$$\begin{pmatrix} \cdots \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdots \\ y-1 \end{pmatrix} = x+y-2+\frac{1}{2}\left(-(x-1)^2-(y-1)^2\right)$$

Blatt 12

<u>Aufgabe 1</u> ges: Taylorpolynom von $f: (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \ln(xy)$ an der Stelle $(1,1)$ vom Grad 1, 2 und 3

Lt. VL ist das Taylorpolynom n-ten Grades von f an der Stelle $(1,1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$T_n(f)(1,1)(x,y) = f(1,1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1,1)(\underbrace{(x-1,y-1),\ldots,(x-1,y-1)}_{k\text{-mal}})$$

Berechnung der partiellen Ableitungen von f bis zum Grad 3:

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}, \quad \partial_2 f(x,y) = \frac{1}{y}$$

$$\partial_{11} f(x,y) = -\frac{1}{x^2}, \quad \partial_{22} f(x,y) = -\frac{1}{y^2}, \quad \partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = 0$$

$$\partial_{111} f(x,y) = \frac{2}{x^3}, \quad \partial_{222} f(x,y) = \frac{2}{y^3}$$

Alle übrigen partiellen Abl. vom Grad 3 sind null.

Einsetzen in die Formel für das Taylorpolynom:

$$T_1(f)(1,1)(x,y) = f(1,1) + f'(1,1)(x-1,y-1) =$$

$$0 + \begin{pmatrix} \partial_1 f(1,1) & \partial_2 f(1,1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= x+y-2$$

$$T_2(f)(1,1)(x,y) = f(1,1) + f'(1,1)(x-1,y-1)$$

$$+ \frac{1}{2} f''(1,1)\big((x-1,y-1),(x-1,y-1)\big) =$$

$$x+y-2+\frac{1}{2}(x-1 \;\; y-1) \cdot \mathcal{H}(f)(1,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} =$$

$$x+y-2+\frac{1}{2}(x-1,y-1) \begin{pmatrix} \partial_{11} f(1,1) & \partial_{12} f(1,1) \\ \partial_{21} f(1,1) & \partial_{22} f(1,1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} =$$

$$x+y-2+\frac{1}{2}(x-1,y-1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = x+y-2+\frac{1}{2}\left(-(x-1)^2-(y-1)^2\right)$$

$$= x + y - 2 + \tfrac{1}{2}\left(-x^2 + 2x - 1 - y^2 + 2y - 1\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 + 2x + 2y - 3$$

Erinnerung: $f'''(1,1)(u,v,w) = \partial_u \partial_v \partial_w f(1,1)$

für bel. Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^2$

insbesondere: $f'''(1,1)(e_i, e_j, e_k) = \partial_{ijk} f(1,1)$

$$\Rightarrow f'''(1,1)\big((x-1,y-1),(x-1,y-1),(x-1,y-1)\big)$$

$$= f'''(1,1)\big((x-1)e_1 + (y-1)e_2,\ (x-1)e_1 + (y-1)e_2,\ (x-1)e_1 + (y-1)e_2\big)$$

$$= (x-1) f'''(1,1)\big(e_1,\ (x-1)e_1 + (y-1)e_2,\ (x-1)e_1 + (y-1)e_2\big)$$

$$+ (y-1) f'''(1,1)\big(e_2,\ (x-1)e_1 + (y-1)e_2,\ (x-1)e_1 + (y-1)e_2\big)$$

$$= \dots = (x-1)^3 f'''(1,1)(e_1,e_1,e_1) + 3(x-1)^2(y-1) f''(1,1)(e_1,e_1,e_2)$$

$$+ 3(x-1)(y-1)^2 f''(1,1)(e_1,e_2,e_2) + (y-1)^3 f'''(1,1)(e_2,e_2,e_2)$$

$$= (x-1)^3\, \partial_{111} f(1,1) + 3(x-1)^2(y-1)\, \partial_{112} f(1,1)$$

$$+ 3(x-1)(y-1)^2\, \partial_{122} f(1,1) + (y-1)^3\, \partial_{222} f(1,1)$$

$$= (x-1)^3 \cdot 2 + (y-1)^3 \cdot 2$$

$$= 2\,(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 2\,(y^3 - 3y^2 + 3y - 1)$$

$$\Longrightarrow \tau_3 f(1,1)(x,y) = \tau_2 f(1,1)(x,y) + \frac{1}{3!} f'''(1,1)\big((x-1,y-1),$$

$$(x-1,y-1),(x-1,y-1)\big) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 2x + 2y - 3$$

$$+ \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + \frac{1}{3}(y^3 - 3y^2 + 3y - 1)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 + 3x + 3y - \frac{11}{3}$$

Aufgabe 2 zu (a) geg. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y^2(1+x^2)$

gesucht: lokale Extrema der Fkt (Maxima / Minima ? isoliert ?)

