

Analysis mehrerer Variablen

— Lösung Blatt 7 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Die Menge $\mathcal{L}(V, W)$ ist der Unterraum von $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ bestehend aus den *stetigen* linearen Abbildungen $\phi : V \rightarrow W$, also den linearen Abbildungen, für die eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $\|\phi(v)\| \leq \gamma\|v\|$ für alle $v \in V$ existiert. Die Operatornorm von $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$ ist das Supremum der Teilmenge von $\mathbb{R}_+$ gegeben durch $\{\|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| \leq 1\}$.

zu (b) Die Operatornorm ist laut Vorlesung durch die *Zeilensummen-Norm* gegeben, also die maximale Summe, die man erhält, wenn man die Beträge der Zahlen in einer Zeile addiert. Für die gegebene Matrix ist dies $7 + 8 + 9 = 24$.

zu (c) Nein. Beispielsweise ist $]0, 1[$ in $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik als offenes Intervall eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Diese ist in $[0, 1]$ enthalten. Aber $[0, 1]$ ist nicht offen, denn beispielsweise gilt $B_\varepsilon(0) =]-\varepsilon, \varepsilon[$ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, und somit ist $B_\varepsilon(0) \subseteq [0, 1]$ für kein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ erfüllt. Denn die Zahl $-\frac{1}{2}\varepsilon$ ist jeweils in $B_\varepsilon(0)$, aber nicht in $[0, 1]$ enthalten.

zu (d) Laut Vorlesung ist U offen, wenn eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $U = f^{-1}(V)$ existiert. Beispielsweise ist $f^{-1}(]a, b[)$ für jedes offene Intervall $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ offen.

zu (e) Nein. Als Beispiel kann man die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ betrachten, wobei auf $\mathbb{R}$ jeweils die Standardmetrik zu Grunde gelegt wird. Die Menge $\mathbb{R}$ ist offen, aber die Bildmenge $f(\mathbb{R}) = \{0\}$ ist keine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. (Dass $\{0\}$ nicht offen ist, wird in der Lösung von Aufgabe 1 (b) gezeigt.)

Aufgabe 1

zu (a) „ $\Rightarrow$ “ Sei U eine offene Teilmenge von X und $x \in U$ vorgegeben. Dann existiert nach Definition der Offenheit ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ gilt. Dann ist $\bar{B}_{1/n}(x)$ eine Teilmenge von $B_\varepsilon(x)$, denn für alle $y \in \bar{B}_{1/n}(x)$ gilt $d_X(x, y) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow d_X(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in B_\varepsilon(x)$. Daraus folgt $\bar{B}_{1/n}(x) \subseteq U$.

„ $\Leftarrow$ “ Sei U eine Teilmenge von X mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in U$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\bar{B}_{1/n}(x) \subseteq U$ existiert. Setzen wir $\varepsilon = \frac{1}{n}$, dann gilt $B_\varepsilon(x) \subseteq \bar{B}_{1/n}(x)$, denn für jedes $y \in B_\varepsilon(x)$ gilt $d_X(x, y) < \varepsilon \Rightarrow d_X(x, y) < \frac{1}{n} \Rightarrow d_X(x, y) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow y \in \bar{B}_{1/n}(x)$. Daraus folgt $B_\varepsilon(x) \subseteq U$, und damit ist die Offenheit von U nachgewiesen.

zu (b) Sei $(\mathbb{R}, d)$ der metrische Raum gegeben durch die reellen Zahlen mit der Standard-Metrik $d(x, y) = |x - y|$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. Als offene Intervalle sind die Mengen U_n laut Vorlesung in $(\mathbb{R}, d)$ offen. Der Durchschnitt dieser Mengen ist gegeben durch

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}.$$

Denn offensichtlich ist 0 in jedem der Intervalle U_n und somit auch im Durchschnitt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ enthalten. Nehmen wir nun an, dass der Durchschnitt noch eine weitere Zahl z enthält. Im Fall $z > 0$ gibt es wegen $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < z$. Es gilt dann $z \notin U_n$, und somit ist z erst recht nicht im Durchschnitt enthalten. Ist $z < 0$, dann finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < -z \Leftrightarrow z < -\frac{1}{n}$. Es gilt dann ebenfalls $z \notin U_n$, und wieder ist z nicht im Durchschnitt der Mengen enthalten.

Also ist der Durchschnitt tatsächlich durch $\{0\}$ gegeben. Aber dies ist keine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Denn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ist zum Beispiel $\frac{1}{2}\varepsilon$ zwar in $B_\varepsilon(0)$, aber nicht in $\{0\}$ enthalten. Es gibt also kein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(0) \subseteq \{0\}$.

