 4q_1}, -\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{p_1^2 - 4q_1}\right).$$

Die Jacobi-Matrix an der Stelle (p_1, q_1) ist jeweils gegeben durch

$$\psi'(p_1, q_1) \quad = \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_1(p_1^2 - 4q_1)^{-1/2} & (p_1^2 - 4q_1)^{-1/2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_1(p_1^2 - 4q_1)^{-1/2} & -(p_1^2 - 4q_1)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Setzt man für (p_1, q_1) das Paar $(-10, 21)$ ein, so erhält man wiederum

$$\psi'(-10,21) \quad = \quad \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}.$$