Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 4 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Wie ist eine Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum definiert? Welche Beispiele für Normen sind Ihnen aus der Vorlesung bekannt?

(b) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V, $v \in V$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Wie ist der abgeschlossene Ball $\bar{\mathrm{B}}_{\|\cdot\|,r}(v)$ definiert?

(c) Ist es möglich, dass $\bar{\mathrm{B}}_{\|\cdot\|,r}(v) = \{v\}$ oder $\bar{\mathrm{B}}_{\|\cdot\|,r}(v) = V$ gilt?

(d) Sei (V, b) ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, U ein Untervektorraum der Dimension $n-1$ und $(v_1, ..., v_{n-1})$ eine ON-Basis von U. Welche Schritte müssen im Gram-Schmidt-Verfahren ausgeführt werden, um die Basis zu einer ON-Basis von V zu erweitern?

Aufgabe 1

Gegeben sei die folgende symmetrische Matrix $A \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{R}}$.

$$A \quad = \quad \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 4 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Berechnen Sie für jeden Eigenwert λ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$.

(c) Ermitteln Sie (mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens) für jeden Eigenwert λ eine ON-Basis des Untervektorraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ von $\mathbb{R}^3$.

(d) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, so dass $D = {}^{\mathrm{t}}TAT$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2

(a) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $D_\alpha \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ definiert durch

$$D_\alpha \quad = \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass jedes D_α orthogonal ist, und dass im Fall $0 \le \alpha \le \pi$ für jeden Vektor $v \in \mathrm{lin}\{e_1, e_2\}$ ungleich Null jeweils $\sphericalangle(v, D_\alpha v) = \alpha$ gilt.

(b) Seien $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ lineare Ebenen, also zweidimensionale Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$. Beweisen Sie, dass es eine orthogonale Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\phi(E_1) = E_2$ gibt.
Hinweis: Betrachten Sie ON-Basen von E_1 und E_2.

Aufgabe 3

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Seien $v, w \in V$ und $r, s \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass genau dann $\bar{\mathrm{B}}_{\|\cdot\|,r}(v) \cap \bar{\mathrm{B}}_{\|\cdot\|,s}(w) = \varnothing$ gilt, wenn $\|w - v\| > r + s$ erfüllt ist. (Machen Sie sich die Bedeutung der Aussage anhand einer Skizze klar.)

Dieses Blatt wird vom 15. bis zum 19. November im Tutorium bearbeitet.

Analysis mehrerer Variablen

— Blatt 4 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie für die symmetrische Matrix $A \in \mathcal{M}_{4,\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 0 & \sqrt{3} & -6 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 11 & 2\sqrt{3} \\ -6 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix $T \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, so dass $D = {}^{\mathrm{t}}TAT$ eine Diagonalmatrix ist. (Als charakteristisches Polynom sollte $\chi_A = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$ herauskommen.)

Aufgabe 2 (2+3+2+3 Punkte)

Sei (V, b) ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und U ein Untervektorraum.

(a) Weisen Sie nach, dass die Orthognalprojektion π_U auf U, aufgefasst als lineare Abbildung $V \to V$, selbstadjungiert ist.

(b) Zeigen Sie, dass π_U im Fall $U \subsetneq V$ nicht orthgonal ist.

(c) Die Abbildung $s_U : V \to V$, $v \mapsto 2\pi_U(v) - v$ bezeichnet man als *Spiegelung* am Untervektorraum U. Zeigen Sie, dass $s_U^2 = \mathrm{id}_V$ gilt.

(d) Weisen Sie nach, dass s_U selbstadjungiert und orthogonal ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Seien $v, w \in V$ und $r, s \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass genau dann $\bar{\mathrm{B}}_{\|\cdot\|,s}(w) \subseteq \bar{\mathrm{B}}_{\|\cdot\|,r}(v)$ erfüllt ist, wenn $s + \|w - v\| \leq r$ gilt.

Abgabe: Freitag, 26. November 2021, 10:15 Uhr
Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.