Berechnung der Menge der kritischen Stellen:

$\partial_1 f(x,y) = 2xy^2$, $\partial_2 f(x,y) = 2y(1+x^2)$

Für bel. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt also: $f'(x,y) = 0 \iff$
$(\partial_1 f(x,y) \;\; \partial_2 f(x,y)) = (0 \;\; 0) \iff \partial_1 f(x,y) = \partial_2 f(x,y)$
$= 0 \iff 2xy^2 = 0$ und $2y(1+x^2) = 0 \iff y = 0$

Menge der krit. Stellen: $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Berechnung der zweiten Ableitung (= Hesse-Matrix):

$\partial_{11} f(x,y) = 2y^2$, $\partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = 4xy$, $\partial_{22} f(x,y) = 2(1+x^2)$

$$\Rightarrow \mathcal{H}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2(1+x^2) \end{pmatrix} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{H}(f)(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(1+x^2) \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es gilt jeweils $(0 \ 1)\, \mathcal{H}(f)(x,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(1+x^2) > 0$

$\Rightarrow$ Für kein $x \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{H}(f)(x,0)$ negativ semidefinit

$\Rightarrow$ f hat kein lokales Maximum

Die Menge der lokalen Minima ist in der Menge der krit. Stellen, also in $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ enthalten. Jede solche Stelle ist tatsächlich ein lokales (sogar ein globales) Minimum, denn für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $f(x_0,0) = 0 \leq y^2(1+x^2) = f(x,y)$. Kein $(x_0,0)$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$ ist aber ein isoliertes lok. Minimum.

Wäre dies der Fall, dann müsste ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existieren mit $f(x,y) > f(x_0,0) \ \forall (x,y) \in B_\varepsilon((x_0,0))$ (= Ball von Radius ε bzgl. $\|\cdot\|_\infty$) aber: $(x_0 + \frac{1}{2}\varepsilon, 0) \in B_\varepsilon((x_0,0))$ wg. $\|(x_0 + \frac{1}{2}\varepsilon) - (x_0,0)\|_\infty = \|(\frac{1}{2}\varepsilon, 0)\|_\infty = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$, $f(x_0 + \frac{1}{2}\varepsilon, 0) = 0 = f(x_0,0)$. Ergebnis insgesamt:

- keine lokalen Maxima
- Menge der lokalen Minima $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$
- kein lok. Minimum ist isoliert

Aufgabe 3 $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ordnet jedem (α,β,γ) $\in \mathbb{R}^3$ die Koeff. (p,q,r) des Pol. $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3+px^2+qx+r$

zu (a) ges.: explizite Darstellung von ϕ, Ableitung ϕ'

Sei $(\alpha,\beta,\gamma)\in \mathbb{R}^3$ vorgeg. $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) =$

$(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)(x-\gamma) = x^3-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x$

$-\alpha\beta\gamma \Rightarrow \phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist geg. durch

$(\alpha,\beta,\gamma) \mapsto (-\alpha-\beta-\gamma,\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma,\ -\alpha\beta\gamma)$

Ableitung: $\phi'(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ \beta+\gamma & \alpha+\gamma & \alpha+\beta \\ -\beta\gamma & -\alpha\gamma & -\alpha\beta \end{pmatrix}$

zu (6) geg: $f = x^3 + px^2 + qx + r \in \mathbb{R}[x]$ mit drei versch. Nullstellen α, β, γ z.zg: lokale Umkehrbarkeit in einer hinreichend kleinen Umgebung von (α, β, γ) anwendbar

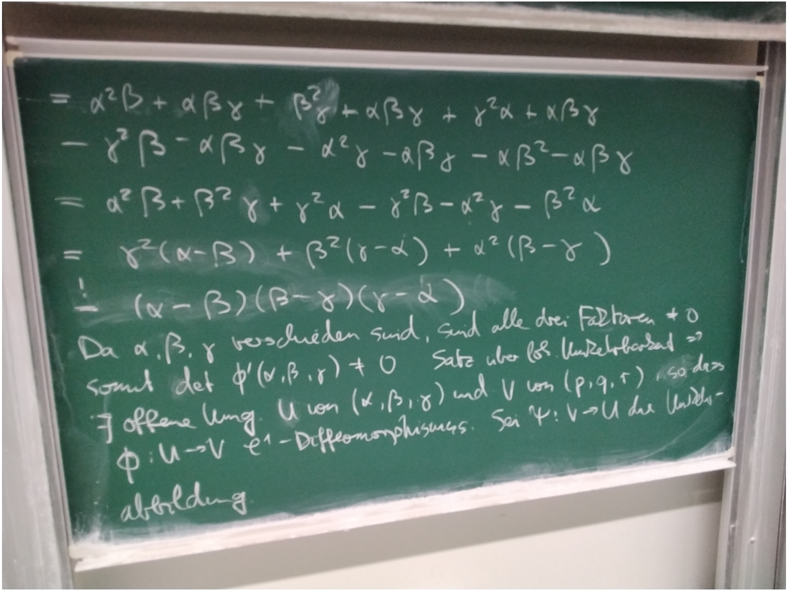
klar: ϕ ist stetig diff'bar (da die Komponenten von ϕ Polynome in α, β, γ sind)

