Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2021/22
03.03.2022

Analysis mehrerer Variablen (LA Gym)

(Lehramt Gymnasium)

Online-Klausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten erhalten Sie per Email.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hiermit erkläre ich, die Klausur eigenständig bearbeitet und während der Bearbeitungszeit keinen Kontakt zu anderen Personen aufgenommen habe.

____

(Unterschrift)

Hinweise:

(a) Wie bei den Präsenzklausuren achten Sie bitte auch hier darauf, auf jedem Blatt **immer nur eine Aufgabe** zu bearbeiten.

(b) Als Hilfsmittel zugelassen, aber bei guter Vorbereitung nicht notwendig, sind das Skript, Lösungen von Übungsaufgaben, Lehrbücher und beliebige andere Materialien. Nicht zulässig ist die Kontaktaufnahme zu anderen Personen während der Bearbeitungszeit. Bitte denken Sie auch daran, die obige Eigenständigkeitserklärung zu unterschreiben.

(c) Nach der regulären Bearbeitungszeit von 120 Minuten stehen weitere 45 Minuten zum Einscannen (oder notfalls Fotografieren) der Klausurblätter und zum Versenden per Email zur Verfügung. Akzeptiert wird nur eine einzelne, zusammenhängende PDF-Datei. Einsendungen, die nach 15:15:00 Uhr eintreffen, können nicht gewertet werden.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Bearbeitungszeit: 120+45 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____________________

Aufgabe 1. (3+4+3 Punkte)

Sei die Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$T \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Dass T invertierbar ist, braucht nicht überprüft werden.) Sei $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $b(v,w) = \langle Tv, Tw\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wie immer das euklidische Standard-Skalarprodukt bezeichnet.

(a) Zeigen Sie durch Nachrechnen der entsprechenden Eigenschaften, dass b eine symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b)$ von b bezüglich der Einheitsbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ des $\mathbb{R}^3$.

(c) Weisen Sie nach, dass b positiv definit ist.

Lösung:

zu (a) Seien $v, w, v', w' \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt

$$b(v+v', w) \quad = \quad \langle T(v+v'), Tw\rangle \quad = \quad \langle Tv + Tv', Tw\rangle \quad = \quad \langle Tv, Tw\rangle + \langle Tv', Tw\rangle \quad = \quad b(v,w) + b(v',w) \quad ,$$

ebenso $b(\lambda v, w) = \langle T(\lambda v), Tw\rangle = \langle \lambda(Tv), Tw\rangle = \lambda\langle Tv, Tw\rangle = \lambda b(v,w)$, $b(w,v) = \langle Tw, Tv\rangle = \langle Tv, Tw\rangle = b(v,w)$ und somit auch $b(v, \lambda w) = b(\lambda w, v) = \lambda b(w,v) = \lambda b(v,w)$ und schließlich $b(v, w+w') = b(w+w', v) = b(w,v) + b(w',v) = b(v,w) + b(v,w')$.

zu (b) Da b nach Teil (a) symmetrisch ist, genügt es die Einträge a_{ij} der Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b)$ für $1 \le i \le j \le 3$ auszurechnen. Es gilt

$$a_{11} \quad = \quad \langle Te_1, Te_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad = \quad 1 \quad , \quad a_{12} \quad = \quad \langle Te_1, Te_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad = \quad 2$$

$$a_{13} \quad = \quad \langle Te_1, Te_3\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad = \quad -3 \quad , \quad a_{22} \quad = \quad \langle Te_2, Te_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad = \quad 5$$

$$a_{23} \quad = \quad \langle Te_2, Te_3\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad = \quad -10 \quad , \quad a_{33} \quad = \quad \langle Te_3, Te_3\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad = \quad 26 \quad ,$$

die gesuchte Matrix ist also

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -10 \\ -3 & -10 & 26 \end{pmatrix}.$$

zu (c) Sei $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ vorgegeben. Weil T invertierbar ist, gilt auch $Tv \ne 0_{\mathbb{R}^3}$, und weil das euklidische Skalarprodukt positiv definit ist, folgt $b(v,v) = \langle Tv, Tv\rangle > 0$. (Alternativ kann auch das Hurwitz-Kriterium verwendet werden. Die Determinanten der oberen $k \times k$-Teilmatrizen A_k sind für $1 \le k \le 3$ gegeben durch $\det(A_1) = 1$, $\det(A_2) = 1$ und $\det(A_3) = \det(A) = 1$. Alle Determinanten sind positiv, das Kriterium somit erfüllt.)

