Globalübungsblatt 2

Aufgabe 1

<u>zu (a)</u> geg parallele Ebenen $E, E' \subseteq R^3$ in Hessescher Normalform $E: ax+by+cz=d$

$E': ax+by+cz=d'$

$d, d' \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2+b^2+c^2=1$

gesucht: Abstand $d(E,E')$

Lt. Vl gilt $d(E,E') = \|v'-v-w\|$ wobei $v \in E$, $v' \in E'$, $w = \pi_U(v'-v)$, wobei $U = \mathcal{L}(E)+\mathcal{L}(E')$

$\mathcal{L}(E)$ = zu E parallele Ebene E_0 durch den Ursprung

Dies ist $E_0: ax+by+cz=0$, denn:

$d(E,E') = |d-d'|$

$n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ Dann gilt für bel. Punkte
$p = (x_1, y_1, z_1)$, $q = (x_2, y_2, z_2)$ auf E jeweils
$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = (ax_1 + by_1 + cz_1)$
$-(ax_2 + by_2 + cz_2) = d - d = 0$. $\Rightarrow (q-p) = (x_2 - x_1,$
$y_2 - y_1, z_2 - z_1) \in E_0$ Daraus folgt $\mathcal{L}(E) = E_0$, ebenso
$\mathcal{L}(E') = E_0$
Damit ist gezeigt: $U = \mathcal{L}(E) + \mathcal{L}(E') = E_0 + E_0 = E_0$
Sei $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ eine ON-Basis von U. Dann gilt lt. Vl.
$\pi_U(x) = \langle v_1, x \rangle v_1 + \langle v_2, x \rangle v_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$
Die Gl. E_0: $ax + by + cz = 0$ zeigt, dass
$U = E_0 = \operatorname{Lin}(n)^{\perp}$, $n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow (v_1, v_2, n)$ ON-Basis von $\mathbb{R}^3$

(v_1, v_2) eine ON-Basis von U. Dann gilt lt. VL ... $= E_0 + E_0 = E_0$

$\Rightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}: \; v' - v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma n$

$\Rightarrow w = \pi_U(v' - v) = \langle v_1, v' - v \rangle v_1 + \langle v_2, v' - v \rangle v_2 =$

$\langle v_1, \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma n \rangle v_1 + \langle v_2, \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma n \rangle v_2 =$ $\quad \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, n \rangle = \langle v_2, n \rangle = 0$

$\alpha \langle v_1, v_1 \rangle v_1 + \beta \langle v_2, v_2 \rangle v_2 = \alpha v_1 + \beta v_2$

$\Rightarrow v' - v - w = \gamma n \Rightarrow d(E' - E) = \| v' - v - w \| =$

$= \| \gamma n \| = |\gamma| \, \| n \| = |\gamma|$

$\gamma = \gamma \langle n, n \rangle = \langle \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma n, n \rangle = \langle v' - v, n \rangle$

$v = (x_1, y_1, z_1), \; v' = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \langle v' - v, n \rangle =$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1)$$

$\overset{\text{s.o.}}{=} d' - d$

<u>also</u>: $d(E, E') = |d' - d|$

<u>zu (b)</u> gesucht: alle Paare (d_1, d_2), so dass im $\mathbb{R}^4$ windschiefe affine Unterräume A_1, A_2 existieren mit $\dim A_i = d_i$, $i = 1,2$, $0 < d_1 \leq d_2 < 4$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Seien $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ affine Unterräume mit den angeg. Eigenschaften. Schreibe $A_1 = p_1 + U_1$, $A_2 = p_2 + U_2$, wobei $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^4$, U_1, U_2 Untervektorräume.

<u>Beh.</u>: Aus $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ folgt $p_2 - p_1 \notin U_1 + U_2$

denn: Ang. $p_2 - p_1 \in U_1 + U_2$ $\to \exists\, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ mit $p_2 - p_1 = u_1 + u_2$ $\Rightarrow p_1 + u_1 = p_2 - u_2 \in A_1 \cap A_2$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Also muss $\dim(U_1 + U_2) \leq 3$ gelten.

A_1, A_2 windschief $\Rightarrow$ weder $U_1 \subseteq U_2$ noch $U_2 \subseteq U_1$

$\Rightarrow$ weder $U_1 \subseteq U_2$ noch $U_2 \subseteq U_1$

$U_1 \not\subseteq U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \subsetneq U_1 \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) < \dim(U_1)$

Dimensionssatz $\Rightarrow \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$
$- \dim(U_1 \cap U_2) > \dim(U_2)$

$\dim(U_2) < \dim(U_1 + U_2) \leq 3 \Rightarrow \dim(U_1) \leq \dim(U_2) \leq 2$

einzige Mögl.: $(d_1, d_2) \in \{(1,1), (1,2), (2,2)\}$

konkretes Beispiel für $(d_1, d_2) = (2,2)$:
$A_1 = \mathrm{lin}(e_1, e_2)$, $A_2 = e_3 + \mathrm{lin}(e_2, e_4)$

für $(d_1, d_2) = (1,2)$: $A_1 = \mathrm{lin}(e_1)$, $A_2 = e_3 + \mathrm{lin}(e_2, e_4)$

für $(d_1, d_2) = (1,1)$: $A_1 = \mathrm{lin}(e_1)$, $A_2 = e_3 + \mathrm{lin}(e_2)$

... Drehmatrizen, denn

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$, Spalten bilden ON-Basis

Aufgabe 2 zu (a) Gleitspiegelung an der Geraden g mit der Translation $w \in \mathcal{L}(g)$

$$S_{g,w} = S_g \circ \tau_w$$

z.zg. $S_{g,w} = \tau_w \circ S_g$ $(*)$

Formel für die Spiegelung:

$$S_g(v) = v - 2\langle v-p, n\rangle n$$, wobei n normiert und $n \in \mathcal{L}(g)^{\perp}$

