Freitag, 14. Januar 2022

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 11 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Seien $m, n, p \in \mathbb{R}$, seien f, g differenzierbare Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, und sei $a \in \mathbb{R}^m$. Welche beiden Jacobi-Matrizen müssen in der Kettenregel miteinander multipliziert werden, damit man die Ableitung $(g \circ f)'(a)$ erhält?

(b) Wie lautet die Produktregel? Warum wurde die Produktregel nur für reellwertige Funktionen formuliert?

(c) Seien $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ zwei Abbildungen, und sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$, mit dem euklidischen Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Finden Sie mit Hilfe der Produktregel eine Formel für $h'(x)$, indem Sie die Komponenten von f und g betrachten.

(d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Hesse-Matrix $\mathcal{H}(f)(a)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und der zweiten Ableitung $f''(a)$? Wie rechnet man die Hesse-Matrix aus?

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 y$.

(a) Bestimmen Sie zu jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Darstellungsmatrix der Bilinearform $f''(x, y)$ bezüglich der Einheitsbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$.

(b) Verwenden Sie Prop. (12.5), um zu jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Darstellungsmatrix der Bilinearform $f''(x, y)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (v, w)$ bestehend aus den Vektoren $v = (-1, 0)$ und $w = (1, -1)$ zu berechnen.

(c) Berechnen Sie $f''(1, 1)(2v - 3w, 4v + 5w)$.

Aufgabe 2

Seien $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ zwei differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die eindimensionale Quotientenregel, d.h. leiten Sie einen Ausdruck für $(\frac{f_1}{f_2})'$ her, indem Sie die mehrdimensionale Kettenregel auf die Funktion $F : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ anwenden.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass $f(x, y) = (ye^{-x}, 2x)$ eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist. Weisen Sie mit Hilfe der Umkehrregel nach, dass auch die Umkehrabbildung in jedem Punkt ihres Definitionsbereich differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f^{-1} in jedem Punkt.

Dieses Blatt wird vom 17. bis zum 21. Januar 2022 im Tutorium bearbeitet.

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 11 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = (z+5)e^{x^2+y^2}$. Bestimmen Sie für jeden Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ die Darstellungsmatrizen der Bilinearform $f''(x,y,z)$ bezüglich

(a) der Einheitsbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^3$,

(b) der Basis $\mathcal{B} = (u,v,w)$ bestehend aus den Vektoren $u = e_1$, $v = e_1 - e_2$ und $w = e_1 - e_2 + e_3$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Seien $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(t) = f_1(t)f_2(t) + f_1(t)f_3(t) + f_2(t)f_3(t)$. Bestimmen Sie die Ableitung F' durch Anwendung der mehrdimensionalen Kettenregel auf die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto xy + xz + yz$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei $U = \mathbb{R} \times \left]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[\times \left]0, \pi\right[$ und $f : U \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x,y,z) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y), \cos(z))$. Weisen Sie nach, dass f eine Bijektion von U auf $V = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \left]-1, 1\right[$ ist, dass die Umkehrabbildung f^{-1} auf V differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f^{-1} in jedem Punkt von V.

Abgabe: Freitag, 28. Januar 2022, 10:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.