Name: ____

Aufgabe 2. (4+4+2 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Weisen Sie durch Überprüfung eines geeigneten Kriteriums nach, dass A ähnlich zu einer Matrix $J \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ in Jordanscher Normalform ist.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A, und für jeden Eigenwert die algebraische und die geometrische Vielfachheit.

(c) Geben Sie eine Matrix in $\mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ in Jordanscher Normalform an, die zu A ähnlich ist. Ein Nachweis ist nicht erforderlich.

Hinweis: Sie brauchen in Teil (c) keine Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ zu bestimmen mit der Eigenschaft, dass TAT^{-1} in Jordanscher Normalform vorliegt. Nach Erledigung von Teil (a) und (b) ist für (c) keine neue Rechnung mehr notwendig.

Lösung:

zu (a) Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\chi_A = \det(xE_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x-5 & 0 & -6 \\ -1 & x+1 & -2 \\ -3 & 0 & x+4 \end{pmatrix} =$$

$$(x-5)(x+1)(x+4) + 0 \cdot (-2) \cdot 3 + (-6) \cdot (-1) \cdot 0$$

$$-3 \cdot (x+1) \cdot (-6) - 0 \cdot (-2) \cdot (x-5) - (x+4) \cdot (-1) \cdot 0$$

$$= (x^2 - 4x - 5)(x+4) + 0 + 0 + 18(x+1) - 0 - 0 = x^3 - 21x - 20 + 18x + 18 = x^3 - 3x - 2.$$

Durch probeweises Einsetzen findet man die Nullstellen -1 und 2. Darüber hinaus ist -1 auch eine Nullstelle der Ableitung $\chi'_A = 3x^2 - 3$. Also ist -1 eine doppelte Nullstelle von χ_A, und insgesamt gilt $\chi_A = (x+1)^2(x-2)$. Das charakteristische Polynom zerfällt also über $\mathbb{Q}$ in Linearfaktoren. Laut Vorlesung ist dies äquivalent dazu, dass A ähnlich zu einer Matrix $J \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ in Jordanscher Normalform ist.

zu (b) Die Eigenwerte von A sind laut Vorlesung die Nullstellen von χ_A. Also folgt aus Teil (a), dass -1 und 2 die beiden Eigenwerte von A sind. An der Zerlegung $\chi_A = (x+1)^2(x-2)$ kann abgelesen werden, dass die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte durch $\mu_a(A,-1) = 2$ und $\mu_a(A,2) = 1$ gegeben sind. Da für jeden Eigenwert λ jeweils $1 \leq \mu_g(A,\lambda) \leq \mu_a(A,\lambda)$ gilt, erhalten wir $\mu_g(A,2) = 1$ für die geometrische Vielfachheit. Die Rechnung

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zeigt darüber hinaus, dass $\mu_g(A,-1) = \dim \mathrm{Eig}(A,-1) = \dim \ker(A+E) = 3 - \mathrm{rg}(A+E) = 3 - 2 = 1$ gilt zu (c) Eine solche Matrix ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Laut Vorlesung existieren für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{Q}$ in J genau $\mu_g(A,\lambda)$ Jordanblöcke in J, wobei $\mu_a(A,\lambda)$ die Größe des größten Jordanblock zum Eigenwert λ ist. Aus $\mu_g(A,-1) = \mu_g(A,2) = \mu_a(A,2) = 1$ und $\mu_a(A,-1) = 2$ folgt somit, dass es zu jedem der beiden Eigenwerte -1 und 2 jeweils genau einen Jordanblock gibt, und dass der Jordanblock zum Eigenwert -1 die Größe 2 und der Jordanblock zum Eigenwert 2 die Größe 1 hat.)

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (6+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \geq 0\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Wir betrachten im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$ mit der Standardmetrik d gegeben durch $d(a,b) = |a - b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Teilmenge $Y = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Seien $U_1, U_2 \subseteq Y$ gegeben durch $U_1 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ und $U_2 = Y \setminus \{0\}$. Entscheiden Sie jeweils, ob U_1 bzw. U_2 in Y relativ offen bzw. relativ abgeschlossen ist. (Möglich ist auch jeweils beides, oder keines von beidem.) Eine Begründung ist hier *nicht* erforderlich.