Beweis von $(*)$: linke Seite: Für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$S_{g,w}(v) = (S_g \circ \tau_w)(v) = S_g(v+w) =$$
$$v + w - 2\langle v+w-p, n\rangle n$$

rechte Seite: Für jedes $v \in V$ gilt $(\tau_w \circ S_g)(v) = S_g(v) + w =$

$$v - 2\langle v-p, n\rangle n + w = v + w - 2\langle v-p, n\rangle n \overset{n \in \mathcal{L}(g)^\perp}{\underset{\substack{w \in \mathcal{L}(g) \\ \langle w,n\rangle = 0}}{=}}$$

$$= v + w - 2\langle v-p, n\rangle n + 2\langle w, n\rangle n$$

$$= v + w - 2\langle v+w-p, n\rangle n \Rightarrow \text{l.S.} = \text{r.S.}$$

zu (b) Drehung um $p \in \mathbb{R}^2$ mit Winkel α $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

$$\rho_{\alpha,p} = \tau_p \circ \phi_{D_\alpha} \circ \tau_{-p},$$

Sei ϕ eine orientierungserhaltende Bewegung

z. zg.: ϕ Translation oder Drehung

Lt. Vl. gilt $\phi = \tau_u \circ \phi_A$ mit geeigneten $u \in \mathbb{R}^2$, $A \in SO(2)$

(d.h. A orthogonal, $\det A = +1$).

Die Elemente von $SO(2)$ sind genau die Drehmatrizen, denn:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$. Spalten bilden ON-Basis

$\Rightarrow a^2+c^2 = b^2+d^2 = 1, \; ab+cd = 0$

$\chi_A = \det\begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} = (x-a)(x-d) - bc$

$= x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - (a+d)x + \det(A)$

$= x^2 - (a+d)x + 1$ Nullstellen: $\frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+d)^2 - 1}$

... Ergebnis: $\exists \alpha \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = D_\alpha$

1. Fall: $\alpha \neq 0$ Für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ gilt

$\phi(v) = v \Leftrightarrow u + D_\alpha v = v \Leftrightarrow u = (E - D_\alpha) v$

$\Leftrightarrow v = (E - D_\alpha)^{-1} u$. Setze $p = (E - D_\alpha)^{-1} u$.

Dann gilt für alle $v \in \mathbb{R}^2$

1 kein Eigenvektor von D_α $\Leftrightarrow$ $E - D_\alpha$ invertierbar

$\Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda \in \{\pm 1\}$, ebenso $\mu \in \{\pm 1\} \Rightarrow$ O.B.d.A. $\lambda = 1, \mu = -1$

$\rho_{\alpha,p}(v) = (\tau_p \circ \phi_{D_\alpha} \circ \tau_{-p})(v) =$
$(\tau_p \circ \phi_{D_\alpha})(v-p) = \tau_p(D_\alpha(v-p)) = p + D_\alpha(v-p)$
$= (E - D_\alpha)p + D_\alpha v = u + D_\alpha v = \phi(v)$

2. Fall. $\alpha = 0$ Dann ist $\phi = \tau_u$, also eine Translation.

zu (c) Sei ϕ eine orientierungsumkehrende Bewegung.

zu zeigen: ϕ ist Spiegelung oder Gleitspiegelung

Lt. Vl gilt $\phi = \tau_u \circ \phi_A$, $u \in \mathbb{R}^2$, $A \in O(2)$, $\det(A) = -1$

Schreibe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow ad - bc = \det A = -1$

$\chi_A = x^2 - (a+d)x - 1$ Diskriminante des Polynoms:

$(a+d)^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ zwei reelle Eigenwerte

Produkt der Eigenwerte $= \det A = -1$

Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ zwei zugehörige Eigenvektoren,

normiert, λ, μ Eigenwerte.

$\lambda^2 = \lambda^2 \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \langle Av, Av \rangle \overset{A \text{ orth.}}{=} \langle v, v \rangle$

$\Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda \in \{\pm 1\}$, ebenso $\mu \in \{\pm 1\} \Rightarrow$ O.B.d.A. $\lambda = 1, \mu = -1$

sind also gleich

Schreibe $u = \alpha v + \beta w$

Sei $\tilde{v} \in \mathbb{R}^2$, schreibe $\tilde{v} = \gamma v + \delta w$ mit $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$s_{g,w}(\tilde{v}) = (s_g \circ \tau_{\alpha v})(\tilde{v}) = s_g(\alpha v + \tilde{v}) =$$

$$s_g((\alpha+\gamma)v + \delta w) = (\alpha+\gamma)v + \delta w$$

$$- 2\langle(\alpha+\gamma)v + \delta w - \tfrac{1}{2}\beta w, w\rangle w =$$

$$(\alpha+\gamma)v + \delta w - 2(\delta - \tfrac{1}{2}\beta)w = (\alpha+\gamma)v + (\beta-\delta)w$$

ebenso: $\phi(\tilde{v}) = \tau_u(\phi_A(\tilde{v})) = \tau_u(A(\gamma v + \delta w))$

$$= \tau_u(\gamma A v + \delta A w) = \tau_u(\gamma v - \delta w) =$$

$$u + \gamma v - \delta w = (\alpha v + \beta w) + \gamma v - \delta w =$$

$(\alpha+\gamma)v + (\beta-\delta)w$ also: $\phi(\tilde{v}) = s_{g,w}(\tilde{v})$