Dann gilt wegen $d(x,z) \leq 2$ die Ungleichung
$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ offensichtlich

Globalübungsblatt 5

Aufgabe 1

geg.: $\mathbb{R}$-Vektorraum $V \neq \{0_V\}$, $\| \ \|$ Norm auf V

$d: V \times V \to \mathbb{R}_+$ geg. durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y,\ \|x-y\| \leq 1 \\ 2 & \text{falls } \|x-y\| > 1 \end{cases}$$

zu (a) zzg.: d ist eine Metrik auf V

Seien $x, y, z \in V$ zu überprüfen:

(i) $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

<u>zu (i)</u> „$\Rightarrow$" $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$ auf Grund der Definition von d

„$\Leftarrow$" $d(x,y) = 0$ Wäre $x \neq y$, dann würde nach Def $d(x,y) \in \{1,2\}$ folgen. Somit ist $x = y$.

<u>zu (ii)</u> 1. <u>Fall</u>: $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \overset{\text{so}}{\Rightarrow} d(y,x) = 0$

2. <u>Fall</u>: $d(x,y) = 1 \Rightarrow x \neq y$, $\|x-y\| \leq 1 \Rightarrow y \neq x$, $\|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1|\,\|x-y\| = \|x-y\| \leq 1 \Rightarrow d(y,x) = 1$

3. <u>Fall</u>: $d(x,y) = 2 \Rightarrow x \neq y$, $\|x-y\| > 1 \Rightarrow y \neq x$, $\|y-x\| = \|x-y\| > 1 \Rightarrow d(y,x) = 2$

<u>zu (iii)</u> 1. <u>Fall</u>: $d(x,y) + d(y,z) \geq 2$

Dann gilt wegen $d(x,z) \leq 2$ die Ungleichung $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ offensichtlich

2. Fall: $d(x,y) + d(y,z) \leq 1$

Wegen $d(x,y), d(y,z) \in \{0,1,2\}$ muss dann $d(x,y) = 0$ oder $d(y,z) = 0$ gelten. Es folgt $x = y$ oder $y = z$.

Im Fall $x = y$ gilt $d(x,z) = d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$,

im Fall $y = z$ entsprechend $d(x,z) = d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

zu (b) (X,d) metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X, $a \in X$

$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d(a, x_n) < \varepsilon$

hier: $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in V, $a \in V$, z.zg.:

$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ in (V,d) $\iff \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x^{(n)} = a$.

„$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Vor $\Rightarrow$ Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = c$ in (X,d)

dass $x^{(n)} = a$ für alle $n \geq N$ gilt. Für alle $n \geq N$ ist somit $d(a,x^{(n)}) = d(a,a) = 0 < \varepsilon$. Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ in (V,d)

„$\Longrightarrow$" Vor. $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}: \forall n \geq N:$
$d(a,x^{(n)}) < 1$. Wegen $d(a,x^{(n)}) \in \{0,1,2\}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ folgt $d(a,x^{(n)}) = 0$ und somit $x^{(n)} = a$ für alle $n \geq N$.

<u>zu (c)</u> Sei $\|\cdot\|'$ eine <u>beliebige</u> Norm auf V.
d durch $\|\cdot\|'$ <u>induziert</u> $\Leftrightarrow d(x,y) = \|x-y\|'$ $\forall x,y\in V$

<u>Beh.</u> d wird nicht von $\|\cdot\|'$ induziert

$V \neq \{0_V\} \Rightarrow \exists v \in V\setminus\{0_V\} \Rightarrow d(0_V,v) \in \{1,2\}$

Ist d durch $\|\cdot\|'$ induziert, dann folgt

$\|v\|' = d(0_V, v) \in \{1,2\} \Rightarrow \|3v\|' = |3|\,\|v\|' \in \{3,6\}$

$\Rightarrow d(0_V, 3v) = \|3v\|' \in \{3,6\}$ ↯ da d nur die Werte 0, 1, 2 annimmt

Aufgabe 2

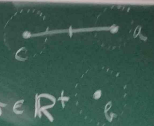
(X,d) metrischer Raum, $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X, $a \in X$

a Häufungspunkt der Folge $\Leftrightarrow$ Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es jeweils unendl. viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x^{(n)} \in B_\varepsilon(a)$ (gleichbedeutend: $d(a, x^{(n)}) < \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$)

zu (a) Vor: $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ hat (mind.) zwei verschiedene Häufungspunkte $a, b \in X$ $(a \neq b)$. z.zg:

Es gibt kein $c \in X$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = c$ in (X,d)

Ang. es gilt $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = c$ für ein $c \in X$



