LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2021/22
03.03.2022

Analysis mehrerer Variablen (LA Gym)

(Lehramt Gymnasium)

Online-Klausur

Nachname: ________________ Vorname: ________________

Matrikelnr.: ______________________________

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten erhalten Sie per Email.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hiermit erkläre ich, die Klausur eigenständig bearbeitet und während der Bearbeitungszeit keinen Kontakt zu anderen Personen aufgenommen habe.

____

(Unterschrift)

Hinweise:

(a) Wie bei den Präsenzklausuren achten Sie bitte auch hier darauf, auf jedem Blatt **immer nur eine Aufgabe** zu bearbeiten.

(b) Als Hilfsmittel zugelassen, aber bei guter Vorbereitung nicht notwendig, sind das Skript, Lösungen von Übungsaufgaben, Lehrbücher und beliebige andere Materialien. Nicht zulässig ist die Kontaktaufnahme zu anderen Personen während der Bearbeitungszeit. Bitte denken Sie auch daran, die obige Eigenständigkeitserklärung zu unterschreiben.

(c) Nach der regulären Bearbeitungszeit von 120 Minuten stehen weitere 45 Minuten zum Einscannen (oder notfalls Fotografieren) der Klausurblätter und zum Versenden per Email zur Verfügung. Akzeptiert wird nur eine einzelne, zusammenhängende PDF-Datei. Einsendungen, die nach 15:15:00 Uhr eintreffen, können nicht gewertet werden.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Bearbeitungszeit: 120+45 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (3+4+3 Punkte)

Sei die Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Dass T invertierbar ist, braucht nicht überprüft werden.) Sei $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $b(v, w) = \langle Tv, Tw \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wie immer das euklidische Standard-Skalarprodukt bezeichnet.

(a) Zeigen Sie durch Nachrechnen der entsprechenden Eigenschaften, dass b eine symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(b)$ von b bezüglich der Einheitsbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ des $\mathbb{R}^3$.

(c) Weisen Sie nach, dass b positiv definit ist.

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (4+4+2 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Weisen Sie durch Überprüfung eines geeigneten Kriteriums nach, dass A ähnlich zu einer Matrix $J \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ in Jordanscher Normalform ist.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A, und für jeden Eigenwert die algebraische und die geometrische Vielfachheit.

(c) Geben Sie eine Matrix in $\mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ in Jordanscher Normalform an, die zu A ähnlich ist. Ein Nachweis ist nicht erforderlich.

Hinweis: Sie brauchen in Teil (c) keine Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ zu bestimmen mit der Eigenschaft, dass TAT^{-1} in Jordanscher Normalform vorliegt. Nach Erledigung von Teil (a) und (b) ist für (c) keine neue Rechnung mehr notwendig.

Name: ____

Aufgabe 3. (6+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x, y \geq 0\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Wir betrachten im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$ mit der Standardmetrik d gegeben durch $d(a, b) = |a - b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Teilmenge $Y = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Seien $U_1, U_2 \subseteq Y$ gegeben durch $U_1 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ und $U_2 = Y \setminus \{0\}$. Entscheiden Sie jeweils, ob U_1 bzw. U_2 in Y relativ offen bzw. relativ abgeschlossen ist. (Möglich ist auch jeweils beides, oder keines von beidem.) Eine Begründung ist hier *nicht* erforderlich.

Name: ______________________________

Aufgabe 4. (4+6 Punkte)

(a) Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f(0,0) = g(0,0) = 0$ und $|f(x,y)| \leq |g(x,y)|$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Ist g im Nullpunkt $(0,0)$ stetig, dann gilt dasselbe für f.

(b) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion $f_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_c(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{x(x+c)y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeigen dass f_0 im Nullpunkt stetig und f_c für alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ im Nullpunkt unstetig ist.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (4+6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\partial_v f(1,2)$ für den Vektor $v = (3,4) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Untersuchen Sie, ob die Richtungsableitungen $\partial_{(1,0)} f(0,0)$ bzw. $\partial_{(1,1)} f(0,0)$ existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

Name: ______________________________

Aufgabe 6. (3+4+3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y,z) \quad = \quad \left(\ln(x^2+y^2+z^2) \ , \ \frac{1}{1+(x^2+y^2+z^2)^2} \right) .$$

(a) Stellen Sie f als Komposition $h \circ g$ zweier Funktionen $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^+$ und $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ dar, d.h. geben Sie die beiden Funktionen an und weisen Sie nach, dass die Gleichung $f = h \circ g$ tatsächlich erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie die totalen Ableitungen von g und h in jedem Punkt des jeweiligen Definitionsbereichs.

(c) Bestimmen Sie die totale Ableitung von f in jedem Punkt von $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel.

Name: ____

Aufgabe 7. (4+3+3 Punkte)

Sei $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f : U \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(a,b,c) = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{ac}, \frac{1}{c})$ für alle $(a,b,c) \in U$.

(a) Bestimmen Sie $f'(a,b,c)$ für alle $(a,b,c) \in U$ und weisen Sie nach, dass f eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie: Es gibt eine offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq U$ von $p = (1,2,3)$ und eine offene Umgebung $\tilde{W} \subseteq \mathbb{R}^3$ von $q = f(p) = (1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, so dass durch $f|_{\tilde{U}}$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus zwischen $\tilde{U}$ und $\tilde{W}$ definiert ist.

(c) Sei $g : \tilde{W} \to \tilde{U}$ die Umkehrabbildung von $f|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to \tilde{W}$. Berechnen Sie die Ableitung $g'(q)$ von g an der Stelle q.

Name: ____________________

Aufgabe 8. (4+6 Punkte)

Sei $f : [1,3] \times [2,4] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \frac{1}{xy}$. Außerdem sei $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)$ die Zerlegung von $Q = [1,3] \times [2,4]$ gegeben durch $\mathcal{Z}_1 = \{2\}$ und $\mathcal{Z}_2 = \{3\}$.

(a) Berechnen Sie die Untersumme $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z})$ und die Obersumme $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z})$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_Q f(x,y)\, d(x,y)$ mit dem Satz von Fubini.