Lösung:

zu (a) Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ sind als Polynomfunktionen stetig, und die (unendlichen) abgeschlossenen Intervalle $]-\infty, 1]$ und $[0, +\infty[$ sind abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$. Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{gathered}
(x,y) \in V \quad \Leftrightarrow \quad (x \geq 0) \ \wedge \ (y \geq 0) \ \wedge \ (x^2 + y^2 \leq 1) \quad \Leftrightarrow \\
f(x,y) \in [0, +\infty[\ \wedge \ g(x,y) \in [0, +\infty[\ \wedge \ h(x,y) \in]-\infty, 0] \quad \Leftrightarrow \\
(x,y) \in f^{-1}([0, +\infty[) \ \wedge \ (x,y) \in g^{-1}([0, +\infty[) \ \wedge \ (x,y) \in h^{-1}(]-\infty, 1]) \quad \Leftrightarrow \\
(x,y) \in f^{-1}([0, +\infty[) \cap g^{-1}([0, +\infty[) \cap h^{-1}(]-\infty, 1]).
\end{gathered}$$

Es gilt also $V = f^{-1}([0, +\infty[) \cap g^{-1}([0, +\infty[) \cap h^{-1}(]-\infty, 1])$. Als Urbilder von abgeschlossenen Teilmengen unter stetigen Abbildungen sind $f^{-1}([0, +\infty[)$, $g^{-1}([0, +\infty[)$ und $h^{-1}(]-\infty, 1])$ abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, somit auch deren Durchschnitt V.

zu (b) Die Teilmenge U_1 ist in Y sowohl relativ offen als auch relativ abgeschlossen. Die Teilmenge U_2 ist in Y zwar relativ offen, aber nicht relativ abgeschlossen. (Grund: Die Menge U_1 kann als Durchschnitt von Y mit der offenen Teilmenge $\left]\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right[$ und ebenso als Durchschnitt von Y mit der abgeschlossenen Teilmenge $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ dargestellt werden. Außerdem ist U_2 der Durchschnitt von Y mit der offenen Teilmenge $\left]0, \frac{3}{2}\right[$. Die Menge U_2 ist aber nicht relativ abgeschlossen in Y, denn $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in U_2, die in Y konvergiert. Wäre U_2 relativ abgeschlossen in Y, dann müsste der Grenzwert 0 der Folge ebenfalls in U_2 liegen.)

Name: ____

Aufgabe 4. (4+6 Punkte)

(a) Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f(0,0) = g(0,0) = 0$ und $|f(x,y)| \leq |g(x,y)|$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Ist g im Nullpunkt $(0,0)$ stetig, dann gilt dasselbe für f.

(b) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion $f_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_c(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{x(x+c)y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zeigen dass f_0 im Nullpunkt stetig und f_c für alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ im Nullpunkt unstetig ist.

Lösung:

zu (a) Sei $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim_n (x_n, y_n) = (0,0)$. Zu zeigen ist, dass $\lim_n f(x_n, y_n) = f(0,0)$ gilt. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben.Auf Grund der Stetigkeit von g im Nullpunkt gilt $\lim_n g(x_n, y_n) = g(0,) = 0$, und demnach existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $|g(x_n, y_n)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Es folgt $|f(x_n, y_n)| \leq |g(x_n, y_n)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Damit ist $\lim_n f(x_n, y_n) = 0 = f(0,0)$ nachgewiesen

zu (b) Sei $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim_n (x_n, y_n) = (0,0)$. Dann gilt $\lim_n x_n = \lim_n y_n = 0$, und wir müssen zeigen, dass $\lim_n f_0(x_n, y_n) = 0 = f_0(0,0)$ gilt. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Ist $n \in \mathbb{N}$ und $x_n = 0$, dann gilt $f_0(x_n, y_n) = 0$. Ansonsten gilt

$$|f_0(x_n, y_n)| \quad = \quad \left| \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} \right| \quad \leq \quad \left| \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2} \right| \quad = \quad |y_n|.$$

Wegen $\lim_n y_n = 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|y_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt im Fall $x_n = 0$ dann $|f(x_n, y_n)| = |0| = 0 < \varepsilon$, und im Fall $x_n \neq 0$ ebenso $|f(x_n, y_n)| \leq |y_n| < \varepsilon$.

Sei nun $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge gegeben durch $x_n = y_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ gilt $\lim_n (x_n, y_n) = (0,0)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$f_c(x_n, y_n) \quad = \quad \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n} + c)\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \quad = \quad \frac{n^2}{2} \cdot \frac{1}{n^2}(\frac{1}{n} + c) \quad = \quad \frac{1}{n} + c.$$

Es gilt also $\lim_n f_c(x_n, y_n) = \lim_n (\frac{1}{n} + c) = c \neq 0$. Wäre f_c im Nullpunkt stetig, dann müsste $\lim_n f_c(x_n, y_n) = f(0,0) = 0$ gelten.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (4+6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_v f(1,2)$ für den Vektor $v = (3,4) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Untersuchen Sie, ob die Richtungsableitungen $\partial_{(1,0)} f(0,0)$ bzw. $\partial_{(1,1)} f(0,0)$ existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