1. <u>Fall</u>: $c \neq a$ Sei $r = d(a,c)$ $a \neq c \Rightarrow r \in \mathbb{R}^+$

$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = c \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : d(c, x^{(n)}) < \frac{1}{2} r \ \forall n \geq N$

a Häufungspunkt der Folge $\Rightarrow$ Es gilt $d(a, x^{(n)}) < \frac{1}{2} r$

für unendl. viele $n \in \mathbb{N}$ $\rightarrow$ $d(a, x^{(n)}) < \frac{1}{2} r$ für ein $n \geq N$

$\Rightarrow r = d(a,c) \leq d(a, x^{(n)}) + d(x^{(n)}, c) < \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r = r$ ↯

2. <u>Fall</u>: $c = a$ Verwende in diesem Fall $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = c = a$,

und dass b Häufungspunkt ist, Rest analog.

<u>zu (b)</u> $X = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^3$, $d(x,y) = \|x-y\|_2$

„anschauliche" euklidische Norm

Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, d.h. $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$

mit $0 \leq x_k^{(n)} \leq 1 \quad \forall k \in \{1,2,3\},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

zu zeigen: Die Folge besitzt einen Häufungspunkt.

(Hinweis: Satz von Bolzano-Weierstrass: Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Häufungspunkt.)

z.zg.: $\exists$ Punkt $(a,b,c) \in [0,1]^3$, so dass für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils unendl. viele $n \in \mathbb{N}$ mit

$d((a,b,c), x^{(n)}) = \| x^{(n)} - (a,b,c) \|_2 < \varepsilon$ existieren

$0 \leq x_1^{(n)} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ $\underset{\text{Bolzano-W.}}{\Rightarrow}$ $(x_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt einen Häufungspunkt a in $[0,1]$

Laut Analysis einer Variablen gleichbed. Es gibt in
$(x_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(x_1^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^{(n_k)} = a$.
Ersetzen wir $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ durch $(x^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$, dann gilt
also $\lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a$ $\quad -1 \leq x_2^{(n)} \leq 1 \;\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow (x_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$
beschränkt $\Rightarrow$ Ersetzen wir $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ erneut durch eine
geeignete Teilfolge, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_2^{(n)} = b$
für ein $b\in\mathbb{R}$.
Genauso führt der Übergang zu einer weiteren geeigneten
Teilfolge dazu, dass zusätzlich $\lim\limits_{n\to\infty} x_3^{(n)} = c$ für ein $c\in\mathbb{R}$
gilt. Da d eine induzierte Metrik auf $\mathbb{R}^3$ ist,
folgt daraus $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = (a, b, c)$.

Ist nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bel. vorgeg., dann gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d((a,b,c), x^{(n)}) < \varepsilon \ \forall n \geq N$. Insbesondere gilt $d((a,b,c), x^{(n)}) < \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, also auch für unendlich viele Glieder der ursprünglichen Folge.

<u>Aufgabe 3</u> V $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\| \, \|, \| \, \|'$ Normen auf V

Vor: Es gibt eine Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$\lim_{n \to \infty} \|x^{(n)}\| = 0$ und $\|x^{(n)}\|' \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

z.zg.: $\| \cdot \|$ und $\| \cdot \|'$ sind nicht äquivalent

1. <u>Möglichkeit</u>: Ang. $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ sind äquivalent

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^{(n)} - 0_V\| = 0$ folgt lt. Vl., dass $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $\|\cdot\|$ gegen 0_V konvergiert. Da $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ äquivalent sind, müsste $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ auch bzgl. $\|\cdot\|'$ gegen 0_V konvergieren. Insb. müsste es ein $N\in\mathbb{N}$ geben, so dass $\|x^{(n)} - 0_V\|' < 1 \ \forall n \geq N$ gilt.

↯ da n.V. $\|x^{(n)} - 0_V\|' \geq 1 \ \forall n\in\mathbb{N}$.

2. <u>Möglichkeit</u> Ang. $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ sind äquivalent. $\overset{\text{Def}}{\Longrightarrow}$

$\exists\, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $\|v\|' \leq \gamma_1 \|v\|$, $\|v\| \leq \gamma_2 \|v\|' \ \forall v \in V$

$\lim\limits_{n\to\infty} \|x^{(n)}\| = 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \|x^{(n)}\| < \gamma_1^{-1} \ \forall n \geq N$

$\Rightarrow \|x^{(N)}\|' \leq \gamma_1 \|x^{(N)}\| < \gamma_1 \gamma_1^{-1} = 1$ ↯ zu $\|x^{(N)}\|' \geq 1$