LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann

Sommersemester 2022
27. September 2022

Lineare Algebra

(Lehramt Gymnasium)

Nachholklausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik
- ❏ Bachelor Informatik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten befinden sich auf dem Papierstreifen, den ich während der Klausur verteile.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ der Körper mit drei Elementen. Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{F}_3$ die Lösungsmenge $\mathscr{L}_a \subseteq \mathbb{F}_3^3$ des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & = & a + \bar{1} \\ & & ax_2 & + & x_3 & = & \bar{1} \\ \bar{2}x_1 & & & + & x_3 & = & \bar{1} \end{array}$$

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (4+3+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Kehrwert $\overline{37}^{-1}$ des Elements $\overline{37} \in \mathbb{F}_{23}$.

(b) Laut Vorlesung sind die Elemente des Rings $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ bestimmte Teilmengen von $\mathbb{Z}$. Welche Teilmengen sind das? Geben Sie diese an.

(c) Begründen Sie, dass $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ kein Körper ist.

Name: ____________________

Aufgabe 3. (3+3+2+2 Punkte)

Sei $V = \mathscr{M}_{3,\mathbb{C}}$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen 3×3-Matrizen und $B \in \mathscr{M}_{4\times 3,\mathbb{C}}$ eine beliebige 4×3-Matrix.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\phi : \mathscr{M}_{3,\mathbb{C}} \to \mathscr{M}_{4\times 3,\mathbb{C}}$, $A \mapsto BA$ eine lineare Abbildung gegeben ist.

(b) Begründen Sie, dass $U = \{A \in V \mid BA = 0_{\mathscr{M}_{4\times 3,\mathbb{C}}}\}$ ein Untervektorraum von V ist.

(c) Begründen Sie, dass $0 \leq \dim U \leq 9$ für den Untervektorraum U aus Teil (b) gilt.

(d) Geben Sie jeweils eine konkrete Matrix B an, so dass der Untervektorraum U aus Teil (b) null- bzw. 9-dimensional ist. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

Name: ____

Aufgabe 4. (4+3+3 Punkte)

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der $\mathbb{C}^2$ sowohl als $\mathbb{C}$- als auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst werden kann. Geben Sie je zwei verschiedene Basen von $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$- bzw. als $\mathbb{R}$-Vektorraum an (insgesamt also vier Basen). Ein Nachweis ist *nicht* erforderlich.

(b) Sei nun V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien $v_1, v_2 \in V$ zwei verschiedene Elemente. Beweisen Sie die Gleichung $\text{lin}\{v_1 - v_2, v_2\} = \text{lin}\{v_1 + v_2, v_1 - 2v_2\}$.

(c) Nun sei $\{w_1, w_2, w_3\}$ eine dreielementige linear unabhängige Teilmenge eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass dann auch $\{w_1 + w_2, w_1 + w_3, w_2 + w_3\}$ eine dreielementige linear unabhängige Teilmenge von V ist.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (4 + 6 Punkte)

(a) Seien U, W Untervektorräume des $\mathbb{R}^7$ mit $\dim U = 3$, $\dim W = 4$ und $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^7}\}$. Begründen Sie, dass $U + W = \mathbb{R}^7$ gilt.

(b) Begründen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen, dass es keine injektive lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^6$ gibt.

Name: ____________________

Aufgabe 6. (6+4 Punkte)

Sei $V = \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen und sei $\phi : V \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} \\ a_{12} + a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachte in V die geordnete Basis $\mathscr{A} = (B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22})$ gegeben durch die vier Basismatrizen, und in $\mathbb{R}^3$ die geordnete Basis

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

(a) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $\mathscr{M}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(\phi) \in \mathscr{M}_{3\times 4,\mathbb{R}}$.

(b) Sei $A \in V$ mit $\Phi_{\mathscr{A}}(A) = (1, 2, 3, 4)$. Berechnen Sie $\Phi_{\mathscr{B}}(\phi(A))$ und $\phi(A)$.

In Teil (b) bezeichnen $\Phi_{\mathscr{A}} : V \to \mathbb{R}^4$ und $\Phi_{\mathscr{B}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wie immer die Koordinatenabbildungen bezüglich der Basen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$.

Name: ______________________________

Aufgabe 7. (6+4 Punkte)

(a) Es sei $\mathbb{F}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \alpha, \alpha+\bar{1}\}$ ein Körper bestehend aus vier Elementen, wobei $\bar{0}$ das Null- und $\bar{1}$ das Einselement des Körpers bezeichnet. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{F}_4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \alpha & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \alpha+\bar{1} \\ \alpha & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

Ohne Beweis darf verwendet werden, dass $\alpha(\alpha+\bar{1}) = \bar{1}$ und $\beta + \beta = \bar{0}$ für alle $\beta \in \mathbb{F}_4$ gilt.

(b) Wir betrachten die Matrix $B \in \mathscr{M}_{5,\mathbb{Q}}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Laut Vorlesung ist die Determinante von B gegeben durch die Leibniz-Formel $\det(B) = \sum_{\sigma \in S_5} s_\sigma$ mit $s_\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot b_{1,\sigma(1)} \cdot b_{2,\sigma(2)} \cdot b_{3,\sigma(3)} \cdot b_{4,\sigma(4)} \cdot b_{5,\sigma(5)}$ für alle $\sigma \in S_5$. Geben Sie die eindeutig bestimmte Permutation $\sigma \in S_5$ mit $s_\sigma \neq 0$ an, und berechnen Sie den Summanden s_σ.

Name: ______________________________

Aufgabe 8. (2+3+3+2 Punkte)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ und $v \in K^n$. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit v ein Eigenvektor von A ist?

(b) Sei nun $n = 3$ und $K = \mathbb{F}_5$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{4} \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$.

(d) Begründen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und geben Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{R}}$ an, die ähnlich zu A ist.