Lösung:

zu (a) Die Funktion f stimmt auf der offenen Teilmenge $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ überein mit der rationalen Funktion $(x,y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$, so dass hier partielle Ableitungen und Richtungsableitungen auf herkömmliche Weise mit Hilfe der Ableitungsregeln bestimmt werden können. Es gilt

$$\partial_1 \left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right) = \frac{\partial_1(x^2y)(x^2+y^2) - x^2y \cdot \partial_1(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \frac{2x^3y + 2xy^3 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$\partial_2 \left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right) = \frac{\partial_2(x^2y)(x^2+y^2) - x^2y \cdot \partial_2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \frac{x^4 + x^2y^2 - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Damit erhalten wir $\partial_1 f(1,2) = \frac{16}{25}$, $\partial_2 f(1,2) = -\frac{3}{25}$ und $\partial_v f(1,2) = 3 \cdot \frac{16}{25} - 4 \cdot \frac{3}{25} = \frac{36}{25}$.

zu (b) Seien $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\phi(t) = (t,0)$ und $\psi(t) = (t,t)$. Die Richtungsableitung $\partial_{(1,0)} f(0,0)$ existiert genau dann, wenn die Funktion $f \circ \phi$ im Nullpunkt differenzierbar ist. Es gilt $(f \circ \phi)(t) = f(t,0) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also existiert die Richtungsableitung, und es gilt $\partial_{(1,0)} f(0,0) = (f \circ \phi)'(0) = 0$. Weiter gilt $(f \circ \psi)(t) = f(t,t) = \frac{t^3}{2t^2} = \frac{1}{2} t$ (sowohl für $t \neq 0$ als auch für $t = 0$). Also existiert auch die zweite Richtungsableitung, und es ist $\partial_{(1,1)} f(0,0) = (f \circ \psi)'(0) = \frac{1}{2}$.

Name: ____________________

Aufgabe 6. (3+4+3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y,z) \quad = \quad \left(\ln(x^2+y^2+z^2)\ ,\ \frac{1}{1+(x^2+y^2+z^2)^2} \right).$$

(a) Stellen Sie f als Komposition $h \circ g$ zweier Funktionen $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^+$ und $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ dar, d.h. geben Sie die beiden Funktionen an und weisen Sie nach, dass die Gleichung $f = h \circ g$ tatsächlich erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie die totalen Ableitungen von g und h in jedem Punkt des jeweiligen Definitionsbereichs.

(c) Bestimmen Sie die totale Ableitung von f in jedem Punkt von $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel.

Lösung:

zu (a) Wir definieren die Funktionen g und h durch $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ und $h(t) = (\ln(t), \frac{1}{1+t^2})$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ jeweils

$$f(x,y,z) \quad = \quad (h \circ g)(x,y,z) \quad = \quad h(x,y,z) \quad = \quad \left(\ln(x^2+y^2+z^2)\ ,\ \frac{1}{1+(x^2+y^2+z^2)^2} \right).$$

zu (b) Für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ gilt $g'(x,y,z) = (2x\ 2y\ 2z)$, und für alle $t \in \mathbb{R}^+$ ist

$$h'(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -\frac{2t}{(1+t^2)^2}) \end{pmatrix}.$$

zu (c) Die mehrdimensionale Kettenregel liefert für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ jeweils

$$f'(x,y,z) \quad = \quad (h \circ g)'(x,y,z) \quad = \quad h'(g(x,y,z)) \cdot g'(x,y,z) \quad = \quad h'(x^2+y^2+z^2) \cdot \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

$$= \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \\ -\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{(1+(x^2+y^2+z^2))^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} & \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \\ -\frac{4x^3+4xy^2+4xz^2}{(1+(x^2+y^2+z^2))^2} & -\frac{4x^2y+4y^3+4yz^2}{(1+(x^2+y^2+z^2))^2} & -\frac{4x^2z+4y^2z+4z^3}{(1+(x^2+y^2+z^2))^2} \end{pmatrix}.$$

Name: ____________________

Aufgabe 7. (4+3+3 Punkte)

Sei $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f : U \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(a,b,c) = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{ac}, \frac{1}{c})$ für alle $(a,b,c) \in U$.