zu überprüfen: $\phi'(\alpha, \beta, \gamma)$ ist invertierbar, d.h. $\det \phi'(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$

$$\det \phi'(\alpha, \beta, \gamma) = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ \beta+\gamma & \alpha+\gamma & \alpha+\beta \\ -\beta\gamma & -\alpha\gamma & -\alpha\beta \end{pmatrix} =$$

$$(-1)(\alpha+\gamma)(-\alpha\beta) + (-1)(\alpha+\beta)(-\beta\gamma) + (-1)(\beta+\gamma)(-\alpha\gamma)$$

$$+ (\alpha+\gamma)(-\beta\gamma) + (\alpha+\beta)(-\alpha\gamma) + (\beta+\gamma)(-\alpha\beta) =$$



$$= \alpha^2\beta + \alpha\beta\gamma + \beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha\beta\gamma$$
$$- \gamma^2\beta - \alpha\beta\gamma - \alpha^2\gamma - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta^2 - \alpha\beta\gamma$$
$$= \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha - \gamma^2\beta - \alpha^2\gamma - \beta^2\alpha$$
$$= \gamma^2(\alpha-\beta) + \beta^2(\gamma-\alpha) + \alpha^2(\beta-\gamma)$$
$$\overset{!}{=} (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

Da α, β, γ verschieden sind, sind alle drei Faktoren $\neq 0$
somit $\det \phi'(\alpha,\beta,\gamma) \neq 0$ Satz über lok. Umkehrbarkeit $\Rightarrow$
$\exists$ offene Umg. U von (α,β,γ) und V von (p,q,r), so dass
$\phi: U \to V$ C^1-Diffeomorphismus. Sei $\psi: V \to U$ die Umkehr-
abbildung

(Ergänzung auf der nächsten Seite)

Die Berechnung der Determinante ist nicht vollständig durchgeführt, sondern an der Stelle (!) lediglich das Ergebnis angegeben. Folgende Umformungen führen zu diesem Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha - \gamma^2\beta - \beta^2\alpha - \alpha^2\gamma &= \\
\alpha(\alpha\beta + \gamma^2 - \alpha\gamma) - \beta(\alpha\beta + \gamma^2 - \beta\gamma) &= \\
\alpha(\alpha\beta + \gamma^2 - \alpha\gamma - \beta\gamma) - \beta(\alpha\beta + \gamma^2 - \beta\gamma - \alpha\gamma) &= \\
(\alpha - \beta)(\alpha\beta + \gamma^2 - \alpha\gamma - \beta\gamma) &= \\
(\alpha - \beta)(\beta(\alpha - \gamma) - \gamma(\alpha - \gamma)) &= \\
(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma) &= (\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(\alpha - \gamma).
\end{aligned}$$

$\gamma(\alpha-\beta) + \beta^2(\gamma-\alpha) + \alpha^2(\beta-\gamma)$

zu (c) gesucht: $\psi'(-6, 11, -6)$

Bestimme zunächst einen Punkt $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ mit $\phi(\alpha, \beta, \gamma) = (-6, -11, -6)$. Sei $f = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Nullstellen von f (durch Probieren / p-q-Formel):

1, 2 und 3 $\Rightarrow \phi(1,2,3) = (-6, 11, -6)$

$\psi(-6, 11, -6) = (1, 2, 3)$

Umkehrregel $\Rightarrow \psi'(-6, 11, -6) = \phi'(1,2,3)^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 8 & 4 & 2 \\ -9 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= q - \tfrac{1}{2}p^2 \\ b &= \tfrac{2}{27} - \tfrac{1}{3}pq + r \end{aligned}}$$

Lösungsformel: $\alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{3}p^2 - q}\,\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}\,b}{2(\sqrt{-a})^3}\right) \pm \frac{1}{3}\pi\right) - \frac{1}{3}p$