Aufgabe 2

zu (a) Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = x$. Nach Prop. (3.4) ist f stetig. Als offenes Intervall ist $V =]-1, 3[$ nach Prop. (4.2) eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$(x, y) \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow f(x, y) \in V \Leftrightarrow x \in]-1, 3[\Leftrightarrow (x, y) \in]-1, 3[\times \mathbb{R}.$$

Also gilt $f^{-1}(V) =]-1, 3[\times \mathbb{R}$.

zu (b) Die Menge $U_1 = f^{-1}(V)$ ist nach Folgerung (4.10) als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung offen in $\mathbb{R}^2$. Sei $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 3\}$. Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$(x, y) \in U_2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 3 \Leftrightarrow \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{3} \Leftrightarrow (x, y) \in B_{\sqrt{3}}((0, 0)).$$

Also stimmt U_2 mit dem offenen Ball $B_{\sqrt{3}}((0, 0))$ überein und ist somit ebenfalls offen. Wegen $U = U_1 \cap U_2$ ist U nach Satz (4.5) ebenfalls eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

zu (c) Die angegebene Menge, die wir hier mit V bezeichnen, ist nach Definition der Durchschnitt von $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x) < y\}$ und $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \cos(x)\}$. Nach Satz (4.5) genügt es also zu zeigen, dass U_1 und U_2 beide offen sind. Offenbar ist $\mathbb{R}^+$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ist nämlich $x \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann gilt $B_x(x) \subseteq \mathbb{R}^+$, denn für alle $y \in B_x(x)$ ist $|y - x| < x \Rightarrow y > x - x = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R}^+$.

Die Funktion $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y - \sin(x)$ ist stetig, denn $(x, y) \mapsto -\sin(x)$ ist als Komposition der stetigen Abbildungen $(x, y) \mapsto x$ und $x \mapsto -\sin(x)$ stetig, $(x, y) \mapsto y$ ist ebenfalls stetig, und auch f_1 ist als Summe zweier stetiger Funktionen stetig. Nun gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Äquivalenz

$$\begin{aligned} (x, y) \in U_1 &\Leftrightarrow \sin(x) < y \Leftrightarrow y - \sin(x) > 0 \Leftrightarrow f_1(x, y) > 0 \Leftrightarrow \\ &f_1(x, y) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow (x, y) \in f_1^{-1}(\mathbb{R}^+). \end{aligned}$$

Also gilt $U_1 = f_1^{-1}(\mathbb{R}^+)$, und die Offenheit von U_1 ergibt sich wieder aus Folgerung (4.10). Genauso wie bei f_1 begründet man, dass die Funktion $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \cos(x) - y$ stetig ist und dass $U_2 = f_2^{-1}(\mathbb{R}^+)$ gilt. Dies zeigt, dass auch U_2 offen ist.

Aufgabe 3

zu (a) Seien $f, g \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Zu zeigen ist $\phi(f + g) = \phi(f) + \phi(g)$ und $\phi(\lambda f) = \lambda\phi(f)$. Die erste Gleichung erhält man durch die Rechnung

$$\begin{aligned}\phi(f + g) &= \int_{-1}^1 (f + g)(x) \, dx = \int_{-1}^1 (f(x) + g(x)) \, dx = \\ &= \int_{-1}^1 f(x) \, dx + \int_{-1}^1 g(x) \, dx = \phi(f) + \phi(g)\end{aligned}$$

und die zweite ergibt sich aus

$$\phi(\lambda f) = \int_{-1}^1 (\lambda f)(x) \, dx = \int_{-1}^1 \lambda f(x) \, dx = \lambda \int_{-1}^1 f(x) \, dx = \lambda\phi(f).$$

zu (b) Nach Definition der Supremumsnorm gilt $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ für alle $f \in V$. Daraus folgt

$$|\phi(f)| = \left| \int_{-1}^1 f(x) \, dx \right| \leq \int_{-1}^1 |f(x)| \, dx \leq \int_{-1}^1 \|f\|_\infty \, dx = \|f\|_\infty \int_{-1}^1 1 \, dx = 2\|f\|_\infty.$$

Setzen wir $\gamma = 2$, dann gilt also $|\phi(f)| \leq 2\|f\|_\infty$ für alle $f \in V$. Daraus folgt, dass ϕ stetig ist. Die Operatornorm $\|\phi\|$ ist nach Definition das Supremum der Menge

$$S = \{ |\phi(f)| \mid f \in V, \|f\|_\infty \leq 1 \}.$$

Für alle $f \in V$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$ gilt $|\phi(f)| \leq 2\|f\|_\infty \leq 2 \cdot 1 = 2$. Also ist 2 eine obere Schranke von S .

Sei nun $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ die konstante Funktion gegeben durch $g(x) = 1$ für alle $x \in [-1, 1]$. Die Funktion g ist stetig, also in V enthalten, und es gilt $\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| \mid x \in [-1, 1]\} = \sup\{1\} = 1$. Wegen $\phi(g) = \int_{-1}^1 1 \, dx = 2$ ist $|\phi(g)| = 2$ in S enthalten. Damit ist insgesamt $\sup S = \max S = 2$ und somit $\|\phi\| = 2$ bewiesen.