(a) Bestimmen Sie $f'(a,b,c)$ für alle $(a,b,c) \in U$ und weisen Sie nach, dass f eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie: Es gibt eine offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq U$ von $p = (1,2,3)$ und eine offene Umgebung $\tilde{W} \subseteq \mathbb{R}^3$ von $q = f(p) = (1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, so dass durch $f|_{\tilde{U}}$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus zwischen $\tilde{U}$ und $\tilde{W}$ definiert ist.

(c) Sei $g : \tilde{W} \to \tilde{U}$ die Umkehrabbildung von $f|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to \tilde{W}$. Berechnen Sie die Ableitung $g'(q)$ von g an der Stelle q.

Lösung:

zu (a) Für alle $(a,b,c) \in U$ gilt

$$f'(a,b,c) \quad = \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ \frac{b}{a^2c} & -\frac{1}{ac} & \frac{b}{ac^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix}.$$

Sämtliche partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen von f sind rationale Funktionen und somit stetig auf U. Laut Vorlesung ist f damit auf dem gesamten Definitionsbereich U total differenzierbar, mit stetiger Ableitungsfunktion, insgesamt also ein $\mathcal{C}^1$-Funktion.

zu (b) Die totale Ableitung von f an der Stelle $p = (1,2,3)$ ist gegeben durch

$$f'(1,2,3) \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Mit der Sarrus-Regel erhalten wir

$$\det f'(1,2,3) \quad = \quad (-1)\cdot(-\tfrac{1}{3})\cdot(-\tfrac{1}{9}) + 0\cdot\tfrac{2}{9}\cdot 0 + 0\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 0 - 0\cdot(-\tfrac{1}{3})\cdot 0 - 0\cdot\tfrac{2}{9}\cdot(-1) - (-\tfrac{1}{9})\cdot\tfrac{2}{3}\cdot 0 \quad = \quad -\tfrac{1}{27} \quad \neq \quad 0.$$

Dies zeigt, dass die Matrix $f'(p)$ invertierbar ist. Nach Teil (a) ist f außerdem eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung. Die angegebene Aussage folgt somit aus dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit.

zu (c) Auf Grund der Umkehrregel gilt $g'(q) = f'(p)^{-1}$. Wir berechnen die Inverse von $f'(p)$ mit dem Gauß-Algorithmus.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Es gilt also

$$g'(q) \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Name: ____________________

Aufgabe 8. (4+6 Punkte)

Sei $f : [1,3] \times [2,4] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \frac{1}{xy}$. Außerdem sei $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)$ die Zerlegung von $Q = [1,3] \times [2,4]$ gegeben durch $\mathcal{Z}_1 = \{2\}$ und $\mathcal{Z}_2 = \{3\}$.

(a) Berechnen Sie die Untersumme $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z})$ und die Obersumme $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z})$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_Q f(x,y)\, d(x,y)$ mit dem Satz von Fubini.

Lösung:

zu (a) Die Menge der durch die Zerlegung $\mathcal{Z}$ definierten Teilquader ist gegeben durch $\mathcal{Q}(\mathcal{Z}) = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ mit $K_1 = [1,2] \times [2,3]$, $K_2 = [1,2] \times [3,4]$, $K_3 = [2,3] \times [2,3]$ und $[2,3] \times [3,4]$. Supremum und Infimum der Funktion f auf diesen Quadern sind $c^-_{K_1,f} = \frac{1}{6}$, $c^+_{K_1,f} = \frac{1}{2}$, $c^-_{K_2,f} = \frac{1}{8}$, $c^+_{K_2,f} = \frac{1}{3}$, $c^-_{K_3,f} = \frac{1}{9}$, $c^+_{K_3,f} = \frac{1}{4}$, $c^-_{K_4,f} = \frac{1}{12}$, $c^+_{K_4,f} = \frac{1}{6}$. Wegen $v(K_j) = 1$ für $1 \leq j \leq 4$ erhalten wir für Unter- und Obersumme somit die Werte $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{35}{72}$ und $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{4}$.

zu (b) Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\int_{[1,3]\times[2,4]} \frac{1}{xy} d(x,y) = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} \int_2^4 \frac{1}{y}\, dy \right) dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} \left[\ln(y)\right]_2^4 \right) dx =$$

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{x} \left(\ln(4) - \ln(2)\right) \right) = (\ln(4) - \ln(2)) \cdot \int_1^3 \frac{1}{x}\, dx = (\ln(4) - \ln(2)) \cdot [\ln(x)]_1^3 = (\ln(4) - \ln(2)) \cdot \ln(3).$$

(Der Wert $(\ln(4) - \ln(2)) \cdot \ln(3) \approx 0{,}762$ liegt zwischen $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) \approx 0{,}486$ und $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}) = 1{,}25$.)